



המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

חישוב מקורב של שיווי משקל נאש

נשאת איברהים

Approximate Computation of Nash Equilibrium

Nashat Ibraheem

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

חישוב מקורב של שיווי משקל נאש

נשאת איברהים

Approximate Computation of Nash Equilibrium

Nashat Ibraheem

Advisor:

Dr. Ahuva Mu'alem

מנחה:

ד"ר אהובה מועלם

Karmiel

2014

כרמיאל

תוכן עניינים

4	חלק ראשון.....
4	1.1 הקדמה.....
4	1.1.1 מהי תורת המשחקים.....
4	1.1.2 התפתחות תורת המשחקים.....
4	1.1.3 תורת המשחקים בישראל.....
5	1.2 תורת המשחקים – מושגים בסיסיים.....
5	1.2.1 סוגי משחקים.....
5	1.2.2 משחק בצורה אסטרטגית (נורמלית) (Game in strategic (normal) form).....
5	1.2.3 משחק סכום אפס.....
5	1.2.4 רמת הבטחון וערך המינימקס.....
6	1.2.5 אסטרטגיה מעורבת.....
6	1.2.6 שווי משקל נאש (Nash Equilibrium), תגובה טובה ביותר (Best Reply) וערך המשחק.....
7	1.2.7 אסטרטגיה נשלטת חזק (strictly dominated strategy).....
8	1.2.8 שיווי משקל מתואם.....
9	1.3 דוגמאות למשחקים.....
9	1.3.1 משחק צ'יקן.....
9	1.3.2 משחק עם שלושה שחקנים.....
10	1.3.3 דילמת האסיר.....
10	1.3.4 מלחמת המינים.....
11	1.4 משפטים עם הוכחות.....
11	1.4.1 משפט נקודת השבת של בראוור עם הוכחה.....
14	1.4.2 משפט נאש (1951, 1950b, Nash) והוכחה.....
18	חלק שני.....
18	2.1 סיבוכיות חישוב שיווי משקל נאש.....
19	2.2 הקדמה למאמר.....
19	2.3 סימונים והגדרות.....
20	2.4 תוצאה מרכזית.....
25	2.5 קירוב תועלת של שיווי משקל נאש עם k קבוע.....
26	2.6 דרגה נמוכה מניבה שיווי משקל עם תומך קטן.....
27	2.7 תוצאות סופיות.....
28	חלק שלישי.....
28	3.1 מימוש אלגוריתם כוח גס למציאת אסטרטגיות ϵ -שיווי משקל נאש.....
35	3.2 סימולציה לחישוב חסם ל- k של משפט 2.1.....
37	ביבליוגרפיה.....

חלק ראשון

1.1 הקדמה

1.1.1 מהי תורת המשחקים

תורת המשחקים היא ענף של המתמטיקה והכלכלה המנתח מצבי עימות או שיתוף פעולה בין מקבלי החלטות (שחקנים) בעלי רצונות שונים. למשל:

- המצבים המתעוררים במשחקי לוח שונים, בהם כל אחד מהשחקנים רוצה לנצח
- בפעילות כלכלית, בה כל אחד מהעוסקים שואף להגיע לרווח מקסימלי.

מצבים כאלו מכונים משחקים, והמשתתפים בהם – שחקנים. חקירה של משחק מורכב מתאפשרת על ידי הפשטתו לאחד מכמה מודלים כלליים, הניתנים לניתוח מתמטי. המטרה היא "לפתור" את המשחק, כלומר, לזהות בו את דרכי הפעולה הצפויות של השחקנים או להצביע על דרכי פעולה מומלצות לשחקנים בודדים או לקבוצות של שחקנים. לניבוי נכון של התנהגות השחקנים עשויה להיות משמעות במציאות, אך נושא זה נתון לביקורת ומחלוקת רבה. לדעתם של תומכי הניבוי, ניתן להסיק מהמודלים כי בחירה נבונה של כללי הצבעה, צריכה להביא בחשבון את האפשרות של הצבעה טקטית (אסטרטגית), ותכנון של תשתית הכבישים צריך להביא בחשבון את בחירות המסלול של הנהגים בשעות העומס.

1.1.2 התפתחות תורת המשחקים

- מאמר של המתמטיקאי הגרמני ארנסט צרמלו שפורסם בשנת 1913 ומאמרים של המתמטיקאי הצרפתי אמיל בורל מהשנים 1921–1927 הם מבשריה של תורת המשחקים. מאמרים אלו מתייחסים לדוגמאות של שחמט ופוקר, אך עיקר עניינם הוא שאלות כלליות יותר, עקרוניות, העולות ממשחקים אלו.
- ראשיתה של תורת המשחקים כתחום עצמאי היא ספרם של ג'ון פון נוימן ואוסקר מורגנשטרן, "תורת המשחקים וההתנהגות הכלכלית", (Theory of Games and Economic Behavior) שיצא לאור בשנת 1944.
- בשנים 1950–1953 פרסם ג'ון נאש ארבעה מאמרים העוסקים במשחקים שיתופיים ולא שיתופיים. בין השאר הוכיח קיומו של שיווי משקל במשחקים לא שיתופיים, הקרוי כיום על שמו, שיווי משקל נאש. עבודתו של נאש הביאה לזכייתו בפרס נובל לכלכלה בשנת 1994.
- בעקבות עבודתו של נאש הציגו מריל פלאד ומלווין דרשר מ"מכון ראנד", בשנת 1950, את הבעיה הידועה בשם דילמת האסיר.
- שיטות ומושגים מתורת המשחקים תופסים מקום של כבוד בענפי הכלכלה השונים ובמנהל עסקים ומשמשים גם במדעי חברה אחרים, כמו מדע המדינה ופסיכולוגיה, וכן במשפטים.
- תורת המשחקים משמשת גם בענפי ביולוגיה שונים, בעיקר בחקר התנהגות ואסטרטגיות אבולוציוניות של יצורים חיים.
- בשנים האחרונות גובר העניין בתורת המשחקים במדעי המחשב. התפתחות זו קשורה לחשיבותם הגוברת של רשתות מחשבים, ובמיוחד רשת האינטרנט.

1.1.3 תורת המשחקים בישראל

בישראל מתקיים מחקר ענף בתורת המשחקים, בעיקר במסגרת המחלקות לכלכלה ולמתמטיקה באוניברסיטאות השונות. החוקרים הבולטים בתורת המשחקים בישראל הם ישראל אומן ומנחם יערי מן האוניברסיטה העברית ואריאל רובינשטיין מאוניברסיטת תל אביב. כל אחד מהם זכה בפרס ישראל על תרומתו לתחום זה, וישראל אומן אף זכה בפרס נובל לכלכלה לשנת 2005. חוקרים נוספים בתחום זה הם צחי גלבוע, עדי דקל, יאיר טאומן, אהוד לרר, אילון סולן, דב סמט, עדי פאוזנר, דוד שמידלר ורן שפיגלר מאוניברסיטת תל אביב, אלחנן בן פורת, סרג'יו הרט, אייל וינטר, שמואל זמיר, מיכאל משלר, אברהם נוימן, בצלאל פלג ומוטי פרי מאוניברסיטה העברית, משה טננהולץ, דב מונדרר ורן סמורודינסקי מהטכניון, יגאל מילכטייך מאוניברסיטת בר-אילן, ואורי חיימנקו ועזרא עיני מאוניברסיטת בן-גוריון.

