



המחלקה למתמטיקה  
Department of Mathematics

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)  
במתמטיקה שימושית**

**בעיית השידוך היציב**

**טרז אברהים**

**The stable marriage problem**

**Terez Ibrahem**

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)  
במתמטיקה שימושית**

**בעיית השידוך היציב**

**טרז אברהים**

**The stable marriage problem**

**Terez Ibrahem**

**Advisor:  
Dr. Mark  
Berman**

**מנחה:  
ד"ר מרק בירמן**

**Karmiel**

**כרמיאל**

**2015**

## תוכן עניינים:

---

|            |                            |
|------------|----------------------------|
| 4-5.....   | מבוא                       |
| 6-25.....  | פרק 1 – בעיית השידוך היציב |
| 26-32..... | פרק 2 – שידוך ציבורי       |
| 33-40..... | פרק 3 – בעיית הכלבים       |
| 41.....    | סיכום                      |
| 42.....    | ביבליוגרפיה                |

### בעיית השידוכים:

בעיית השידוכים הוא משחק שיתופי בתורת המשחקים, שמטרתו לשדך בין חברי שתי קבוצות בצורה התואמת ביותר להעדפותיהם. לפני שננסח את הבעיה, נגיד כמה מילים על תורת המשחקים.

### תורת המשחקים:

תורת המשחקים היא ענף של המתמטיקה והכלכלה המנתח מצבי שיתוף פעולה בין מקבלי החלטות בעלי רצונות שונים. מצבים כאלו נקראים משחקים, והמשתתפים בהם – שחקנים. כאשר משחק זה סיטואציה שיש בה לפחות שני משתתפים וכל שחקן קובע מה הוא רוצה לעשות במשחק, והתוצאה נקבעת לפי מה שכולם ביחד עושים אז נוכל להגיד שרוב הדברים הקוראים בחיי היום יום שלנו הם משחק, לדוגמא בבי"ס, יחס בין מדינות, בבתי חולים, במכללות... המטרה היא "לפתור" את המשחק, כלומר, לזהות בו את דרכי הפעולה הצפויות של השחקנים או להצביע על דרכי פעולה מומלצות לשחקנים בודדים או לקבוצות של שחקנים. חקירה של משחק מורכב מתאפשרת על ידי הפשטתו לאחד מכמה מודלים כלליים, הניתנים לניתוח מתמטי.

### סוגי המשחקים:

1. תורת המשחקים השיתופיים: עוסקת במשחקים בהם השחקנים יכולים לחתום על הסכמים מחייבים לפעולה מתואמת, לדוגמא בבתי משפט.
2. תורת המשחקים הלא שיתופיים: עוסקת במשחקים בהם השחקנים לא יכולים לחתום על הסכמים מחייבים, כך שהשחקנים פועלים באופן עצמאי.

בעיית השידוך היציב היא אחד היישומים החשובים בתורת המשחקים, והיום תחום זה מיושם בהצלחה בארצות הברית ובבריטניה להשמת סטודנטים מתמחים לרפואה בבתי חולים.

בעיית השידוך היציב הוצגה בשנת 1962 ע"י גייל ושפלאי, כאשר התעוררה בארצות הברית בעיית השמת סטודנטים מתמחים לרפואה בבתי חולים. לכל מתמחה יש העדפות על בתי חולים שהוא רוצה להתקבל אליהם להתמחות. ובאופן דומה, לכל בית חולים ישנם מתמחים שהוא מעדיף יותר ומתמחים שהוא מעדיף פחות. ורצו להתאים בין המתמחים לבתי חולים בצורה כזו שאין בית חולים ומתמחה שמעדיפים אחד את השני על פני המותאמים אליהם. לכן בשנת 1944 נוצרה תחרות בין בתי החולים על השגת מתמחים טובים יותר, וכדי להשיג מתמחים טובים הקדימו בתי החולים את התאריך שבו הציעו לסטודנטים משרת התמחות, ואז רואיינו הסטודנטים לרפואה כבר בתחילת השנה השלישית ללימודיהם, באותה תקופה תואר לרפואה היה 4 שנים ולא 7 שנים כמו היום. ובשנים לאחר מכן הקדימו את הראיונות עוד יותר וזה לא התאים לאף אחד מהצדדים.

לכן, הוחלט שלאחר שלב הראיונות כל סטודנט דירג את בתי החולים שראיינו אותו, וכל בית חולים דירג את הסטודנטים שאותם ראיין, הנתונים הועברו למחלקה מיוחדת שתפקידה היה לטפל בהשמה ומציאת אלגוריתם שנכתב במיוחד לצורך זה, שלקח בחשבון את העדפותיהם של המתמחים ובתי החולים והתאים ביניהם.

האלגוריתם הושם ע"י בתי הספר לרפואה בארצות הברית כך שאין בית חולים ומתמחה שמעדיפים אחד את השני על פני המותאמים אליהם.

התאמה בין איברים משתי אוכלוסיות אינה אופיינית רק לבעיה זו, לדוגמא התאמה בין מכללות וסטודנטים, שידוכים בין גברים ונשים.

בשנת 1962 גייל ושפלאי הגדירו את מושג "השידוך היציב", הוכיחו את קיומו, ונתנו אלגוריתם שנותן התאמה כך שאין זוגות של בית חולים ומתמחה שאינם מרוצים.

# פרק 1.

## הגדרה 1, יחס העדפות:

יהי איבר  $x$  ושתי אפשרויות  $a$  ו- $b$ , יחס העדפות של  $x$  מציין, עבור הזוג של האפשרויות  $a$  ו- $b$ , האם מקבל ההחלטות  $x$  מעדיף ממש אפשרות הראשונה על פני השנייה, מעדיף ממש את האפשרות השנייה על פני הראשונה. לכן ניתן להשתמש ביחס העדפות כדי לתאר את העדפותיו של מקבל ההחלטות  $x$ . עבור שתי אפשרויות  $a$  ו- $b$  נסמן:

- $a \succ b$  עבור המצב בו מקבל ההחלטות מעדיף ממש את  $a$  על פני  $b$ .
- $b \succ a$  עבור המצב בו מקבל ההחלטות מעדיף ממש את  $b$  על פני  $a$ .

## הגדרה 2, שידוך בין שני איברים :

תהינה  $M$  ו- $W$  שתי קבוצות, כל אחת בת  $n$  איברים. ושידוך הוא התאמה בין הקבוצה  $M$  לקבוצה  $W$  כך שכל איבר בקבוצה  $M$  מותאם לאיבר אחד ויחיד בקבוצה  $W$ . סימון:  $w = f(m)$  ז"א ש- $w$  מותאם לאיבר  $m$  כאשר  $m$  ו- $w$  שני איברים בקבוצות  $M$  ו- $W$  בהתאמה.

## הגדרה 3, שידוך יציב:

תהינה  $M$  ו- $W$  שתי קבוצות, כל אחת בת  $n$  איברים, לכל איבר יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה- $n$  איברים בקבוצה השנייה. שידוך יציב בין  $M$  ל- $W$  זו פונקציה  $f: M \rightarrow W$  חח"ע ועל, כאשר אין שני איברים: איבר  $m$  מקבוצה ראשונה ו- $w$  מקבוצה שנייה, שאינם מותאמים  $f(m) \neq w$  כך ש- יחס העדפות של  $m$  הוא:  $w > f(m)$ , וגם יחס העדפות של  $w$  הוא:  $f^{-1}(w) < m$ , כלומר,  $m$  מעדיף את  $w$  על האיבר שהוא מותאם אליו  $f(m)$  ו- $w$  מעדיף את  $m$  על האיבר שהוא מותאם אליו  $f^{-1}(w)$ .

## הגדרה 4, בעיית השידוך היציב:

תהינה  $M$  ו- $W$  שתי קבוצות, כל אחת בת  $n$  איברים, לכל איבר יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה- $n$  איברים בקבוצה השנייה. האם יש שידוך יציב?

**!!!הערה:** התאמה בין איברים יכולה להיות בין שתי אוכלוסיות כלשהן, רופאים ובתי חולים, מכללות וסטודנטים, נשים וגברים. בחלקם מתאימים כמה איברים מקבוצה אחת לאיבר אחד בקבוצה השנייה כמו בבעיית הרופאים ובתי חולים, ובחלק מתאימים איבר מקבוצה ראשונה לאיבר אחד מהקבוצה השנייה כמו בבעיית הגברים והנשים וזאת בעיית השידוך שהגדרנו לעיל, מעכשיו ואילך נתייחס לשתי קבוצות כקבוצות נשים וגברים כאשר  $W$  היא קבוצת הנשים, ו- $M$  קבוצת הגברים, וההתאמה בין שני איברים היא שידוך בין גבר ואישה.

## האלגוריתם של גייל ושפלאי [2]:

האלגוריתם של גייל ושפלאי מייצר שידוך יציב בין איברי שתי קבוצות  $M$  ו- $W$ , כאשר כל אחת מהן בת  $n$  איברים, לכל איבר יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה- $n$  איברים בקבוצה השנייה.

$i=1 \dots n$ ,  $m_i$  הם איברי הקבוצה  $M$ , קבוצת הגברים.

$j=1 \dots n$ ,  $w_j$  הם איברי הקבוצה  $W$ , קבוצת הנשים.

### תיאור האלגוריתם:

שלב ראשון:

כל גבר מציע שידוך לאישה הראשונה בסדר העדפותיו.

האישה  $w_j$  מקבלת את ההצעה של הגבר שהיא מעדיפה ביותר מבין הגברים ה- $m_i$  שהציעו לה שידוך, ודוחה את השאר.

שלב שני:

עשיו כל גבר שנדחה, מציע לאישה השנייה ביחס ההעדפות שלו.

האישה בוחרת בגבר שהיא מעדיפה ביותר מבין הגברים שמצעים לה בשלב הנוכחי שידוך כולל הגבר שקבלה הצעתו בשלב הקודם אם יש, ודוחה את השאר.

.....

שלב  $k$ :

כל גבר שנדחה בשלב הקודם, מציע שידוך לאישה הראשונה ביחס העדפותיו מבין כל הנשים שעדיין לא הציע להן בשלבים הקודמים.

האישה  $w_j$  מקבלת את ההצעה של הגבר שהיא מעדיפה ביותר מבין הגברים שהציעו לה שידוך כולל הגבר שהיא קיבלה את הצעתו בשלב הקודם אם יש, ושאר האברים נשארים ללא הצעות שידוכים.

...

שלב אחרון:

האלגוריתם מסתיים כאשר אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים, ואז נעשה שידוך בין כל אישה והגבר שהיא קיבלה את הצעת השידוך שלו.

## הגדרה 5, "אישה תפוסה":

אם אישה מקבלת הצעה אחת לפחות בשלב מסוים, ז"א יש לה הצעת שידוך, אז היא נקראת "תפוסה".

לדוגמא אם בשלב  $k$  גבר  $m$  מציע שידוך לאישה  $w$  אזי החל משלב  $k$  ואילך  $w$  נקראת אישה תפוסה.

## הערות:

1. אם גבר בשלב  $k$  מציע לאישה-  $w_j$  הצעת שידוך אך הוא מעדיף את  $w_l$  על פניה, זה אומר שבעבר הוא הציע שידוך באחד השלבים שלפני השלב  $k$  לאישה  $w_l$  ו-  $w_l$  קיבלה הצעת גבר אחר שהיא מעדיפה אותו על פניו.
2. אם אישה מקבלת הצעת שידוך מגבר  $m_i$  בשלב  $k$ , ובשלב מאוחר יותר מקבלת את הצעתו של-  $m_h$ , ז"א שהיא מעדיפה את  $m_h$  על פני  $m_i$ . כלומר יחס העדפות שלה הוא:  $m_i < m_h$ .
3. אף גבר לא חוזר בהצעה לאישה שכבר לא קיבלה את הצעתו.

## משפט 1[2]:

בכל בעיית שידוכים קיים שידוך יציב.

## הוכחה [2]:

נוכיח את המשפט ע"י האלגוריתם של גייל ושפלאי, מסתבר שזה מייצר שידוך יציב.

נראה שאלגוריתם הנ"ל בהכרח מביא שידוך ויתר על כן נקבל שידוך יציב.

נוכיח קודם את קיום השידוך,

התהליך חייב להסתיים כי יש מספר סופי של פעמים שאישה יכולה לדחות גבר, גבר לא יכול להציע שידוך לאותה אישה פעמיים.

בסוף התהליך כל אישה חייבת להיות עם שידוך אחד או בלי שידוך בכלל.

אם לכל אישה יש גבר אחד אז יש שידוך.

אחרת יש לפחות אישה אחת פנויה, ולכן יש לפחות גבר אחד ללא שידוך, כי מספר הנשים שווה למספר הגברים.

גבר כזה הציע לכל הנשים וכולן דחו אותו כולל האישה הפנויה, וזאת סתירה לכך שכל אישה שמקבלת הצעת שידוך אחת לפחות בשלב כלשהו אז היא תישאר תפוסה, לכן התהליך חייב להסתיים בשידוך כאשר כל אישה משודכת לגבר.

עכשיו נוכיח שהשידוך המתקבל מהאלגוריתם הוא שידוך יציב:

נניח בשלילה שהשידוך אינו יציב,

מהשידוך האחרון שנותן האלגוריתם מקבלים שתי ההתאמות הבאות:

אישה  $w_1$  משודכת לגבר  $m_1$ , ואישה  $w_2$  משודכת לגבר  $m_2$ .

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_2$$

כך שהגבר  $m_1$  מעדיף את  $w_2$  על  $w_1$  שמשודכת אליו ובו זמנית האישה  $w_2$  גם כן מעדיפה את  $m_1$  על  $m_2$  שמשודך אליה.

מכיוון שגבר  $m_1$  מעדיף את האישה  $w_2$  על  $w_1$  שמשודך אליה, ולפי הערה 1, ז"א ש- $m_1$  הציע בעבר שידוך לאישה  $w_2$  בשלב כלשהו לפני השלב שבו הציע שידוך ל- $w_1$ , אבל בסופו של דבר  $w_2$  קיבלה הצעת השידוך של  $m_2$  והעדיפה אותו על פני הגבר  $m_1$ .

וזוהי סתירה להנחה ש- $w_2$  מעדיפה את  $m_1$  על  $m_2$  שמותאמת אליו בשידוך הסופי. מסתירה זו נקבל שהשידוך יציב.

### הערה:

4. באלגוריתם שהצגתי הגברים היו מציעים והנשים בוחרות (נסמן שידוך זה ב- $A^m$ ), ניתן להפוך את תפקידי הגברים והנשים, כאשר הנשים המציעות והגברים בוחרים (נסמן שידוך זה ב- $A^w$ ), לכן ומכיוון שתהליך זה הוא תהליך סימטרי נובע כי גם תהליך זה יוביל לשידוך יציב.

### טענה [1]:

מספר השלבים המקסימאלי באלגוריתם של גייל ושפלאי שווה ל-  $n^2 - 2n + 2$ .

### הוכחה:

נוכיח שלכל שידוך ע"י האלגוריתם של גייל ושפלאי יהיו מקסימום  $n^2 - 2n + 2$  שלבים.

לפי מה שרואים בציור בכל שלב חוץ מהשלב הראשון והאחרון לפחות גבר אחד מציע שידוך:



לכן במצב הגרוע ביותר בכל שלב אמצעי רק גבר אחד מציע, והוא יכול להציע רק  $n - 2$  פעמים (אחרת התהליך מסתיים). לכן מספר השלבים הוא מקסימום:

$$1 + n(n - 2) + 1 = n^2 - 2n + 2$$

כחלק שני של ההוכחה נראה שיש דוגמא של רשימות שנותנת את החסם העליון :  $n^2 - 2n + 2$  שלבים:

דוגמא לרשימות עדיפויות שנותנות מספר שלבים מקסימלי כאשר מפעלים את האלגוריתם של גייל ושפלאי:

סדר העדיפויות של הנשים הוא:

| סדר עדיפות | $w_i$     | $w_n$ |
|------------|-----------|-------|
| 1          | $m_{i+1}$ | *     |
| 2          | $m_i$     | *     |
| 3          | *         | *     |
| .....      | .....     | ..... |
| $n - 1$    | *         | *     |
| $n$        | *         | *     |

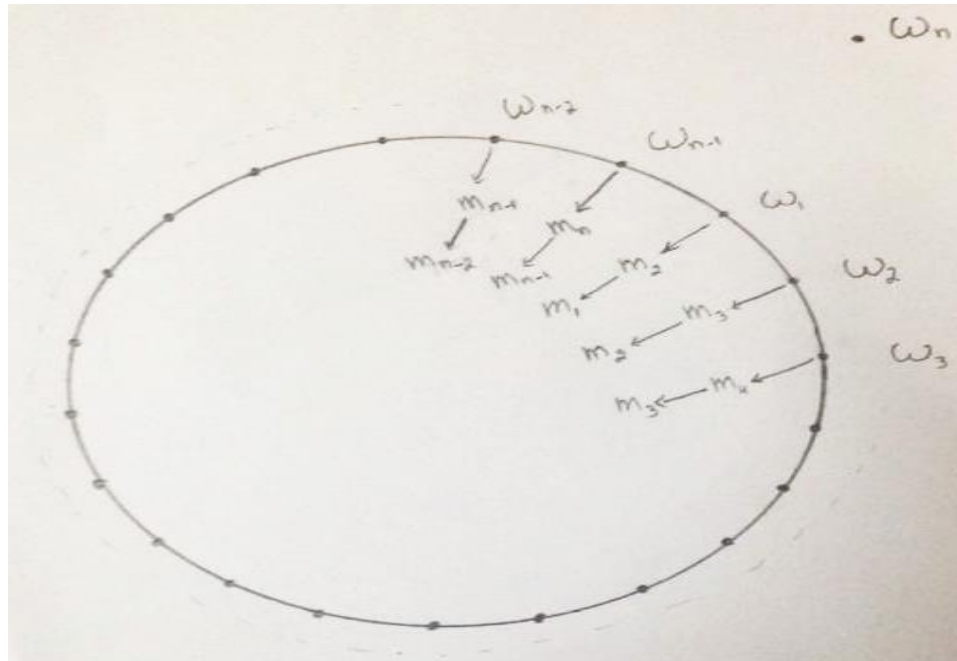
כאשר ה-\* יות נותנות סידור כלשהו שלא משפיע על התהליך.