1.2 תורת המשחקים – מושגים בסיסיים

1.2.1 סוגי משחקים

1. תורת המשחקים השיתופיים: עוסקת במשחקים בהם השחקנים יכולים לחתום על הסכמים מחייבים.
2. תורת המשחקים הלא שיתופיים: עוסקת במשחקים בהם השחקנים לא יכולים לחתום על הסכמים מחייבים.

1.2.2 משחק בצורה אסטרטגית (נורמלית) (Game in strategic (normal) form)

הגדרה 1.1: **משחק בצורה אסטרטגית** הוא שלשה סדורה $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ כך ש-:

1. $N = \{1, \dots, n\}$ קבוצה סופית, לא ריקה של שחקנים.
2. לכל שחקן i יש אוסף לא ריק של אסטרטגיות, שמסומן ב- S_i (לא בהכרח קבוצה סופית).
3. נסמן ב- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ את כל וקטורי האסטרטגיות.
4. נסמן ב- $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ את כל וקטורי האסטרטגיות למעט קבוצה i , כלומר כל וקטור אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ הוא מהצורה $(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$.

לכל שחקן $i: S \rightarrow \mathbb{R}, i \in N$ היא פונקציה המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $s = (s_i)_{i \in N}$ תשלום (או תועלת) לשחקן i .

- משחק שבו קבוצות האסטרטגיות של כל השחקנים סופיות ייקרא **משחק סופי**.
- העובדה ש- u_i הינה פונקציה של וקטור אסטרטגיות s (ולא של האסטרטגיה s_i של שחקן i בלבד) לכן התועלת עבור כל שחקן תלויה לא רק באסטרטגיה שלו אלא באסטרטגיות של כל השחקנים.
- נציג את משחק בצורה אסטרטגית בעזרת מטריצה n -מימדית ובכל תא במטריצה מופיע וקטור עם n קואורדינטות, שהוא וקטור התועלות ל- n השחקנים.
- משחק נקרא חד-שלבי אם הוא משוחק פעם אחת בלבד, אחרת נקרא רב-שלבי.
- משחק שבו שחקן יודע את כל הפרמטרים של המשחק (אסטרטגיות ותועלות השחקנים) נקרא משחק עם מידע מלא, אחרת הוא נקרא משחק עם מידע לא מלא.

דוגמא 1.1: משחק אבן, נייר ומספריים

במשחק זה כל אחד משני שחקנים בוחר מהלך אחד מתוך שלוש אפשרויות: אבן, נייר או מספריים. הבחירה נעשית בו זמנית, ויש יחס שליטה מעגלי בין אפשרויות: האבן שוברת את המספריים שגוזרים את הנייר שעוטף את האבן. אם נסמן ניצחון לשחקן כתשלום 1, הפסד כתשלום -1, ותיקו כתשלום 0, נקבל את המשחק בצורה אסטרטגית הבא:

	Rock	Paper	Scissors
Rock	0,0	-1,1	1,-1
Paper	1,-1	0,0	-1,1
Scissors	-1,1	1,-1	0,0

1.2.3 משחק סכום אפס

הגדרה 1.2: משחק עם שני שחקנים, $G(\{1,2\}, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ נקרא **משחק סכום אפס** אם לכל וקטור של אסטרטגיות $s = (s_1, s_2)$ מתקיים $u_1(s) + u_2(s) = 0$. משחקי סכום אפס הם תחרותיים בצורה קיצונית: כל רווח של אחד השחקנים גורר הפסד באותה הרמה של השחקן האחר. דוגמא 1 היא משחק סכום אפס.

1.2.4 רמת הבטחון וערך המינימקס

הגדרה 1.3: נתון משחק $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$. **רמת הבטחון של שחקן i מהאסטרטגיה s_i** שנסמנה $v_i(s_i)$ היא התועלת המינימלית האפשרית לשחקן i כאשר הוא משתמש באסטרטגיה הזאת. כלומר:

$$v_i(s_i) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

הגדרה 1.4: **רמת הבטחון של שחקן i במשחק G** היא רמת הביטחון הגבוהה ביותר אותה הוא יכול להשיג היא מסומנת ב v_i :

$$v_i = \max_{s_i \in S_i} v_i(s_i) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$$

אסטרטגיה שמבטיחה את רמת הביטחון נקראת אסטרטגית רמת בטחון ומקיימת:

$$v_i = v_i(s_i)$$

הגדרה 1.5: **ערך המינמקס של שחקן i** הוא $\min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$:

1.2.5 אסטרטגיה מעורבת

הגדרה 1.6: תהי A קבוצה סופית. נסמן ב- $\Delta(A)$ את קבוצת כל וקטורי ההסתברות (ההתפלגות) על A , כלומר:

$$\Delta(A) := \left\{ p: A \rightarrow [0,1] : \sum_{a \in A} p(a) = 1 \right\}$$

הגדרה 1.7: יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית שבו קבוצת האסטרטגיות של השחקנים סופית. **אסטרטגיה מעורבת** (*mixed strategy*) של שחקן i היא התפלגות על קבוצת האסטרטגיות S_i שלו. נסמן את קבוצת האסטרטגיות המעורבות של שחקן i ב- $\Sigma_i = \Delta(S_i)$.
לכן אסטרטגיה מעורבת של שחקן i היא וקטור הסתברויות על S_i : $\sigma_i = (\sigma_i(s_i))_{s_i \in S_i}$ כאשר $\sigma_i(s_i)$ היא ההסתברות לשחק את האסטרטגיה s_i במשחק המקורי.

הגדרה 1.8: יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית שבו לכל $i \in N$ קבוצת האסטרטגיות הטהורות S_i אינה ריקה והיא סופית, ופונקצית התשלומים $(u_i)_{i=1}^n$ חסומות. ידוע לנו ש- $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ היא קבוצת האסטרטגיות הטהורות. **ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות** (*mixed extension*) הוא המשחק $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N})$ שבו קבוצת האסטרטגיות של שחקן i היא $\Sigma_i = \Delta(S_i)$ ופונקצית התשלומים לשחקן i היא הפונקציה $U_i: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ שמתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ את התשלום:
$$U_i(\sigma) = E_\sigma[u_i(\sigma)] = \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in S} u_i(s_1, \dots, s_n) \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \dots \sigma_n(s_n)$$

- אפשר להסתכל על אסטרטגיה טהורה כאסטרטגיה מעורבת שבה הפעולה שנבחרה תקבל הסתברות 1, כלומר אם שחקן יבחר אסטרטגיה טהורה s_i אז זה שקול לבחירת אסטרטגיה מעורבת שבה ההסתברות לבחור s_i היא 1 וכל שאר האסטרטגיות עם הסתברות אפס.

1.2.6 שווי משקל נאש (Nash Equilibrium), תגובה טובה ביותר (Best Reply) וערך המשחק

הגדרה 1.9: וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא **שווי משקל נאש** אם לכל שחקן i ולכל אסטרטגיה s_i של שחקן i מתקיים: $u_i(s_i^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$. וקטור התשלומים $u(s^*)$ נקרא תשלום שיווי המשקל.

- שווי משקל נאש הוא חוזה שמחייב את עצמו במובן שאם השחקן יודע שכל האחרים ישחקו אותו, אז הבחירה הכי טובה של אותו שחקן היא נקודת שווי המשקל.
- בכל משחק יתכן שאין בכלל שיווי משקל כזה, ויתכן שיש שיווי משקל אחד או מספר שיווי משקל.
- אם במשחק נבחרות אסטרטגיות טהורות אז שיווי המשקל נקרא (Pure Nash Equilibrium).