סדר העדיפויות של הגברים הוא:

| סדר עדיפות | $m_i$                                              | $m_n$ |
|------------|----------------------------------------------------|-------|
| 1          | $w_i$                                              | $w_1$ |
| 2          | $w_{i+1}$                                          | $w_2$ |
| 3          | הסדר הולך עם כיוון השעון לפי עמידתן של הנשים במעגל |       |
| 4          |                                                    |       |
| .....      |                                                    |       |
| $n - 1$    |                                                    |       |
| $n$        | $w_n$                                              | $w_n$ |

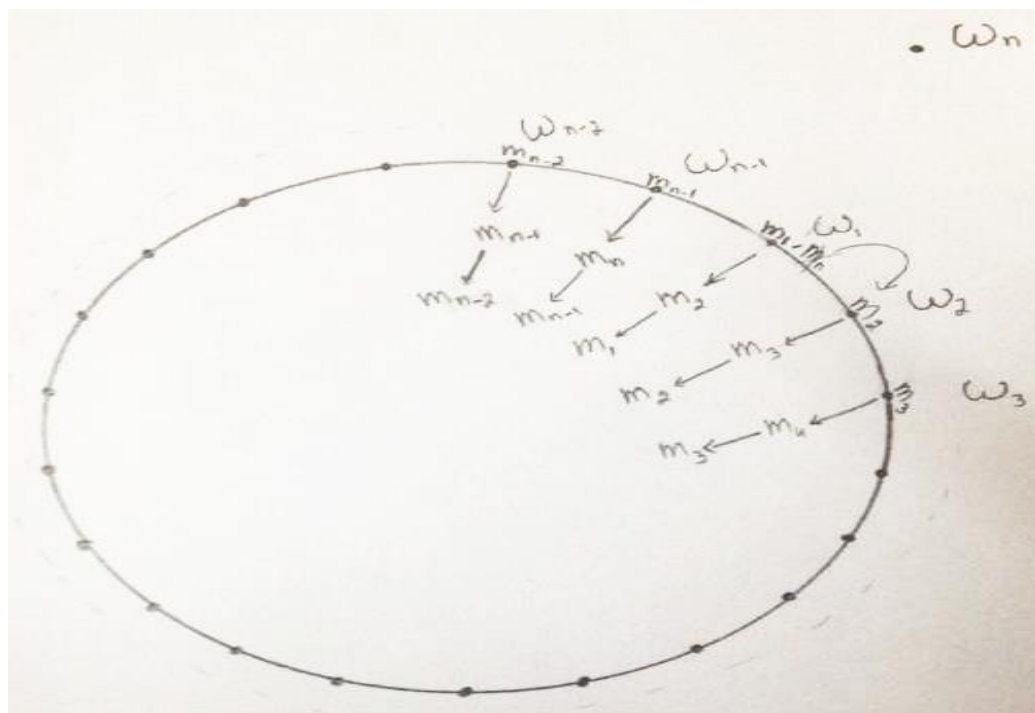
לצורך פשטות נציג את הרשימות בצורה הבאה:

נעמיד את הנשים מ- $w_1$  עד  $w_{n-1}$  במעגל ואת האישה  $w_n$  מחוץ למעגל, בצורה הבאה כמו שמתואר בצירור:



המספרים שבתוך המעגל מתחת לכל אישה  $w_i$ ,  $i = 1 \dots n - 1$ , הם שני גברים הכי מעדיפה לפי הרשימה כאשר הקרוב יותר  $m_{i+1}$  הוא העדיפות הראשונה שלה והשני  $m_i$  העדיפות השנייה. שאר העדיפויות של  $w_i$  וכל העדיפויות של  $w_n$  לא משנות את התוצאה.

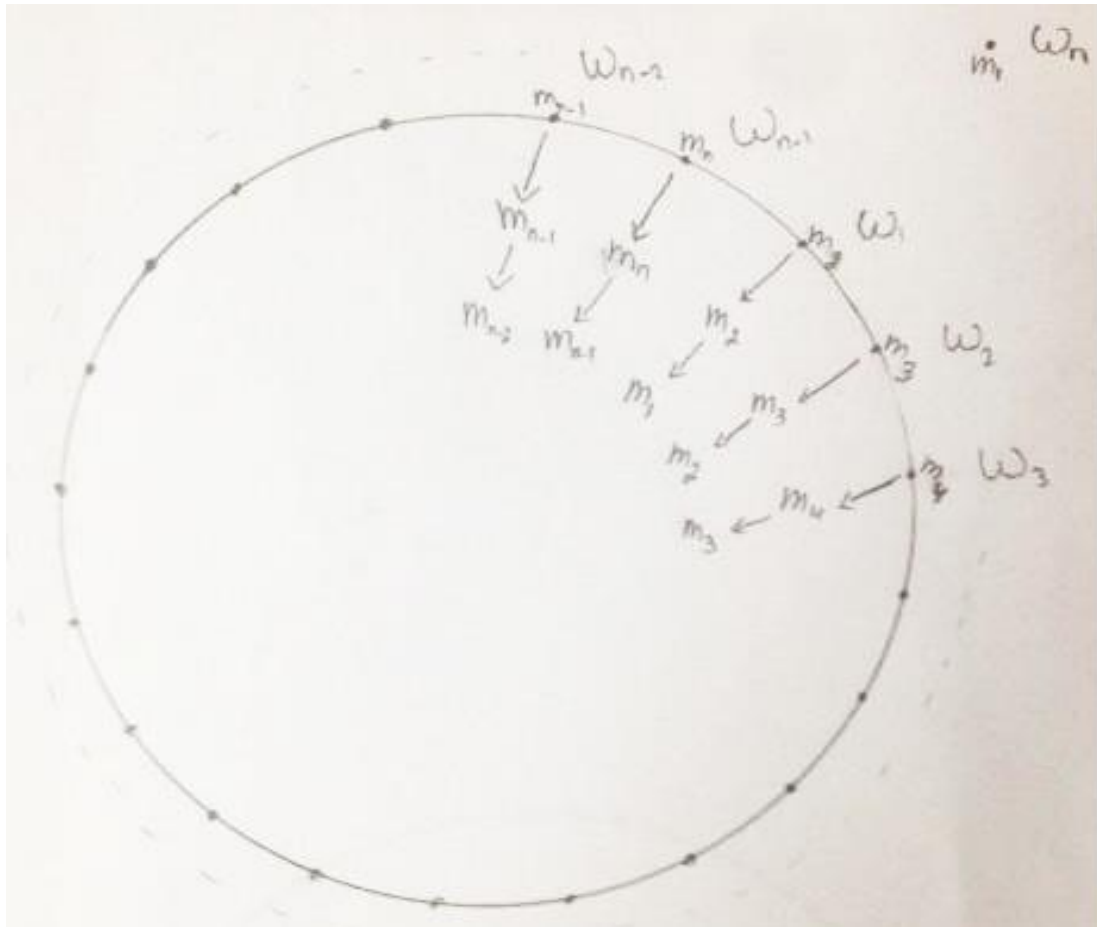
לפי הרשימות בשלב הראשון הגבר  $m_i$  מציע לאישה  $w_i$  כאשר  $i = 1 \dots n - 1$  והגבר  $m_n$  מציע לאישה  $w_1$  ואז האישה  $w_1$  דוחה את הגבר  $m_n$ , כלומר המעגל נראה כך:



הגבר  $m_n$  הולך עם כיוון השעון ומציע לנשים עד לאישה  $w_{n-1}$  שמקבלת אותו ואז היא דוחה את הגבר שהציע לה בשלב הראשון  $m_{n-1}$ .

ואז הגבר  $m_{n-1}$  הולך עם כיוון השעון ומציע לנשים עד לאישה  $w_{n-2}$  מקבלת אותו ודוחה את הגבר שהציע לה בשלב הראשון  $m_{n-2}$ .

וכך הלאה עם סדר יורד של האינדקס, עד שמגיעים לגבר  $m_1$ , הוא הולך עם כיוון השעון ומציע לנשים עד לאישה  $w_{n-1}$  שגם דוחה אותו ואז הוא מציע לאישה שמחוץ למעגל  $w_n$ .



מספר שלבים מקסימלי מתקבל כאשר כל גבר מציע למקסימום נשים מהרשימה שלו וכל הצעה תהי בשלב נפרד חוץ מההצעה הראשונה,

כמו שראינו בדוגמא, השארנו אישה פנויה כדי לא לסיים את התהליך עד שכל הגברים מציעים למקסימום נשים, כאשר בשלב הראשון  $n - 1$  גברים מציעים ביחד, אחר כך כל גבר מהם מציע ל- $n - 2$  נשים,

ובשלב האחרון גבר מציע לאישה שהשארנו אותה פנויה.

## הערה:

יתכן יותר משידוך יציב אחד.

## הסבר:

לפי האלגוריתם של גייל ושפלאי נוכל לקבל לפחות שני שידוכים יציבים: אחד כאשר הגברים מציעים שידוך לנשים והנשים בוחרות, והשני כאשר הנשים מציעות שידוך לגברים והגברים בוחרים. לכן נקבל יותר משידוך יציב אחד במקרים שבהם מקבלים שני שידוכים שונים זה מזה.

## דוגמאות למקרים בהם מקבלים יותר משני שידוכים יציבים:

### דוגמא 1 [2]:

בדוגמא הבאה שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 3 גברים והשנייה כוללת 3 נשים, ההעדפות של הגברים נתון ע"י המספר הראשון בכל תא, וההעדפות של הנשים נתון ע"י המספר השני.

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 1,3   | 2,2   | 3,1   |
| $m_2$ | 3,1   | 1,3   | 2,2   |
| $m_3$ | 2,2   | 3,1   | 1,3   |

### שידוך יציב ראשון מתקבל כאשר הגברים מציעים:

שלב ראשון :

כל גבר משלושתם מציע לאישה הראשונה לפי סדר ההעדפות שלו ואז נקבל:

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_2$$

$$f(m_3) = w_3$$

אלגוריתם הסתיים וקיבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוך ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

### שידוך יציב שני מתקבל כאשר הנשים מציעות:

שלב ראשון :

כל אישה משלוחתם מציעה לגבר הראשון לפי סדר ההעדפות שלה ואז נקבל:

$$f(w_1) = m_2$$

$$f(w_2) = m_3$$

$$f(w_3) = m_1$$

אלגוריתם הסתיים וקבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

### שידוך יציב שלישי:

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_3$$

$$f(m_3) = w_1$$

שידוך זה נותן שידוך יציב שונה משני השידוכים הקודמים.

### דוגמא 2 [1]:

בדוגמא הבאה יש שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 4 גברים והשנייה כוללת 4 נשים, ההעדפות של הגברים נתון ע"י המספר הראשון בכל תא, וההעדפות של הנשים נתון ע"י המספר השני.