הגדרה 1.10: יהי s_{-i}^* וקטור אסטרטגיות של השחקנים ללא i . אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **התגובה הטובה ביותר** ל- s_{-i}^* אם לכל אסטרטגיה t_i של שחקן i מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq u_i(t_i, s_{-i}^*)$$

 וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ נקרא שיווי משקל נאש אם לכל שחקן i האסטרטגיה s_i^* היא התשובה טובה ביותר ל- s_{-i}^* .

הגדרה 1.11: יהי G משחק שני שחקנים סכום אפס נאמר של- G יש ערך אם קיים בו שיווי משקל, במקרה זה **הערך של המשחק** מסומן v והוא מוגדר כרמת הבטחון של שחקן 1- v_1 .

הגדרה 1.12: יהי G משחק בצורה אסטרטגית, ו- Γ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. כל שיווי משקל של Γ נקרא **שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות של G** , אם G הינו משחק שני שחקנים סכום אפס, ול- Γ יש ערך v אזי v נקרא **הערך של G באסטרטגיות מעורבות**.

1.2.7 אסטרטגיה נשלטת חזק (strictly dominated strategy)

הגדרה 1.13: אסטרטגיה s_i של שחקן i נקראת **נשלטת חזק** (strictly dominated) אם קיימת אסטרטגיה t_i של שחקן i כך שלכל וקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$$

 במקרה כזה נאמר ש- s_i **נשלטת חזק** ע"י t_i , או ש- t_i **שולטת חזק** על s_i .

דוגמא 1.2:

נתבונן במשחק שני השחקנים הבא, שבו שחקן I בוחר שורה ושחקן II בוחר עמודה:

	L	M	R
T	1,0	1,2	0,1
B	0,3	0,1	2,0

רואים בטבלה שהאסטרטגיה R נשלטת חזק ע"י האסטרטגיה M. לכן סביר להניח שאם שחקן II הינו רציונלי הוא לא ישתמש באסטרטגיה R.

הנחות:

הנחה 1: שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

הנחה 2: כל השחקנים במשחק רציונלים.

הנחה 3: כל שחקן יודע שכל השחקנים הם רציונלים.

תחת שלוש ההנחות האלה ניתן לבצע "סילוק אסטרטגיות נשלטות חזק", כלומר אם יודעים שאסטרטגיה R היא נשלטת חזק אז ניתן לסלק את העמודה שלה ונקבל:

	L	M
T	1,0	1,2
B	0,3	0,1

וגם יודעים שעבור שחקן II האסטרטגיה B נשלטת חזק ע"י האסטרטגיה T ולכן ניתן גם לסלק אותה ולקבל:

	L	M
T	1,0	1,2

ובנוסף עבור שחקן I האסטרטגיה L נשלטת חזק ע"י האסטרטגיה M ולאחר סילוקה נקבל תוצאה אחת- (1, 2) ואפשר לראות בה כפתרון של המשחק והיא נקודת שיווי משקל נאש.

1.2.8 שיווי משקל מתואם

בתורת המשחקים, שיווי משקל מתואם, הוא הכללה של שיווי משקל נאש. בדומה לשיווי משקל נאש, שיווי משקל מתואם הוא מצב שבו שום משתתף אינו יכול לשפר את מצבו בשינוי חד-צדדי של פעולתו בלבד. אולם להבדיל משיווי משקל נאש, כאן מניחים כי לפני שהמשתתפים מחליטים על פעולותיהם הם נחשפים למידע מסוים. מידע זה יכול להיות משותף לכולם ("מידע פומבי"), שונה ממשותף למשתתף ("מידע פרטי") או שילוב שלהם. נוסף על כך, מידע זה אינו משפיע ישירות על תוצאות המשחק - ובכל זאת הוא עשוי להיות מובא בחשבון ולהשפיע על החלטות המשתתפים. ניתן גם לדמות מצב שרק חלק מהשחקנים מקבלים עצה או ששחקנים שונים נחשפים לאותות שונים, כלומר המידע הנוסף משותף רק לחלק מהשחקנים. שיווי משקל מתואם מהווה התפלגות על קבוצת ווקטורי אסטרטגיות, העומדים לפני שחקנים במשחק המתואר בצורה אסטרטגית, המקיימת את התנאי הבא - תוחלת התועלת לכל שחקן הבוחר לנקוט בתכסיס שמתווה לו תוצאה של הגרלה, גדולה לפחות כמו תוחלת התועלת עבור כל בחירה אחרת בה יכול לנקוט השחקן, בהינתן שכל שאר השחקנים מצייתים לתכסיס שהוגרל להם (מאותו שיקול).

ניתן להתייחס להתפלגות כאל אות, או עצה חיצונית לשחקנים. שיווי משקל נוצר כאשר כל השחקנים מאמינים כי עדיף להם לקבל את העצה או לפעול בהתאם למה שמרמז עבורם האות משיקולי תועלת. כמו כן, העצה אינה חלק מן המשחק המקורי, ואינה מחייבת אף שחקן בפועל. במובן הזה, שיווי משקל מתואם הוא מצב בו שחקני המשחק יצייתו מרצונם לגורם בלתי תלוי ומוסכם מראש, בדמות עצות, תוך הבנה כי התנהגות כזאת עדיפה להם מבלי צורך ליצור חוזה מחייב. ניתן גם לדמות מצב שלא כל השחקנים נחשפו לאות או שתתי קבוצות שונות של שחקנים לאותות שונים.

הגדרה 1.14 : יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית. עבור כל ווקטור S_i בגודל n נגדיר ווקטור S_{-i} בגודל $n - 1$, הזהה ל S_i , פרט לכך שאינו מכיל את התא ה- i שלו.

תהי p התפלגות על קבוצת ווקטורי האסטרטגיות S , אזי p מהווה **שיווי משקל מתואם** אם לכל שחקן $i \in N$ מתקיים:

$$\forall s_i, s'_i \in S_i \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_i, s_{-i}) u_i(s'_i, s_{-i})$$

במילים אחרות, p היא שיווי משקל מתואם אם אף שחקן לא יכול לשפר את תוחלת התשלומים שלו ע"י שינוי באסטרטגיה שלו.

דוגמא 1.3:

נתבונן במשחק הבא (גרסה אחרת של משחק מלחמת המינים):

	Football	Opera
Opera	0,0	2,1
Football	1,2	0,0

שחקן אחד במשחק מעדיף ללכת למשחק כדורגל, בעוד השחקן השני מעדיף ללכת לראות אופרה. כל אחד מהשחקנים מעדיף מצב בו יעסוק בפעילות שהוא לא אוהב ביחד עם השני, מאשר מצב של אי-הסכמה, בו כל שחקן יישאר לבד.

למשחק ישנם שלושה שיווי משקל נאש, $(Football, Football)$, $(Opera, Opera)$ ושיווי משקל מעורב בו כל שחקן הולך לאן שהוא מעדיף בסיכוי $2/3$ לאן שהשני מעדיף $1/3$, בהם לאף אחד מהשחקנים לא משתלם להיות היחיד המשנה את בחירתו.

ניתן ליצור שיווי משקל מתואם במשחק הנ"ל על ידי הגרלה - שני השחקנים יטילו מטבע הוגן. ייקבע מראש כי אם תוצאת ההטלה היא פלי, שני השחקנים ילכו לאופרה, ואם התוצאה עץ, ילכו למשחק הכדורגל. תוחלת התשלומים של כל שחקן, במקרה זה, היא $1.5 = 0.5(1+2)$. ניתן לשים לב כי תוחלת התשלומים בשיווי משקל זה זהה לשני השחקנים, בניגוד לשיווי המשקל במשחק המקורי.