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 1,2   | 2,1   | 3,3   | 4,3   |
| $m_2$ | 2,1   | 1,2   | 3,4   | 4,4   |
| $m_3$ | 3,3   | 4,3   | 1,2   | 2,1   |
| $m_4$ | 3,4   | 4,4   | 2,1   | 1,2   |

**שידוך יציב ראשון מתקבל כאשר הגברים מציעים:**

שלב ראשון :

כל גבר מציע לאישה הראשונה לפי סדר ההעדפות שלו ואז נקבל:

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_2$$

$$f(m_3) = w_3$$

$$f(m_4) = w_4$$

אלגוריתם הסתיים וקיבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

**שידוך יציב שני מתקבל כאשר הנשים מציעות:**

שלב ראשון :

כל אישה משלוחתם מציעה לגבר הראשון לפי סדר ההעדפות שלה ואז נקבל:

$$f(w_1) = m_2$$

$$f(w_2) = m_1$$

$$f(w_3) = m_4$$

$$f(w_4) = m_3$$

אלגוריתם הסתיים וקיבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

**שידוך יציב שלישי:**

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_3$$

$$f(m_4) = w_4$$

**שידוך יציב רביעי:**

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_2$$

$$f(m_3) = w_4$$

$$f(m_4) = w_3$$

**שני השידוכים 3 ו-4 נותנים שידוכים יציבים שונים משני השידוכים הראשונים.**

### **שאלה:**

כמה שידוכים יציבים יכול להיות לבעיית שידוך כלשהי?

שאלה מעניינת ואת התשובה נשאיר למחקרים עתידיים.

**דוגמא למקרה שבו אישה יכולה לגרום לכך שתשודך לגבר שהיא מעדיפה יותר על הגבר שתשודך אליו בשידוך  $A^m$ , ע"י הצגת סדר העדפות השונות מסדר ההעדפות האמתי שלה [1]:**

בדוגמא הבאה שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 3 גברים והשנייה כוללת 3 נשים, ההעדפות של הגברים נתון ע"י המספר הראשון בכל תא, וההעדפות של הנשים נתון ע"י המספר השני.

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 1,2   | 2,1   | 3,2   |
| $m_2$ | 1,3   | 3,3   | 2,1   |
| $m_3$ | 2,1   | 1,2   | 3,3   |

### **שלב 1:**

כל גבר משלושתם מציע לאישה הראשונה לפי סדר ההעדפות שלו ואז נקבל:

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_2$$

האישה  $w_1$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים  $m_1, m_2$ , ודוחה את הגבר  $m_2$ .

## שלב 2:

בשלב זה הגבר  $m_2$  מציע לאישה השניה בסדר העדפותיו כלומר לאישה  $w_3$ ,

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_3$$

$$f(m_3) = w_2$$

אלגוריתם הסתיים וקבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

**האישה  $w_1$  קיבלה את הגבר השני לפי סדר העדפותיה.**

נניח עכשיו כי הייתה נוהגת כאילו יחס ההעדפות שלה הוא:

|       | $w_1$       | $w_2$ | $w_3$ |
|-------|-------------|-------|-------|
| $m_1$ | 1, <u>3</u> | 2,1   | 3,2   |
| $m_2$ | 1, <u>2</u> | 3,3   | 2,1   |
| $m_3$ | 2, <u>1</u> | 1,2   | 3,3   |

## שלב 1:

כל גבר משלושתם מציע לאישה הראשונה לפי סדר ההעדפות שלו ואז נקבל:

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_2$$

האישה  $w_1$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים  $m_1, m_2$ , ודוחה את הגבר  $m_1$ .

## שלב 2:

בשלב זה הגבר  $m_1$  מציע לאישה השניה בסדר העדפותיו כלומר לאישה  $w_2$ ,

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_2$$

האישה  $w_2$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים  $m_1, m_3$ , ודוחה את הגבר  $m_3$ .

### שלב 3:

בשלב זה הגבר  $m_3$  מציע לאישה השנייה בסדר העדפותיו כלומר לאישה  $w_1$ ,

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_1$$

האישה  $w_1$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים  $m_2, m_3$ , ודוחה את הגבר  $m_2$ .

### שלב 4:

בשלב זה הגבר  $m_2$  מציע לאישה השנייה בסדר העדפותיו כלומר לאישה  $w_3$ ,

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_3$$

$$f(m_3) = w_1$$

אלגוריתם הסתיים וקבלנו שידוך כי עכשיו אף אישה לא נשארת ללא הצעת שידוכים ונעשה שידוך בין כל אישה וגבר.

**האישה  $w_1$  קיבלה את הגבר הראשון לפי סדר העדפותיה, כלומר שיפרה את מצבה ע"י שהתנהגה כאילו יחס ההעדפות שלה הוא שונה.**

**ונשים לב שהתנהגותה זו של  $w_1$  גרמה לשפר את מצבה של  $w_2$  וזה גרם לכך שכל הנשים מקבלות את הגבר הראשון לפי סדר העדפותיהן.**

### הערה:

5. מכון שבשידוכים שונים ישנם נשים וגברים שמשודכים לבני זוג שונים, אז אם נשווה בין כל שני שידוכים יציבים שונים, יהיו גברים ונשים שיעדיפו את השידוך הראשון ואחרים יעדיפו את השידוך השני.

## הגדרה 6, פתרון אופטימלי:

יהיו  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$  שידוכים יציבים שונים.

$A_k$  נקרא שידוך אופטימלי עבור הגברים כאשר  $1 \leq k \leq m$ , אם כל גבר המשוך ב- $A_i$  כאשר  $i \neq k$  מעדיף את האישה שהוא משוך אליה בשידוך  $A_k$  על הנשים שהוא משוך אליהן בשידוכים ה- $A_i$  האחרים.

## הערות:

6. נשים לב שבעיית השידוכים בעיה סימטרית לכן ניתן להגדיר גם פתרון אופטימלי לפי הנשים כלומר כל אישה המשוכת ב- $A_i$  כאשר  $i \neq k$  מעדיפה את הגבר שהיא משוכת אליו בשידוך  $A_k$  על הגברים שהיא משוכת אליהם בשידוכים ה- $A_i$  האחרים.

## משפט 2[2]:

אם קיים פתרון אופטימלי אז הוא יחיד.

## הוכחה [1]:

נניח בשלילה שישנם שני שידוכים יציבים אופטימליים, כאשר פתרון אופטימלי הוא הפתרון העדיף ביותר לכל הגברים משאר השידוכים היציבים. לכן, אחד הפתרונות שהנחנו שהם אופטימליים חייב להיות יותר טוב מהשני, ז"א חייב להתקיים: כל גבר מעדיף את האישה שהוא משוך אליה באחד השידוכים על פני האישה שהוא משוך אליה בשידוך השני.

לכן השידוך השני לא יהיה אופטימלי, וזו סתירה להנחה שלנו. לכן אם קיים שידוך יציב אופטימלי אז הוא יחיד.

## הגדרה 7:

יהיו שני שידוכים יציבים  $A_1$  ו-  $A_2$ .

אומרים ש-  $A_1$  פתרון עדיף לכל הגברים על פתרון  $A_2$  ונסמן:  $M: A_2 \leq A_1$ , כאשר כל גבר מעדיף את האישה שהוא משודך אליה בשידוך  $A_1$  על האישה שהוא משודך אליה בשידוך  $A_2$ .

ואומרים ש-  $A_2$  פתרון עדיף לכל הנשים על פתרון  $A_1$  ונסמן:  $W: A_1 \leq A_2$ , כאשר כל אישה מעדיפה את הגבר שהיא משודכת אליו בשידוך  $A_2$  על הגבר שמשודכת אליו בשידוך  $A_1$ .

## משפט 3[1]:

לכל שני שידוכים יציבים  $A_1$  ו-  $A_2$  מתקיים:

ש-  $A_1$  פתרון עדיף לכל הגברים על  $A_2$ ,  $(M: A_2 \leq A_1)$ , אם ורק אם  $A_2$  פתרון עדיף לכל הנשים על  $A_1$ ,  $(W: A_1 \leq A_2)$ .

## הוכחה [1]:

הוכחת כיוון ראשון:

נוכיח כי אם  $M: A_2 \leq A_1$  אזי  $W: A_1 \leq A_2$ .

נבחר אישה כלשהי  $w_1$  ונניח שהיא משודכת לגבר  $m_1$  בשידוך  $A_1$  ולגבר  $m_2$  בשידוך  $A_2$ .

נניח שבשידוך  $A_2$  גבר  $m_1$  משודך לאישה  $w_2$ .

מכיון ש-  $M: A_2 \leq A_1$ , אז גבר  $m_1$  מעדיף את  $w_1$  בת זוגו ב-  $A_1$ , על  $w_2$  בת זוגו ב-  $A_2$ . כלומר גבר  $m_1$  עם סדר העדפות הבאה:  $w_1 > w_2$ .

מכיון ש-  $A_2$  הוא שידוך יציב, לכן  $w_1$  מעדיפה את בן זוגה  $m_2$  בשידוך  $A_2$ , על  $m_1$ , בן זוגה בשידוך  $A_1$ . מכיון שזה נכון עבור כל אישה אזי  $W: A_1 \leq A_2$ .

הוכחת כיוון שני ע"י החלפת תפקידי הנשים והגברים.

#### משפט 4 [1]:

לכל שידוך יציב B מתקיים:

$$1. M: A^w \leq B \leq A^m$$

$$2. W: A^m \leq B \leq A^w$$

#### הוכחה [1]:

נתונים השידוכים: B שידוך יציב והשידוך  $A^w, A^m$ .

כדי שנוכיח את המשפט מספיק להוכיח כי לכל שידוך יציב B מתקיים:

$$M: B \leq A^m$$

כי אם מתקיים  $M: B \leq A^m$  אז לפי משפט 3 יתקיים  $W: A^m \leq B$ .

וע"י שינוי תפקידי הנשים והגברים נקבל:  $W: B \leq A^w$  ו-  $M: A^w \leq B$ .

עכשיו נוכיח שמתקיים  $M: B \leq A^m$ :

כדי להוכיח זאת נראה כי בשידוך  $A^m$  אף גבר אינו נדחה ע"י האישה שהוא משודך אליה בשידוך B.

כלומר כל גבר מעדיף את האישה שהוא משודך אליה ב-  $A^m$  על זו שמשודך אליה ב- B.

נוכיח את זה באינדוקציה על השלב k בשידוך  $A^m$ :

נתחיל בשלב הראשון כאשר  $k = 1$ :

נניח כי  $w_1$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים:  $m_1, m_2$ , ודוחה את הגבר  $m_1$ , כלומר יחס העדפות שלה הוא:  $m_1 < m_2$ .

אם  $w_1$  הייתה משודכת ל-  $m_1$  בשידוך B אז  $m_2$  מעדיף את  $w_1$  על האישה שהוא מותאם אליה ( $w_1$  היא העדיפות הראשונה שלו), ו-  $w_1$  מעדיפה את  $m_2$  על הגבר שהיא מותאמת אליו  $m_1$ . בסתירה לכך ש- B שידוך יציב.

לכן מתקיים: בשידוך B  $f(m_1) \neq w_1$

כלומר בשידוך B אף גבר לא יכול להיות משודך לאישה שדחתה אותו בשלב הראשון בשידוך  $A^m$ .

בשלב  $k > 1$ :

עכשיו נניח כי  $w_2$  קיבלה שתי הצעות שידוכים מהגברים:  $m_1, m_3$ , ודוחה את הגבר  $m_1$ , כלומר יחס העדפות שלה הוא:  $m_1 < m_3$ .

עכשיו מהנחת האינדוקציה:

$m_3$ , בשידוך  $A^m$ , ביקר בשלבים הקודמים אצל כל הנשים שנמצאות ברשימתו מעל  $w_2$  ונדחה על ידן.

לכן מהנחת האינדוקציה הנשים האלו לא משודכות אילו בשידוך  $B$ .

מכאן:  $m_3: f(m_3) < w_2$

ואם  $w_2$  הייתה משודכת ל-  $m_1$  בשידוך  $B$  אז  $m_3$  מעדיף את  $w_2$  על האישה שהוא מותאם אליה ( $m_3: f(m_3) \leq w_2$ ), ו-  $w_2$  מעדיפה את  $m_3$  על הגבר שהיא מותאמת אליו  $m_1$ . בסתירה לכך ש-  $B$  שידוך יציב.

לכן מתקיים: בשידוך  $B$   $f(m_1) \neq w_2$

כלומר בשידוך  $B$  אף גבר לא יכול להיות משודך לאישה שדחתה אותו בשלב  $k$  בשידוך  $A^m$ .

### משפט 5 [1]:

יהיו  $A_1$  ו-  $A_2$  שני שידוכים יציבים. אם נתאים לכל אישה  $w_i$  את הגבר שהיא מעדיפה מבין הגברים שהיא משודכת אליהם בשידוכים  $A_1$  ו-  $A_2$ , אז נקבל שידוך ונסמן אותו ב-  $A_{1+2}$ .

### הוכחה [1]:

נניח בשלילה ש-  $A_{1+2}$  אינו שידוך. כלומר, בתהליך שכל אישה בוחרת את הגבר העדיף בעיניה מבין המשודכים לה ב-  $A_1$  ו-  $A_2$  יש גבר הנבחר ע"י שתי נשים. נניח למשל ש-  $m_1$  נבחר ע"י  $w_1$  ו-  $w_2$ , כאשר בשידוך  $A_1$  משודך ל-  $w_1$  ובשידוך  $A_2$  משודך ל-  $w_2$ . בשידוך  $A_2$  האישה  $w_1$  משודכת לגבר  $m_2$ , ובשידוך  $A_1$  האישה  $w_2$  משודכת לגבר  $m_3$ .

מכיון ש-  $w_1$  ו-  $w_2$  בחרו ב-  $m_1$  נקבל:

שיחס העדפות של  $w_1 : m_2 > m_1$  ויחס ההעדפות של  $w_2 : m_1 > m_3$

אם  $m_1$  עם יחס ההעדפות:  $w_1 > w_2$

אזי מקבלים ש-  $A_2$  אינו שידוך יציב, כי בשידוך כזה  $m_1$  ו-  $w_1$  מעדיפים אחד את השנייה על פני בני זוגם.

אם  $m_1$  עם יחס ההעדפות:  $w_2 > w_1$

אזי מקבלים ש-  $A_1$  אינו שידוך יציב, כי בשידוך כזה  $m_1$  ו-  $w_2$  מעדיפים אחד את השנייה על פני בני זוגם.

וזו סתירה לנתון ש-  $A_1$  ו-  $A_2$  שני שידוכים יציבים. לכן  $A_{1+2}$  שידוך.

## משפט 6 [1]:

אם  $A_1$  ו- $A_2$  שני שידוכים יציבים, גם  $A_{1+2}$  שידוך יציב.

### הוכחה [1]:

נניח בשלילה כי  $A_{1+2}$  אינו שידוך יציב. אזי יש זוג  $m_1$  ו- $w_1$  שאינם משודכים ב- $A_{1+2}$  ומעדיפים אחד את השנייה על בני זוגם. נניח שמתקיים:

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_1$$

לכן סדר ההעדפות של  $w_1$ :  $m_1 > m_2$  (1),

וסדר ההעדפות של  $m_1$ :  $w_1 > w_2$ .

מכיון ש- $w_1$  משודכת ל- $m_2$  בשידוך  $A_{1+2}$  אז היא משודכת לו בשידוך  $A_1$  או בשידוך  $A_2$ .

עכשיו נניח שהיא משודכת לו בשידוך  $A_1$  ונניח שבשידוך  $A_2$  היא משודכת ל- $m_3$ .

נשים לב שסדר העדפות של  $w_1$ :  $m_2 > m_3$  (2).

מ- (1) ו- (2) נקבל שסדר ההעדפות של  $w_1$  עבור שלושת הגברים הוא:

$$m_1 > m_2 > m_3$$

מכיון ש- $A_1$  שידוך יציב אז מתקיים ש- $w_1$  ו- $m_1$  מותאמים לבני זוגם באופן יציב כך שלא מעדיפים אחד את השנייה על בני זוגם.

ומכיון ש- $w_1$  מעדיף את  $m_1$  על  $m_2$  נובע שגבר  $m_1$  מעדיף את המשודכת לו בשידוך  $A_1$  על פני  $w_1$ . אז לא ייתכן ש- $m_1$  משודך ל- $w_2$  בשידוך  $A_1$ , כי  $m_1$  מעדיף את  $w_1$  על  $w_2$ .

כמו כן, מכיון ש- $A_2$  שידוך יציב אז מתקיים ש- $w_1$  ו- $m_1$  מותאמים לבני זוגם באופן יציב כך שלא מעדיפים אחד את השנייה על בני זוגם.

ומכיון ש- $w_1$  מעדיף את  $m_1$  על  $m_3$  נובע שגבר  $m_1$  מעדיף את המשודכת לו בשידוך  $A_2$  על פני  $w_1$ . אז לא ייתכן ש- $m_1$  משודך ל- $w_2$  בשידוך  $A_2$ , כי  $m_1$  מעדיף את  $w_1$  על  $w_2$ .

כלומר  $w_2$  אינה משודכת ל- $m_1$  לא בשידוך  $A_1$  ולא בשידוך  $A_2$ . ולכן היא לא משודכת אליו בשידוך  $A_{1+2}$ . זו סתירה להנחה, אזי  $A_{1+2}$  שידוך יציב.

## הערה:

1. ברור שמתקיים:  $W: A_{1+2} \succcurlyeq A_1$  ו- $W: A_{1+2} \succcurlyeq A_2$

## פרק 2.

### שידוך ציבורי

נשים לב ששידוכים יציבים שבהם דנו עד כה הם שידוכים בין אנשים אגואיסטים כך שכל אדם מחפש את הכי טוב בשבילו, לכן חשבנו על סוג חדש של שידוכים שמתייחס לטובת כלל הציבור והגדרנו אותו כ"שידוך ציבורי" כאשר בודק את רמת השמחה אצל כלל הציבור.

כל החומר בפרק זה חדש.

### הגדרה 1:

בשידוך  $A$  בין שתי קבוצות, נשים וגברים וכל אחת בת  $n$  איברים.  
 $g_A(m_i)$  - הוא המיקום של האישה שמשודכת לגבר  $m_i$  לפי רשימת העדיפויות שלו.  
 $g_A(w_i)$  - הוא המיקום של הגבר שמשודך לאישה  $w_i$  לפי רשימת העדיפויות שלה.  
כאשר  $i = 1 \dots n$ .

### הגדרה 2:

נגדיר פונק'  $z(A) \in \mathbb{N}$  שנותנת מס' טבעי בצורה הבאה:  
כאשר  $A$  שידוך בין איברי שתי קבוצות, קבוצת גברים וקבוצת נשים,  
 $z(A)$  מוגדרת ע"י חיבור כל הציונים של הגברים וגם של הנשים,  
כלומר:  $z(A) = \sum_{i=1}^n g_A(m_i) + \sum_{i=1}^n g_A(w_i)$ .

### טענה:

לכל אוסף סדרי עדיפויות קיים שידוך ציבורי.

### הוכחה:

יש מספר סופי של שידוכים לכן חייב להיות שידוך  $A$  כך ש-  $z(A)$  מינימאלי.

### הגדרה 3:

נגדיר שידוך  $A_0$  "כשידוך ציבורי" אם מתקיים:  $z(A_0) \leq z(A)$   
לכל שידוך אחר  $A$ .