באופן פורמלי נראה עבור השחקן הראשון (חובב הכדורגל) כי התנאי לשיווי משקל מתואם מתקיים.

$$p(o, o) = p(f, f) = 1/2 \quad \text{נגדיר התפלגות } p : \\ p(o, f) = p(f, o) = 0$$

$$p(f, f) * u_1(f, f) + p(f, o) * u_1(f, o) = \frac{1}{2} * 2 + 0 * 0 = 1$$

$$p(f, f) * u_1(o, f) + p(f, o) * u_1(o, o) = \frac{1}{2} * 0 + 0 * 1 = 0$$

לכן מתקיים: $p(f, f) * u_1(f, f) + p(f, o) * u_1(f, o) \geq p(f, f) * u_1(o, f) + p(f, o) * u_1(o, o)$
 כעת עבור "הליכה לאופרה":

$$p(o, f) * u_1(o, f) + p(o, o) * u_1(o, o) = 0 * 0 + \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

$$p(o, f) * u_1(f, f) + p(o, o) * u_1(f, o) = 0 * 2 + \frac{1}{2} * 0 = 0$$

לכן מתקיים:

$p(o, f) * u_1(o, f) + p(o, o) * u_1(o, o) \geq p(o, f) * u_1(f, f) + p(o, o) * u_1(f, o)$
 מהסימטריות של מטריצת התועלת של המשחק, ניתן לראות כי תוצאת החישוב עבור השחקן השני תהיה זהה ולכן ההתפלגות שהגדרנו היא אכן שיווי משקל מתואם. קל להבין זאת מהתבוננות בטבלה, מהרגע שהוגרל אחד המצבים בהם ישנה תועלת חיובית לשני השחקנים, כל שינוי אסטרטגיה על ידי אחד השחקנים יוביל לתועלת אפס עבורו.

1.3 דוגמאות למשחקים

1.3.1 משחק צייקן

- 2 שחקנים
- לכל שחקן 2 פעולות

	Brake	Speed
Brake	3,3	1,4
Speed	4,1	0,0

1.3.2 משחק עם שלושה שחקנים

נראה איך משחק עם שלושה שחקנים נראה:

Matrix A		Matrix B	
2,-2,1	2,9,0	2,-2,1	3,7,5
0,6,-3	1,-2,-1	0,6,-2	3,0,1

במשחק זה יש שתי מטריצות, שחקן ראשון בוחר שורה, שחקן שני בוחר עמודה ושחקן שלישי בוחר מטריצה.

כך למשל: $u_1(1,2,B) = 3, u_3(1,2,B) = 5$

1.3.3 דילמת האסיר

- יש הרבה וריאציות של דילמת האסיר, נציג וריאציה אחת:
- שני עבריינים ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) יודה בביצוע המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:
1. אם תודה וחברך לא יודה, תקבל חסינות כעד מדינה ותצא לחופשי.
 2. אם לא תודה וחברך יודה, תקבל עונש מקסימלי לפשע זה (נניח 10 שנים).
 3. אם שניכם לא תודו, יש בידינו ראיות להרשעתכם בעבירות פחותות שתוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
 4. אם שניכם תודו, נבקש להתחשב בשיתוף הפעולה שלכם ולגזור את עונשכם ל-6 שנות מאסר לכל אחד.

סיטואציה זו מגדירה משחק שני שחקנים, שלכל שחקן יש שתי אסטרטגיות: "מודה" ו-"לא מודה".

הטבלה שמיצגת את המשחק תיראה כך:

		שחקן II	
		מודה	לא מודה
שחקן I	מודה	6,6	0,10
	לא מודה	10,0	1,1

כך שבכל תא מופיע מספר שנות המאסר שיקבל כל שחקן.

נציג את המשחק ביחידות תועלת לפי פונקציה u הבאה:

$$u(\text{שחרור}) = 5, \quad u(\text{שנת מאסר}) = 4$$

$$u(\text{10 שנות מאסר}) = 0, \quad u(\text{6 שנות מאסר}) = 1,$$

ואז המשחק במונחי תועלת יוצג באופן הבא:

		שחקן II	
		מודה	לא מודה
שחקן I	מודה	1,1	5,0
	לא מודה	0,5	4,4

וכפי שרואים עבור שני השחקנים האסטרטגיה "מודה" שולטת חזק על האסטרטגיה "לא מודה". לכן תחת שלוש ההנחות שכבר הזכרנו ניתן לסלק אסטרטגיות נשלטות שמוביל אותנו לפתרון שבו שני האסירים מודים, והתוצאה היא (1,1).

העניין במשחק הזה הוא בכך שאם שני השחקנים לא יודו תוצאת המשחק תהיה (4,4) העדיפה לשני השחקנים. כלומר הפתרון תחת שלושת ההנחות אינו "יעיל".

1.3.4 מלחמת המינים

נציג את דוגמת מאבק המינים באמצעות טבלה:

		Man's choices	
		Football	Movie
Woman's choices	Football	4 2	1 0
	Movie	1 0	2 4

בדוגמא זו רואים שיש שתי נקודות שהם שווי משקל (Football, Football) ו-(Movie, Movie).

1.4 משפטים עם הוכחות

בפרק הזה ננסח ונוכיח סדרה של משפטים מרכזיים בתורת המשחקים. משפטים אלה מבוססים על הלמה של שפרנר, ומשפט נקודת השבת של בראוור.

1.4.1 משפט נקודת השבת של בראוור עם הוכחה

משפט 1.1 (משפט נקודת השבת של בראוור): תהי $f: X(n) \rightarrow X(n)$ פונקציה רציפה. אזי יש $x^* \in X(n)$ כך שמתקיים $f(x^*) = x^*$.

הגדרה 1.15: תהי A קבוצה כלשהי במרחב וקטורי ממשי, נאמר כי A קבוצה קמורה אם"ם לכל שתי נקודות $x, y \in A$ ולכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in A$

הגדרה 1.16: כיסוי פתוח של קבוצה K במרחב טופולוגי הוא אוסף של קבוצות פתוחות, שהקבוצה K מוכלת באיחוד שלהן. במילים אחרות, כל נקודה של K שייכת לאחת הקבוצות באוסף. אם אוסף קטן יותר מהווה כיסוי של אותה קבוצה, K , הוא נקרא תת כיסוי.

הגדרה 1.17: קבוצה קומפקטית היא קבוצה בעלת התכונה הבאה: לכל כיסוי פתוח של הקבוצה, קיים תת-כיסוי סופי. לדוגמה, כל קבוצה סופית היא קומפקטית, ובמידת מה אפשר לחשוב על הקומפקטיות כעל הכללה טופולוגית של מושג הסופיות; הקבוצות הקומפקטיות הן 'הקבוצות הקטנות' של המרחב הטופולוגי. אם המרחב הטופולוגי כולו מקיים את התכונה הזו, הוא נקרא מרחב קומפקטי.

הגדרה 1.18: יהיו $x^0, x^1, \dots, x^k$ וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הקמור של $x^0, x^1, \dots, x^k$, המסומן $conv(x^0, x^1, \dots, x^k)$ הוא הקבוצה הקמורה הקטנה ביותר (ביחס ההכללה) המכילה את $x^0, x^1, \dots, x^k$.