### שאלה 1:

האם שידוך ציבורי חייב להיות יציב?

**תשובה:** לא, שידוך ציבורי לא חייב להיות יציב.

### דוגמא נגדית:

בדוגמא הבאה שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 3 גברים והשנייה כוללת 3 נשים, ההעדפות של הגברים נתון ע"י המספר הראשון בכל תא, וההעדפות של הנשים נתון ע"י המספר השני.

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 2,3   | 1,2   | 3,3   |
| $m_2$ | 2,1   | 1,1   | 3,2   |
| $m_3$ | 2,2   | 3,3   | 1,1   |

השידוך הבא הוא שידוך יציב (נסמן ב-  $A_1$ ) שמתקבל ע"י האלגוריתם של גייל-שפלאי כאשר הגברים מציעים:

$$f(m_1) = w_1$$

$$f(m_2) = w_2$$

$$f(m_3) = w_3$$

נקבל אתו שידוך כאשר הנשים מציעות.

לפי שידוך  $A_1$  נקבל:

$$z(A_1) = \sum_{i=1}^3 g_{A_1}(m_i) + \sum_{i=1}^3 g_{A_1}(w_i) = 9$$

השידוך הבא הוא שידוך ציבורי (נסמן ב-  $A_2$ ) :

$$f(m_1) = w_2$$

$$f(m_2) = w_1$$

$$f(m_3) = w_3$$

לפי שידוך  $A_2$  נקבל:

$$z(A_2) = \sum_{i=1}^3 g_{A_1}(m_i) + \sum_{i=1}^3 g_{A_1}(w_i) = 8$$

נוכיח כי  $A_2$  שידוך ציבורי: נניח בשלילה כי  $A_3$  שידוך ציבורי כאשר:  $z(A_3) \leq 8$ ,  $A_2 \neq A_3$

כל תא עם סכום מספרים גדול שווה 5 לא יכול להיות כחלק מהשידוך הציבורי  $A_3$ , כי בשני התאים האחרים יהיה מינימום תאים מהסוג הזה (סכום המספרים בתא שווה 2), ושידוך כזה נותן:  $z(A_3) \geq 9$ .

לכן נשארו התאים הבאים שיכולים לתאר שידוך הציבורי  $A_3$ :

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 2,3   | 1,2   | 3,3   |
| $m_2$ | 2,1   | 1,1   | 3,2   |
| $m_3$ | 2,2   | 3,3   | 1,1   |

עכשיו לגבר  $m_1$  נשאר לשדך אותו לאישה  $w_2$ ,

לאחר מכן, לגבר  $m_2$  יישאר לשדך אותו לאישה  $w_1$ ,

ובסוף לגבר  $m_3$  ישודך לאישה  $w_3$ .

נקבל ש-  $A_2 = A_3$  בשלילה להנחה, לכן  $A_2$  שידוך ציבורי.

השידוך הציבורי לא יציב כי אישה  $w_2$  וגבר  $m_2$  אינם מותאמים  $f(m_2) \neq w_2$

1-  $m_2$  מעדיף את  $w_2$  על האיבר שהוא מותאם אליו  $w_1$ ,

1-  $w_2$  מעדיף את  $m_2$  על האיבר שהוא מותאם אליו  $m_1$ ,

לכן מסתבר ששידוך ציבורי לא חייב להיות יציב.

### שאלה:

האם יש שידוך  $A_1$  שמתקבל ע"י האלגוריתם של גייל ושפלי כך ש-  $A_1$  לא שידוך ציבורי?

**תשובה:** כן. דוגמא לשידוך כזה:

### דוגמא 1:

נתונות שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 4 גברים והשנייה כוללת 4 נשים, ההעדפות של הגברים נתון ע"י המספר הראשון בכל תא, וההעדפות של הנשים נתון ע"י המספר השני.

|       | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $m_1$ | 1,4   | 2,2   | 3,3   | 4,1   |
| $m_2$ | 4,1   | 1,4   | 2,2   | 3,3   |
| $m_3$ | 3,3   | 4,1   | 1,4   | 2,2   |
| $m_4$ | 2,2   | 3,3   | 4,1   | 1,4   |

**אחרי הפעלת האלגוריתם של גייל ושפלאי כאשר הגברים מציעים לנשים נקבל את השידוך הבא, נסמן אותו ב-  $A_1$ :**

$$g_{A_1}(w_1) = 4, \quad g_{A_1}(m_1) = 1 \ll f(m_1) = w_1$$

$$g_{A_1}(w_2) = 4, \quad g_{A_1}(m_2) = 1 \ll f(m_2) = w_2$$

$$g_{A_1}(w_3) = 4, \quad g_{A_1}(m_3) = 1 \ll f(m_3) = w_3$$

$$g_{A_1}(w_4) = 4, \quad g_{A_1}(m_4) = 1 \ll f(m_4) = w_4$$

$$z(A_1) = \sum_{i=1}^4 g_{A_1}(m_i) + \sum_{i=1}^4 g_{A_1}(w_i) = 20$$

אחרי הפעלת האלגוריתם של גייל ושפלאי כאשר הנשים מציעות לגברים נקבל  
שידוך ונסמן אותו ב-  $A_2$  :

$$g_{A_2}(w_1) = 4, \quad g_{A_2}(m_1) = 1 \ll f(m_1) = w_4$$

$$g_{A_2}(w_2) = 4, \quad g_{A_2}(m_2) = 1 \ll f(m_2) = w_1$$

$$g_{A_2}(w_3) = 4, \quad g_{A_2}(m_3) = 1 \ll f(m_3) = w_2$$

$$g_{A_2}(w_4) = 4, \quad g_{A_2}(m_4) = 1 \ll f(m_4) = w_1$$

$$z(A_2) = \sum_{i=1}^4 g_{A_2}(m_i) + \sum_{i=1}^4 g_{A_2}(w_i) = 20$$

ישנו שידוך ציבורי ויציב לא מתקבל ע"י האלגוריתם של גייל ושפלאי, נסמן אותו ב-  
 $A_3$  :

$$g_{A_3}(w_1) = 2, \quad g_{A_3}(m_1) = 2 \ll f(m_1) = w_2$$

$$g_{A_3}(w_2) = 2, \quad g_{A_3}(m_3) = 2 \ll f(m_2) = w_3$$

$$g_{A_3}(w_3) = 2, \quad g_{A_3}(m_2) = 2 \ll f(m_3) = w_4$$

$$g_{A_3}(w_4) = 2, \quad g_{A_3}(m_4) = 2 \ll f(m_4) = w_1$$

$$z(A_3) = \sum_{i=1}^4 g_{A_3}(m_i) + \sum_{i=1}^4 g_{A_3}(w_i) = 12$$

נוכיח  $A_3$  שידוך ציבורי: בכל תא הסכום הוא לפחות 4, לכן, מקבלים את המינימום  
כאשר בוחרים רק את התאים שבהם יש- 2,2

נוכיח  $A_3$  שידוך ציבורי: ב-  $A_3$ , כל גבר וכל אישה מקבלת/ת 2. כדי לשפר את זה, צריך  
להיות שגבר (או אישה) יקבל 1, ואז יהיה 4, לכן הבן (או הבת) זוג החדש/ה לא תרצה  
להחליף.

עקב החשיבה בסוג שידוך זה שאלנו כמה שאלות על חלק הצלחנו לענות ולהוכיח טענות וחלק השארנו לדיון ומחקרים עתידיים:

### שאלה 1:

מהם המינימום והמקסימום של  $z(A)$  כאשר  $A$  מתקבל ע"י האלגוריתם של גייל ושפלי? ברור שהמינימום שווה ל- $2n$  וזה מתקבל כאשר כל אישה וכל גבר מקבלים את העדיפות הראשונה שלהם. לכן  $z(A) \leq 2n$ .  
דוגמא שנותנת את המינימום של  $z(A)$ :  
כאשר ה-\* יות נותנות סידור כלשהו.

| סדר<br>עדיפות | $m_i$ |
|---------------|-------|
| 1             | $w_i$ |
| 2             | *     |
| .....         | *     |
| N             | *     |

| סדר<br>עדיפות | $w_i$ |
|---------------|-------|
| 1             | $m_i$ |
| 2             | *     |
| .....         | *     |
| N             | *     |

השידוכים שיתקבלו:  $f(m_i) = w_i$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$

$$z(A) = \sum_{i=1}^n g_A(m_i) + \sum_{i=1}^n g_A(w_i) = n + n = 2n$$

בהמשך לתשובה הטענה שלנו לגבי המקסימום של  $z(A)$  היא:

לכל שידוך יציב  $A$  בין גברים לנשים שמתקבל ע"י אלגוריתם של גייל ושפלאי נקבל:

$$z(A) \leq n(n + 1)$$

כאשר החסם העליון  $n(n + 1)$  של  $z(A)$  בלתי תלוי ברשימות האנשים.

### הוכחת הטענה:

### הגדרה 4, ביקור:

ביקור הוא מקרה שגבר מסויים מבקר אישה מסויימת .

יכול להיות כמה ביקורים בשלב אחד של האלגוריתם . ונסמן  $t_i$  זהו מספר הביקורים ש- $w_i$  מקבלת במהלך כל השלבים. (אז בהכרח מתקיים:  $t_i \leq n$ )

### הערה:

בכל ביקור שאישה מקבלת, היא יותר מרוצה או שמצבה לא משתנה כלומר הציון שלה משתפר או נשאר אותו ציון אך לא גדל, לכן בסוף הציון שלה צריך להיות מקסימום:  $n - (t_i - 1) = n + 1 - t_i$

(\*הביקור הראשון לא משפר את הציון שלה לכן במצב הגרוע ביותר תקבל  $n$ )

עכשיו נסמן ב-  $s_i$  מספר הביקורים של  $m_i$  ואז בסוף הציון שלו הוא  $s_i$ .