הגדרה 1.19: תהי $X \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה קמורה. וקטור $x \in X$ הוא נקודת קיצון של X אם לכל שתי נקודות שונות $y, z \in X$ ולכל $\alpha \in (0, 1)$ מתקיים: $\alpha y + (1 - \alpha)z \neq x$

הגדרה 1.20: הווקטורים $x^0, x^1, \dots, x^k$ ב- $\mathbb{R}^n$ נקראים בלתי תלויים אפינית אם למערכת המשוואות הבאה במשתנים $(\alpha^l)_{l=0}^k$:

$$\sum_{l=0}^k \alpha^l x^l = \vec{0}$$

$$\sum_{l=0}^k \alpha^l = 0$$

הפתרון היחיד הוא: $\alpha^0 = \alpha^1 = \dots = \alpha^k = 0$.

דוגמא 1.4: הווקטורים $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ הם בלתי תלויים אפינית ב- $\mathbb{R}^2$.

הגדרה 1.21: קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת סימפלקס k -מימדי (simplex) אם היא הקמור של $k + 1$ וקטורים בלתי תלויים אופיינית (סימון $S = \langle x^0, x^1, \dots, x^k \rangle$).

הגדרה 1.22: יהי $S = \langle x^0, x^1, \dots, x^k \rangle$ סימפלקס k -מימדי ב- $\mathbb{R}^n$, הקמור של כל תת-קבוצה $\{x^0, x^1, \dots, x^k\}$ מתוך $\{x^{l_0}, x^{l_1}, \dots, x^{l_t}\}$ נקרא פנים t -ממדיים ב- S .

הגדרה 1.23: יהי $S = \langle x^0, x^1, \dots, x^k \rangle$ סימפלקס k -מימדי ב- $\mathbb{R}^n$, השפה של S היא איחוד של כל התת-סימפלקסים ה- $k-1$ ממדיים של S , כלומר

$$\bigcup_{l=0}^k \langle x^0, x^1, \dots, x^{l-1}, x^{l+1}, \dots, x^k \rangle$$

הגדרה 1.24: יהי S סימפלקס k -ממדי ב- $\mathbb{R}^n$. חלוקה סימפליציאלית של S היא אוסף $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ של סימפלקסים ב- $\mathbb{R}^n$ המקיימים:

1. $\bigcup_{m=1}^M T_m = S$: איחוד כל הסימפלקסים ב- τ הוא הסימפלקס S .
 2. לכל j, m $0 \leq j \leq m \leq M$ החיתוך $T_j \cap T_m$ שווה או לקבוצה ריקה או לפנים הן של T_m והן של T_j .
 3. אם T הוא סימפלקס באוסף τ , גם כל פניו נמצאים באוסף זה.
- אם T הוא סימפלקס l -ממדי ב- τ עבור $l < k$, אזי הוא מוכל בסימפלקס $l+1$ ממדי הנמצא ב- τ .

הגדרה 1.25: לכל חלוקה סימפליציאלית $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ נסמן $Y(\tau)$ את כל נקודות הקיצון של הסימפלקסים $(T_m)_{m=1}^M$. כלומר, כל T_m הוא קמור של כמה מהנקודות ב- $Y(\tau)$ כך בתרשים למעלה,

$$Y(\tau) = \{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$$

הגדרה 1.26: יהי $S = \langle x^0, x^1, \dots, x^k \rangle$ סימפלקס k -מימדי ב- $\mathbb{R}^n$ עבור $n \geq k$ ו- τ חלוקה סימפליציאלית של S . צביעה של τ היא פונקציה $c: Y(\tau) \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$ המתאימה לכל קדקוד y ב- $Y(\tau)$ אינדקס $c(y)$ מתוך $\{0, 1, \dots, k\}$ שנקרא הצבע של הקדקוד. צביעה c נקראת תקינה אם לכל $y \in Y(\tau)$ הצבע של y הוא אחד האינדקסים בתומך של y (בהצגה הבריצנטרית שלו לפי S).

הוכחת משפט נקודת השבת של בראוור:

בהוכחה אנו נשתמש בלמה של שפרנר עם כמה הגדרות נוספות:

למה 1.2 (הלמה של שפרנר): יהי S סימפלקס k -מימדי ב- $\mathbb{R}^n$ עבור $n \geq k$ ו- τ חלוקה סימפליציאלית של S . תהי c צביעה תקינה של τ , אזי מספר הסימפלקסים ה- k מימדיים $T \in \tau$ שכל קדקודיהם צבועים ב- k צבועים שונים הוא אי זוגי. בפרט, יש לפחות סימפלקס k -ממדי אחד ב- τ שכל קדקודיו צבועים ב- $k+1$ צבועים שונים.

הגדרה 1.27: הסימפלקס הסטנדרטי ה- n -ממדי הוא סימפלקס ב- $\mathbb{R}^{n+1}$ שקדקודיו הם וקטורי היחידה $e_1, e_2, \dots, e_n$. נסמנה ב- $X(n)$ והיא מוגדרת באופן הבא:

$$X(n) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0 \forall i \right\}$$

הגדרה 1.28: יהי $S = \langle x^0, x^1, \dots, x^k \rangle$ סימפלקס ב- $\mathbb{R}^n$. הקוטר של S מסומן $\rho(S)$ ב- ρ ומוגדר ע"י:

$$\rho(S) = \max_{0 \leq i < j \leq k} \|x^i - x^j\|$$

הגדרה 1.29: תהי $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ חלוקה סימפליציאלית של S . הקוטר של החלוקה τ מסומן ב- $\rho(\tau)$ ומוגדר ע"י:

$$\rho(\tau) = \max_{m=1, \dots, M} \rho(T_m)$$

מכיוון שלכל $y \in X(n)$ מתקיים $y = \sum_{i=1}^n y_i e^i$, כאשר $(e^i)_{i=1}^n$ הם וקטורי יחידה, הרי שהתומך של y ביחס לקדקודי הסימפלקס $X(n)$ הוא אוסף כל האינדקסים i שעבורם $y_i > 0$.

שלב ראשון: לכל $y \in X(n)$ קיים אינדקס $i \in \text{supp}(y)$ המקיים $f_i(y) \leq y_i$.
 תהי $y \in X(n)$, ונניח בשלילה שהטענה אינה מתקיימת. אזי:

- לכל אינדקס $i \in \text{supp}(y)$ מתקיים $f_i(y) \geq y_i$.
 - לכל אינדקס $i \notin \text{supp}(y)$ מתקיים $f_i(y) \geq 0 = y_i$.
- נסכום משוואות אלה עבור $i = 1, 2, \dots, n$. מכיוון ש- $\text{supp}(y)$ מכילה לפחות אינדקס אחד, נקבל:

$$1 = \sum_{i=1}^n f_i(y) \geq \sum_{i=1}^n y_i = 1$$

סתירה זו מעידה כי הנחת השלילה אינה נכונה, ולכן קיים אינדקס $i \in \text{supp}(y)$ המקיים $f_i(y) \leq y_i$.

שלב שני: הגדרת צביעה.

הגדרה 1.30: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in X$ המקיימים $\|x - y\| \leq \delta$ מתקיים $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

נזכור כי כל פונקציה רציפה שמוגדרת על קבוצה קומפקטית היא פונקציה רציפה במידה שווה. יהי נתון $\varepsilon > 0$. מכיוון ש- f רציפה במידה שווה, קיים $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ כך שאם $\|x - y\| \leq \delta$ מתקיים $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. ניתן לבחור את δ קטן כך שיהיה קטן מ- ε . מכיוון שהסימפלקס $X(n)$ הוא הקמור של $e^1, e^2, \dots, e^n$ נוח לצבוע אותו בצבעים $1, 2, \dots, n$ המתאימים לקדקודים אלה.

תהי τ_ε חלוקה סימפליציאלית של $X(n)$ עם קוטר קטן מ- δ .

נגדיר צביעה c עבור τ_ε באופן הבא: לכל $y \in Y(\tau_\varepsilon)$, הצבע $c(y)$ הוא אינדקס כלשהו המקיים $i \in \text{supp}(y)$ ו- $f_i(y) \leq y_i$ (נזכור כי מהשלב הראשון קיים לפחות אינדקס אחד כזה).

מכיוון שהצבע של כל $y \in Y(\tau_\varepsilon)$ הוא אינדקס ב- $\text{supp}(y)$, צביעה זו מקיימת את תנאי הלמה של שפרנר.

שלב שלישי: קיום נקודת שבת.

מהלמה של שפרנר קיים סימפלקס $T_\varepsilon = \langle x^1, x^2, \dots, x^n \rangle$ שכל קדקודיו צבועים בצבעים $\{1, 2, \dots, n\}$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $c(x^i) = i$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$. כלומר $f_i(x^i) \leq x_i^i$ (כאשר x_i^i היא הקואורדינטה ה- i של x^i). יהי x_ε וקטור כלשהו ב- T_ε . מכיוון שהקוטר של τ_ε לכל היותר δ אזי $\|x^\varepsilon - x^i\| \leq \delta$ לכל i , ומכיוון ש- f רציפה במידה שווה, מתקיים:

$$f_i(x^\varepsilon) \leq f_i(x^i) + \varepsilon \leq x_i^i + \varepsilon \leq x_i^\varepsilon + \varepsilon + \delta \leq x_i^\varepsilon + 2\varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

כאשר האי שוויון האחרון מתקיים מכיוון ש- $\delta \leq \varepsilon$. דבר זה נכון לכל $\varepsilon > 0$. מכיוון ש- $X(n)$ היא קבוצה קומפקטית, קיימת סדרה $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ השואפת ל- 0 כך שהסדרה $(x^{\varepsilon_k})_{k=1}^\infty$ מתכנסת לגבול x^* ב- $X(n)$. מכיוון ש- f רציפה, ע"י מעבר לגבול נקבל:

$$f(x^*) \leq x_1^*, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ולכן:

$$1 = \sum_{i=1}^n f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^n x_i^* = 1$$

משתי משוואות אלה נובע כי $f_i(x^*) = x_i^*$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$. כלומר x^* היא נקודת שוות של

■. f

נכליל עתה את משפט נקודת השבת של בראוור לקבוצה קמורה וקומפקטית $X \subset \mathbb{R}^n$ כלשהי. תחילה נראה כי לכל נקודה x שאינה נמצאת בקבוצה קמורה X קיימת נקודה יחידה בקבוצה הקרובה אליה ביותר.

משפט 1.3: תהי $X \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וסגורה, ו- $x \notin X$. קיימת נקודה יחידה $y \in X$ המקיימת $d(x, X) = d(x, y)$.

משפט 1.4: תהי $X \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וסגורה. נגדיר פונקציה $g: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ באופן הבא:
 $g(x)$ היא הנקודה ב- X הקרובה ביותר ל- x . אזי לכל $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:
 $d(g(x), g(\bar{x})) \leq d(x, \bar{x})$.

כמסקנה נקבל את המשפט הבא:

משפט 1.5 (הכללת משפט נקודת השבת של בראוור): תהי $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה, קומפקטית ולא ריקה. אזי לכל פונקציה רציפה $f: X \rightarrow X$ קיימת נקודת שבת.

הוכחה:

מכיוון ש- X קומפקטית, קיים סימפלקס S גדול דיו המכיל את X . נגדיר פונקציה $h: S \rightarrow S$ באופן הבא:

$$h(x) := f(g(x))$$

כאשר g היא הפונקציה המתאימה לכל נקודה x את הנקודה ב- X הקרובה אליה ביותר. ממשפט 1.4 נובע כי הפונקציה g רציפה, ולכן גם h , כהרכבה של פונקציות רציפות, היא פונקציה רציפה. ממשפט 1 יש לפונקציה h נקודת שבת $x^*: h(x^*) = x^*$. הטווח של h היא הקבוצה X , ולכן $x^* \in X$. אך לכל $x \in X$ מתקיים $g(x) = x$, ולכן $x^* = h(x^*) = f(g(x^*)) = f(x^*)$. כלומר, x^* היא גם נקודת שבת של f . ■

1.4.2 משפט נאש (Nash, 1950b, 1951) והוכחה

משפט 1.6 (משפט נאש): לכל משחק בצורה אסטרטגית G , שבו מספר סופי של שחקנים ולכל שחקן יש מספר סופי של אסטרטגיות טהורות, קיים שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

משפט 1.7: אם קבוצת האסטרטגיות הטהורות S_i של שחקן i סופית, אזי קבוצת האסטרטגיות המעורבות שלו Σ_i היא קבוצה קמורה וקומפקטית.

משפט 1.8: אם $A \subset \mathbb{R}^m$ ו- $B \subset \mathbb{R}^n$ הן קבוצות קומפקטיות, אזי הקבוצה $A \times B$ היא קבוצה קומפקטית ב- $\mathbb{R}^{n+m}$.
 אם A ו- B הן קבוצות קמורות, אזי הקבוצה $A \times B$ היא קבוצה קמורה.

הוכחת משפט נאש:

מהמשפטים 1.7 + 1.8 אנו מסיקים כי הקבוצה $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_n$ היא קבוצה קמורה וקומפקטית במרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{m_1+m_2+\dots+m_n}$ כאשר m_i הוא מספר האסטרטגיות

טהורות של שחקן i ($\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$).

הוכחת משפט נאש תתבצע באופן הבא:

נגדיר פונקציה $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ונוכיח שהיא מקיימת את שתי הטענות הבאות:

1. f היא פונקציה רציפה.

2. כל נקודת שבת של f היא שיווי משקל במשחק.

מכיוון ש- Σ קמורה וקומפקטית ו- f רציפה ינבע ממשפט 1.5 כי ל- f קיימת לפחות נקודת שבת אחת.

מהתכונה השנייה נסיק כי למשחק יש לפחות שיווי משקל אחד.

הרעיון מאחורי הגדרת f הוא הבא :

לכל וקטור אסטרטגיות σ הווקטור : $f(\sigma) = (f_i(\sigma))_{i \in N}$ יהיה וקטור אסטרטגיות שבו $f_i(\sigma)$ היא אסטרטגיה של שחקן i . $f_i(\sigma)$ תוגדר כך שאם σ_i הינה תשובה טובה ביותר כנגד σ_{-i} אזי $f_i(\sigma)$ תתקבל ע"י תזוזה מ- σ_{-i} בכיוון תשובה טובה יותר כנגד σ_{-i} כך ש- $f_i(\sigma) = \sigma_i$ אם σ_i היא תשובה טובה ביותר כנגד σ_{-i} .

לשם הגדרת f נגדיר תחילה לכל שחקן i ולכל אינדקס j , $1 \leq j \leq m_i$ פונקצית עזר $g_i^j: \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ כלומר לכל וקטור אסטרטגיות מעורבות σ נגדיר מספר אי-שלילי $g_i^j(\sigma)$. התשלום ששחקן i מקבל תחת וקטור האסטרטגיות המעורבות σ הוא $U_i(\sigma)$. התשלום שהוא מקבל כאשר כל שאר השחקנים משחקים לפי σ , אך הוא משחק את האסטרטגיה הטהורה s_i^j הוא $U_i(s_i^j, \sigma_{-i})$.