סך הכל ציונים של הגברים הוא:  $s_1 + s_2 + \dots + s_n$

וסך הכל מקסימום ציונים של הנשים הוא:

$$(n + 1 - t_1) + (n + 1 - t_2) + \dots + (n + 1 - t_n) = (n + 1)n - (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$$

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n \quad \text{אבל:}$$

לכן:

$$z(A) \leq s_1 + s_2 + \dots + s_n + (n + 1)n - (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = (n + 1)n$$

### שאלה:

האם  $(n + 1)n$  חסם עליון של כל השידוך יציב ללא תלות ברשימות?

ראינו שחסם זה הוא חסם לשידוכים שמתקבלים ע"י האלגוריתם של גייל-שפלי. ונשים לב שבדוגמא 2.1 השידוך  $A_3$  הוא שידוך יציב שאינו מתקבל ע"י האלגוריתם של גייל – שפלי והוא יותר טוב לציבור משני השידוכים שקבלנו ע"י האלגוריתם, אך לא הצלחנו למצוא שידוך יציב שאינו מתקבל ע"י גייל שפלאי שגדול מ  $(n + 1)n$ ,

לכן ניתן להשאיר את השאלה הנ"ל לדיונים ומחקרים עתידיים.

כמו כן , ניתן לחשוב על אלגוריתם שנותן שידוך ציבורי באופן כללי עבור כל בעיית שידוכים.

## פרק 3.

**שאלה:** מה קורא אם לקבוצה אחת אין אפשרות לבחור!?  
בעקבות השאלה הנ"ל הגדרנו בעיה חדשה, "בעיית הכלבים"

### הגדרה 1, בעיית הכלבים:

יהי שידוך בין שתי קבוצות  $P, D$  (הגדרה 2 פרק 1), כאשר  $P$  קבוצה ראשונה כוללת  $n$  אנשים וקבוצה  $D$  כוללת  $n$  כלבים.

סימון:  $f(p_i) = d_j$  ז"א שהכלב  $d_j$  מותאם לאיש  $p_i$  כאשר  $1 \leq i, j \leq n$ .

לכל איש יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה-  $n$  איברים בקבוצת הכלבים, ולכלבים אין אפשרות לבחור.

השידוך יהי יציב כאשר אין שני אנשים שרוצים להחליף כלבים, כלומר אין שני אנשים שכל אחד מעדיף את כלב השני ע"פ הכלב שלו.

### הגדרה 2:

בשידוך  $A$  בין שתי קבוצות, אנשים וכלבים וכל אחת בת  $n$  איברים.

$g_A(p_i)$  - הוא המיקום של הכלב שמשודכת לאיש  $p_i$  לפי רשימת העדיפויות שלו, כאשר  $i = 1 \dots n$ .

(לדוגמא אם איש  $p_k$  קיבל את הכלב  $d_l$  כאשר  $1 \leq k, l \leq n$ , והוא הכלב החמישי בסדר העדפותיו של האיש  $p_k$  אז  $g_A(p_k) = 5$ ).

### הגדרה 3:

נגדיר פונק'  $S(A) \in \mathbb{N}$  שנותנת מס' טבעי בצורה הבאה:

כאשר  $A$  שידוך בין איברי שתי קבוצות, קבוצת אנשים וקבוצת כלבים,

$S(A)$  מוגדרת ע"י חיבור כל הציונים של האנשים,

כלומר:  $S(A) = \sum_{i=1}^n g_A(p_i)$ .

### אלגוריתם ההחלפה של בעיית הכלבים:

האלגוריתם הזה מייצר שידוך יציב בין איברי קבוצת כלבים לקבוצת אנשים, כל אחת מהן בת  $n$  איברים, כאשר לכל איש בקבוצת האנשים יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה-  $n$  כלבים בקבוצה השנייה.

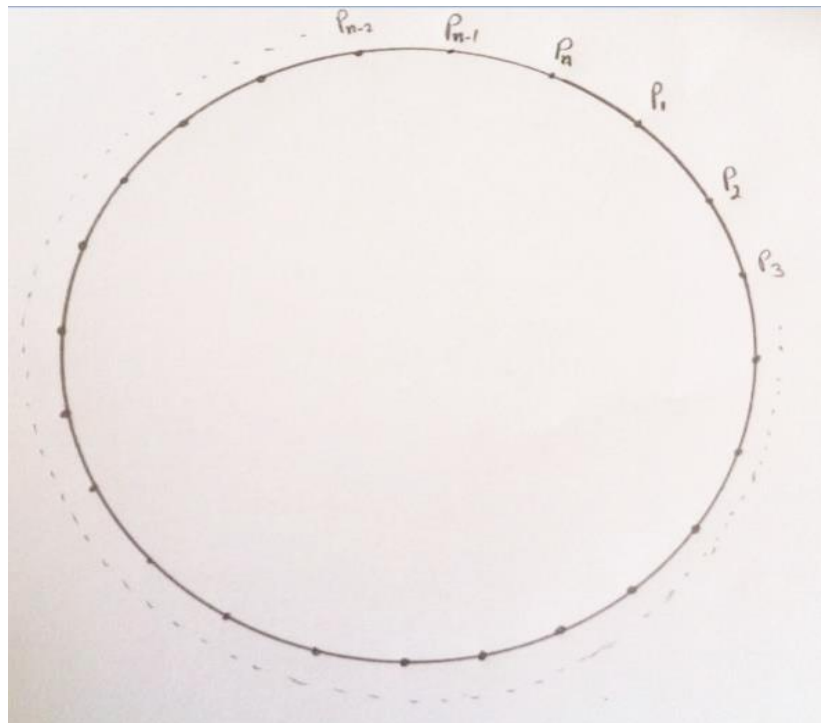
כך ש-  $i = 1 \dots n, p_i$  הם איברי קבוצת האנשים.

ו-  $j = 1 \dots n, d_j$  הם איברי קבוצת הכלבים.

### **תיאור האלגוריתם:**

כשלב ראשון נעשה התאמה אקראית כך שכל איש מקבל כלב.

נעמיד את ה-  $n$  אנשים במעגל כמו שמתואר בציור,



כל איש אחר השני בודק עם ה-  $n - 1$  אנשים האחרים אם יש להם כלב שהוא מעדיף על הכלב שהוא מחזיק, לדוגמא מתחילים עם  $p_1$  אחר כך  $p_2$  וכך הלאה עם כיוון השעון, אם כן, בודק איתם אם רוצים להחליף כלב איתו, אם כן מתבצעת החלפה. התהליך חוזר על עצמו ונמשך אלה אם כן מגיעים למצב שכל האנשים עושים בדיקת החלפה עם  $n-1$  אנשים האחרים ואין שני אנשים שרוצים להחליף כלב.

זה לא יכול להיות שהתהליך נמשך בלי סוף, כי כל פעם שיש החלפה, הציון  $S(A)$  יורד, והציון חייב להיות מספר שלם חיובי, לכן הוא לא יכול לרדת בלי סוף.

### מסקנות לגבי $S(A)$ :

1.  $n \leq S(A) \leq n^2$
2. כאשר  $S(A) = n$  אז נקבל את השידוך הכי טוב לכולם מבין כל שידוך אחר
3. כאשר  $S(A) = n^2$  אז נקבל את השידוך הכי גרוע לכולם מבין כל שידוך אחר, בשידוך זה כל אחד מקבל את הכלב האחרון בסדר העדפותיו. ובמקרה כזה בטוח יהיו החלופות.
4.  $S(A)$  יקטן או לא ישתנה אך לא יגדל.
5. ככל ש  $S(A)$  קטן אז יהיו אנשים מרוצים מהכלבים שקבלו יותר ממה שהיה להם קודם.

### הגדרה 4, שידוך ציבורי עבור בעיית הכלבים:

בבעיית הכלבים נגדיר שידוך  $A_0$  "כשידוך ציבורי" אם מתקיים:  $s(A_0) \leq s(A)$  לכל שידוך אחר  $A$ .

### טענה:

בכל בעיית שידוך כלבים קיים שידוך ציבורי.

### הוכחה:

יש מספר סופי של שידוכים לכן חייב להיות שידוך  $A$  כך ש- $S(A)$  מינימאלי.

### שאלה:

האם ניתן למצוא נוסחה  $h(n)$  כך שתמיד ניתן למצוא שידוך יציב  $A$  בין אנשים לכלבים כך ש-  $S(A) \leq h(n)$ ?

כדי לענות בחיוב לשאלה חשבנו על אלגוריתם שעבור פונקציה מתאימה  $h(n)$  יתקיים  $S(A) \leq h(n)$  :

### אלגוריתם משופר לבעיית הכלבים:

האלגוריתם הזה מייצר שידוך יציב בין איברי קבוצת כלבים לקבוצת אנשים, כל אחת מהן בת  $n$  איברים, כאשר לכל איש בקבוצת האנשים יש דרוג מלא של העדפותיו לגבי ה-  $n$  כלבים בקבוצה השנייה.

כך ש-  $i=1 \dots n$ ,  $p_i$  הם איברי קבוצת האנשים.

ו-  $j=1 \dots n$ ,  $d_j$  הם איברי קבוצת הכלבים.

### תיאור האלגוריתם:

שלב ראשון:

$p_1$  בוחר את הכלב הראשון ברשימת העדיפויות שלו והכלב שיבחר יקרא "תפוס",

$$g_A(p_1) = 1$$

שלב שני:

$p_2$  בוחר את הכלב הראשון ברשימת העדיפויות שלו אם הכלב תפוס ( $p_1$ ), אז יבחר

בכלב השני ברשימה שלו, כלומר  $g_A(p_2) = 2$  או  $g_A(p_2) = 1$  לכן  $g_A(p_2) \leq 2$ .