אנו נגדיר את הפונקציה g_i^j באופן הבא :

$$g_i^j := \max\{0, U_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}$$

במילים, $g_i^j(\sigma)$ שווה ל-0 אם לשחקן i לא כדאי לסטות מ- σ_i ל- s_i^j , או לרווח מהסטיה במקרה שהסטייה כדאית. כך כאשר $g_i^j(\sigma) > 0$ כדאי לשחקן i להגדיל את ההסתברות שבה הוא משחק את האסטרטגיה הטהורה s_i^j . מכיוון שלשחקן יש סטיה כדאית אם σ_i יש לו סטייה כדאית לאסטרטגיה טהורה נקבל את התוצאה הבאה :

משפט עזר 1: וקטור האסטרטגיות σ הוא שיווי משקל אם $g_i^j(\sigma) = 0$ לכל שחקן $i \in N$ ולכל $j = 1, 2, \dots, m_i$.

משפט עזר 2: יהי $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ משחק בצורה אסטרטגית, ותהיה $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N})$ הרחבתו לאסטרטגיות מעורבות. אזי לכל $i \in N$ הפונקציה U_i היא פונקציה רציפה.

משפט עזר 3: לכל i ו- j הפונקציה g_i^j רציפה. הוכחה:

הפונקציה U_i היא פונקציה רציפה לפי משפט עזר 2. לכן הפונקציה $U_i(s_i^j, \sigma_{-i})$ היא פונקציה רציפה. בפרט ההפרש $U_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)$ הוא פונקציה רציפה. כיוון ש-0 היא פונקציה רציפה, ומכיוון שמקסימום של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה. נקבל כי הפונקציה g_i^j היא פונקציה רציפה.

נגדיר עתה את הפונקציה f . פונקציה זו צריכה לקיים שכל נקודת שבת שלה היא שווי משקל. לכן, אם σ אינה שיווי משקל, צריך להתקיים $\sigma \neq f(\sigma)$. כיצד נבטיח זאת? הרעיון הוא להתבונן לכל שחקן i באותן אסטרטגיות טהורות שבהן $g_i^j(\sigma) > 0$ – אלו אסטרטגיות טהורות שכדאי לשחקן בהסתברות גבוהה יותר (על חשבון אסטרטגיות טהורות שאינן מקיימות אי-שוויון זה) רעיון זה מביא אותנו להגדרה הבאה :

מכיוון ש- $f(\sigma)$ הוא איבר ב- Σ , כלומר וקטור אסטרטגיות מעורבות, $f_i^j(\sigma)$ מציין את ההסתברות ששחקן i יציין את האסטרטגיה הטהורה s_i^j . נגדיר :

$$f_i^j(\sigma) := \frac{\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}$$

במילים, אם s_i^j היא תשובה טובה יותר מ- σ_i כנגד σ_{-i} , נגדיל את ההסתברות שלה ב- $g_i^j(\sigma)$.

ונגרמל את המספרים שהתקבלו בדרך זו לווקטור הסתברות (זהו הביטוי המופיע במכנה). נפנה עתה להוכיח כי f מקיימת את התכונות הנדרשות.

משפט עזר 4: הטווח של f הוא Σ .

הוכחה:

להוכחת הטענה יש להראות כי לכל $\sigma \in \Sigma$, $f(\sigma)$ הוא וקטור אסטרטגיות מעורבות, כלומר:

$$1. f_i^j(\sigma) \geq 0 \text{ לכל } i, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}.$$

$$2. \sum_{j=1}^{m_i} f_i^j(\sigma) = 1.$$

הדרישה הראשונה מתקיימת מכיוון ש- $g_i^j(\sigma)$ אי-שלילי על פי הגדרתו, ולכן המכנה ב- $f_i^j(\sigma)$ הינו לפחות 1 והמונה אי-שלילי.

נראה כעת כי הדרישה השנייה גם כן מתקיימת, מכיוון ש- $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) = 1$ אז:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_i} f_i^j(\sigma) &= \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma))}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) + \sum_{j=1}^{m_i} g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} = 1 \end{aligned}$$

משפט עזר 5: הפונקציה f הינה פונקציה רציפה.

הוכחה:

משפט עזר 3, נובע כי הן המונה והן המכנה בהגדרת f_i^j הם פונקציות רציפות. מכיוון ש- g_i^j הינה פונקציה אי-שלילית, המכנה בהגדרת f_i^j הינו לפחות 1. מכיוון שמנה של פונקציות רציפות שבה המכנה הוא פונקציה חיובית הינה פונקציה רציפה, הפונקציה f הינה פונקציה רציפה.

כדי לסיים את הוכחת המשפט, יש להראות כי כל נקודת שבת של f היא שיווי משקל של המשחק.

נעשה זאת במספר צעדים:

משפט עזר 6: תהי σ נקודת שבת של f . אזי מתקיים:

$$g_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j) \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma), \forall i \in N, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$$

הוכחה:

מכיוון ש- σ נקודת שבת של f , מתקיים $f(\sigma) = \sigma$. זהו שוויון בין וקטורים, ולכן כל קואורדינטה באגף שמאל שווה לקואורדינטה מתאימה באגף ימין, כלומר:

$$f_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j), \forall i \in N, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$$

מהגדרת f נובע כי

$$\frac{\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)} = \sigma_i(s_i^j), \forall i \in N, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$$

המכנה באגף שמאל חיובי, ולכן ניתן לכפול בו את שני האגפים ונקבל:

$$\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j) + \sigma_i(s_i^j) \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma), \forall i \in N, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$$

ומכאן מתקבלת המשוואה.

ניגש עתה להוכיח שכל נקודת שבת של f היא שיווי משקל .

משפט עזר 7 : הפונקציה U_i מקיימת :

$$U_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) U_i(s_i^j, \sigma_{-i}), \forall i \in N$$

משפט עזר 8 : תהי σ נקודת שבת של f . אזי σ היא שיווי משקל נאש.
הוכחה :

נניח בשלילה כי σ אינה שיווי משקל נאש. ממשפט עזר 1 נקבל כי קיים שחקן i וקיים $l \in \{1, 2, \dots, m_i\}$ כך שמתקיים $g_i^l(\sigma) > 0$. בפרט, $\sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma) > 0$, ולכן ממשוואה קודמת נקבל :

$$\sigma_i(s_i^j) > 0 \Leftrightarrow g_i^j(\sigma) > 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, m_i\} *$$

לפי משפט עזר 7 מתקיים $U_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) U_i(s_i^j, \sigma_{-i})$ מכאן נקבל :

$$0 = \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^j) (U_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)) = \sum_{\{j: \sigma_i(s_i^j) > 0\}} \sigma_i(s_i^j) (U_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma))$$

אך סכום זה הינו חיובי, שכן הוא מכיל לפחות איבר אחד ($j = l$), וממשוואה * אם $\sigma_i(s_i^j) > 0$ הרי שגם $g_i^j(\sigma) > 0$. כלומר $U_i(s_i^j, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma) > 0$ ולכן כל מחובר בסכום הקודם חיובי.

סתירה זו מעידה כי הנחת השלילה אינה נכונה- σ היא שיווי משקל נאש.