.....

שלב K:

$p_k$  בוחר את הכלב הכי אהוב עליו מבין הכלבים הפנויים.

.....

שלב n האחרון:

$p_n$  בוחר את הכלב האחרון הפנוי.

### הוכחה:

נוכיח שלכל  $j+1$  כאשר  $0 \leq j \leq n-1$  מתקיים:

$$g_A(p_{j+1}) \leq j+1$$

נכון של-  $p_{j+1}$  יש  $n-j$  כלבים פנויים, כי עד השלב שבו  $p_{j+1}$  בוחר האנשים  $p_1, \dots, p_j$

כבר בחרו כלבים, ובמצב הכי גרוע ה-  $j$  כלבים התפוסים הם האופציות הראשונות של

$p_{j+1}$ , ואז הוא עדיין יכול לבחור את האופציה  $j+1$  שלו, לכן

$$g_A(p_{j+1}) \leq j+1$$

אזי לפי ההגדרה של  $S(A)$  מתקיים:

$$S(A) = \sum_{j=0}^{n-1} g_A(p_{j+1}) = g_A(p_1) + \dots + g_A(p_n) \leq 1 + 2 + \dots + n$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

### נוביע המשפט הבא:

לכל האפשרויות לרשימות עדיפויות, הציון הציבורי קטן שווה  $\frac{1}{2}n(n+1)$ .

**הוכחה:**

יהי  $A_0$  שידוך ציבורי, הוכחנו שקיים שידוך  $A$  כך ש-  $S(A) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ ,

ולכן  $S(A_0) \leq S(A) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ .

דוגמא כללית לרשימות עדיפויות שנותנת  $S(A) = \frac{1}{2}n(n+1)$  כלומר המצב

הגרוע ביותר:

| סדר<br>עדיפות | $p_1$     | $p_2$     | $p_3$     | ..... | $p_{n-1}$ | $p_n$     |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|
| <b>1</b>      | $d_1$     | $d_1$     | $d_1$     | ..... | $d_1$     | $d_1$     |
| <b>2</b>      | $d_2$     | $d_2$     | $d_2$     | ..... | $d_2$     | $d_2$     |
| <b>3</b>      | $d_3$     | $d_3$     | $d_3$     | ..... | $d_3$     | $d_3$     |
| .....         | .....     | .....     | .....     | ..... | .....     | .....     |
| <b>n-1</b>    | $d_{n-1}$ | $d_{n-1}$ | $d_{n-1}$ | ..... | $d_{n-1}$ | $d_{n-1}$ |
| <b>n</b>      | $d_n$     | $d_n$     | $d_n$     | ..... | $d_n$     | $d_n$     |

**שלב i:**

$f(p_i) = d_i$  כלומר  $i = g_A(p_i)$  כאשר  $i=1, \dots, n$

לכן בסוף האלגוריתם נקבל:

$$S(A) = \sum_{i=1}^n g_A(p_i) = 1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

### שאלה:

האם האלגוריתם הזה נותן  $s(A)$  מינימאלי, כלומר האם נותן שידוך ציבורי ?

**תשובה:** לא בהכרח,

### דוגמא נגדית:

נתונות שתי קבוצות, קבוצה אחת כוללת 5 אנשים והשנייה כוללת 5 כלבים, ההעדפות של האנשים לגבי הכלבים נתון ע"י המספר שבכל תא.

| סדר<br>עדיפות | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $d_1$         | 1     | 2     | 3     | 2     | 1     |
| $d_2$         | 2     | 1     | 5     | 1     | 2     |
| $d_3$         | 3     | 5     | 4     | 3     | 3     |
| $d_4$         | 4     | 3     | 1     | 5     | 4     |
| $d_5$         | 5     | 4     | 2     | 4     | 5     |

אם מפעלים את האלגוריתם כאשר סדר הבחירה של האנשים הוא:

$p_1$  בוחר ראשון ,

$p_2$  בוחר שני ,

$p_3$  בוחר שלישי,

$p_4$  בוחר רביעי,

$p_5$  בוחר חמישי,

נקבל השידוך הבא ונסמן אותו ב-  $A_1$ :

$$g_{A_1}(p_1) = 1 \ll f(p_1) = d_1$$

$$g_{A_1}(p_2) = 1 \ll f(p_2) = d_2$$

$$g_{A_1}(p_3) = 1 \ll f(p_3) = d_4$$

$$g_{A_1}(p_4) = 3 \ll f(p_4) = d_3$$

$$g_{A_1}(p_5) = 5 \ll f(p_5) = d_5$$

$$S(A_1) = \sum_{i=1}^n g_{A_1}(p_i) = 11$$

אם מפעלים את האלגוריתם כאשר סדר הבחירה של האנשים הוא:

$p_5$  בוחר ראשון ,

$p_4$  בוחר שני ,

$p_3$  בוחר שלישי,

$p_2$  בוחר רביעי,

$p_1$  בוחר חמישי,

נקבל השידוך הבא ונסמן אותו ב-  $A_2$ :

$$g_{A_2}(p_1) = 1 \ll f(p_1) = d_1$$

$$g_{A_2}(p_2) = 1 \ll f(p_2) = d_2$$

$$g_{A_2}(p_3) = 1 \ll f(p_3) = d$$

$$g_{A_2}(p_4) = 1 \ll f(p_4) = d_2$$

$$g_{A_2}(p_5) = 1 \ll f(p_5) = d_1$$

$$S(A_2) = \sum_{i=1}^n g_{A_2}(p_i) = 5$$

**קיבלנו:**  $S(A_2) < S(A_1)$  לכן מסתבר שערכו של  $S(A)$  תלוי בסדר הבחירה של האנשים, ולכן האלגוריתם הזה לא בהכרח נותן  $s(A)$  מינימאלי, כלומר לא בהכרח נותן שידוך ציבורי .

### **משפט:**

כל שידוך ציבורי חייב להיות יציב.

### **הוכחה:**

נניח בשלילה שהיה שידוך ציבורי לא יציב, זאת אומרת שהשידוך עם ציון מינימאלי וישנם שני אנשים שרוצים להחליף כלב.

החלפת כלב משפרת את הציון של כל אחד ולכן זה משפר גם את הציון של השידוך, וזאת סתירה לכך שהשידוך הקודם היה ציבורי (עם ציון מינימאלי).

### **הערה:**

בבעיית הנשים והגברים שידוך ציבורי לא חייב להיות יציב (שאלה 1 פרק 2) וזה שונה מבעיית הכלבים כאשר שידוך ציבורי בבעיית הכלבים חייב להיות יציב לפי ההוכחה לעיל.

בחרתי בנושא סקרן אותי במיוחד כאשר ידעתי שאלגוריתם של בעיית השידוכים שהוצג ע"י גייל ושפלאי קיבל את פרס נובל לכלכלה לפני שנתיים ויתר על כן מיושם בהצלחה לא רק בבעיה שבא לפתור אותה, בעיית רופאים המתמחים ובתי חולים, אלא גם בהצלת חיי בני אדם אשר האלגוריתם ייושם בין תורמי איברים למטופלים שזקוקים להם.

משפט חשוב שמוכח בפרק הראשון הוא שהאלגוריתם של גייל ושפלאי נותן שידוך יציב, כמו כן בנוסף למשפטים הוספתי מקרים מיוחדים שנתקלתי בהם בתיאוריה. מספר השלבים המקסימאלי באלגוריתם של גייל ושפלאי ששווה ל- $n^2 - 2n + 2$ , זה דבר חשוב נוסף שהוספתי לפרק זה אחרי שקראתי מספר הוכחות מהתאוריה הצלחתי להוכיח את זה בדרך חדשה וברורה בנוסף למתן דוגמא כללית שנותנת מספר מקסימאלי זה.

אחרי שעסקתי בפרק הראשון בהצגת והסבר התיאוריה של בעיית השידוכים, חשבנו על הגדרה חדשה נקראת "שידוך ציבורי" העובד בניגוד לעיקרון האגואיסטיות שנותן שידוך יציב בהפעלת האלגוריתם של גייל ושפלאי. שידוך זה בודק את רמת השמחה המקסימלית של אברי שתי הקבוצות שמשודכות אחת לשנייה. בפרק הזה הגדרנו כלי חדש "ציון" כדי למדוד איכות של שידוך, בנוסף לכך הצלחנו להוכיח מספר טענות מעניינות מהם: לכל שידוך יציב  $A$  בין גברים לנשים שמתקבל ע"י אלגוריתם של גייל ושפלאי  $n(n + 1)$  הוא החסם העליון של  $z(A)$ .

ובפרק האחרון של הפרויקט הצגתי בעיית שידוך חדשה ששונה מהבעיה הקודמת, בבעיה זו רק קבוצה אחת מקבלת החלטות כלומר עם רשימת עדיפויות, לדוגמא ההתאמה בין קבוצת אנשים לקבוצת כלבים שהצגתי בפרק, ודוגמא נוספת לשידוך כזה היא ההתאמה בין שוטרים לניידות.

גם בפרק זה הגדרנו את הכלי "ציון" אבל עם שינוי שמתאים למדידת איכות של שידוך בבעיית הכלבים. ואחד המשפטים שקבלנו אחרי הוכחת מספר טענות הוא: בכל רשימות עדיפויות, הציון הציבורי קטן שווה  $h(n) = \frac{1}{2}n(n + 1)$ , פונקציה מעניינת שתלויה ב- $n$ .

## ביבליוגרפיה:

---

[1] ספר תורת המשחקים, שמואל זמיר, מיכאל משלר, אילון סולן, ירושלים: מאגנס, 2008

[2] **College Admissions and the Stability of Marriage.** D. Gale; L. S Shapley.

The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 1 (Jan., 1962), 9-15

[3] *The Stable Marriage Problem, Gusfield and Irving*