חלק שני

בחלק הזה של הספר נדון במאמר קצר של Lipton, Markakis & Mehta שבו נעסוק באלגוריתם לחישוב מקורב של שיווי משקל נאש וזה בעיקר בגלל הסיבוכיות הגדולה המתבטאת בחישוב שיווי משקל נאש מדויק.

2.1 סיבוכיות חישוב שיווי משקל נאש

בכדי לנתח את סיבוכיות החישוב של שיווי משקל נאש, אנו נצטרך להגדיר כמה דברים:

הגדרה 2.1: מחלקת סיבוכיות היא אוסף בעיות בעלות סיבוכיות משותפת.

הגדרה 2.2: בעיית הכרעה היא בעיה אשר יש לה תשובה של "כן" או "לא".

דוגמא 2.1:

השאלה "האם מספר טבעי נתון הוא ראשוני?" היא בעיית הכרעה. מאידך, הבעיה "מציאת המספר הראשוני הקטן ביותר בעל 77 ספרות" אינה בעיית הכרעה, שכן התשובה עבורה אינה "כן" או "לא".

הגדרה 2.3: הקבוצה $O(g(n))$ מוגדרת כאוסף כל הפונקציות $f(n)$ בעלות אותו תחום וטווח של $g(n)$ שעבורן קיימים קבועים חיוביים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים: $f(n) < c * g(n)$.

הגדרה 2.4: הקבוצה $\Omega(g(n))$ מוגדרת כאוסף כל הפונקציות $f(n)$ בעלות אותו תחום וטווח של $g(n)$ שעבורן קיימים קבועים חיוביים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים: $f(n) > c * g(n)$.

הגדרה 2.5: אלגוריתם מסויים אומרים שהוא רץ בזמן פולינומי אם זמן ריצתו במקרה הגרוע על קלט בגודל n חסום מלמעלה ע"י ביטוי פולינומי באורך הקלט של האלגוריתם כלומר $T(n) = O(n^k) = \text{poly}(n) = 2^{O(\log n)}$ עבור קבוע k כלשהו. למשל: $T(n) = n, n \log n, n^{20}$.

הגדרה 2.6: אלגוריתם מסויים אומרים שהוא רץ בזמן אקספוננציאלי אם זמן ריצתו חסום מלמעלה ע"י הביטוי $2^{\text{poly}(n)}$ באורך הקלט של האלגוריתם. למשל: $T(n) = 1.1^n, 10^n$.

הגדרה 2.7: מחלקת סיבוכיות P (Deterministic Polynomial time) היא קבוצה כל בעיות ההכרעה אשר ניתנות לפתרון באופן יעיל, כלומר בזמן ריצה פולינומי.

הגדרה 2.8 מחלקת סיבוכיות NP (Nondeterministic Polynomial time) היא קבוצה הבעיות שפתרונותיהן ניתנים לאמות באופן יעיל כלומר בהינתן בעיה כלשהי ופתרון מוצע כלשהו לבעיה, אז ניתן לבנות אלגוריתם שבודק אם הפתרון המוצע הוא אכן פתרון בזמן ריצה פולינומי.

דוגמא 2.2:

בהינתן קבוצה של מספרים שלמים, ניתן לשאול אם ניתן לחלק את קבוצת הקלט לשתי קבוצות של מספרים כך שסכומן זהה. כך למשל, הקבוצה $\{1, 3, 4, 5, 8, 11\}$ ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות: הקבוצה $\{5, 11\}$ והקבוצה $\{1, 3, 4, 8\}$, שסכום כל אחת מהן הוא 16. מאידך, הקבוצה $\{1, 3, 5, 6\}$ אינה ניתנת לחלוקה כזו.

הגדרה 2.9: בעיית הכרעה מכונה $NP - \text{Hard}$ אם היא קשה לפתרון מבחינה חישובית לפחות כמו כל בעיה השייכת ל- NP .

דבר ראשון, אלגוריתמים שידועים היום למציאת שיווי משקל נאש במשחק שני שחקנים בצורה אסטרטגית רצים במקרה הגרוע בסיבוכיות אקספוננציאלית ($\Omega(e^m)$) (כתלות במספר האסטרטגיות הטהורות) או שבכלל לא ידוע אם הם רצים בזמן פולינומי. במשחק עם שלושה שחקנים הדבר נעשה הרבה יותר קשה ומסובך – לדוגמא עבור משחק שני שחקנים ניתן לייצג את הבעיה כבעיית השלמה ליניארית אבל משחק עם שלושה שחקנים היא בעיית השלמה לא ליניארית. וברור שבמקרה הכללי עם n שחקנים הדבר הולך ומסתבך והסיבוכיות גדלה בצורה מהירה כך שאפילו אלגוריתמים של חישוב שיווי משקל נאש מקורב רצים בזמן אקספוננציאלי. בשל עובדה זו בעיית חישוב שיווי משקל נאש נחשבת כאחת הבעיות הכי מעניינות במדעי המחשב ואחת הבעיות המרכזיות הפתוחות בתורת סיבוכיות הביצועים והחישובים. ידוע לנו עד עכשיו שבעיית מציאת שיווי משקל נאש במשחק שני שחקנים נמצאת איפשהו בין שתי מחלקות סיבוכיות P , NP ובנוסף ידוע שבעיית ההכרעה של קיום שיווי משקל נאש עם דרישות ואילוצים (כמו למקסם תועלת) שייכת למחלקת סיבוכיות $NP - hard$. בעיה נוספת שקשורה, היא הצורך של שחקנים לשחק אסטרטגיות פשוטות. אפילו אם היה ניתן לחשב את שיווי משקל נאש ביעילות הם יכולים להיות קשים למימוש. שחקנים נוטים לשחק באסטרטגיות קלות ככל האפשר. הם יעדיפו לשחק אסטרטגיות פחות אופטימאליות במקום לעקוב אחרי שיטה מסובכת של פעולות שיכולות להיות מסובכות הן ללמידה והן לביצוע.

2.2 הקדמה למאמר

המאמר מתייחס למשחקים בצורה אסטרטגית עם אסטרטגיות פשוטות (אסטרטגיות מעורבות עם התפלגות אחידה על קבוצת מצומצמת של אסטרטגיות טהורות). החשיבות של צמצום מספר האסטרטגיות ברור כי האסטרטגיות הטהורות הן המקור לאסטרטגיות מעורבות כי אחרת מציאת שיווי משקל נאש היא פעולה לא פרקטית אם השחקן רוצה להשתמש באסטרטגיה מעורבת שמתפלגת באופן רנדומלי על קבוצת גדולה של האסטרטגיות הטהורות. הבעיה של גישה זו היא שיש משחקים שבהן שיווי המשקל הוא דווקא מעורב באופן מלא כך שהשחקן חייב להרכיב אסטרטגיה באופן רנדומאלי מכל האסטרטגיות הטהורות שעומדות בפניו. ולכן ננסה למצוא אלגוריתם יעיל המסתמך על קבוצה קטנה של אסטרטגיות פשוטות על ידי שימוש במושג ϵ -שיווי משקל. ובכך האלגוריתם בסופו של דבר מחזיר קירוב של שיווי משקל נאש מבחינת התועלת שמקבלים השחקנים.

2.3 סימונים והגדרות

יהי G משחק עבור שני שחקנים, כאשר לשם פשוטות לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. נתייחס לשחקנים כשחקן השורה ושחקן העמודה עם מטריצות תועלת R, C בהתאמה. בהמשך נכליל את המשחק כך שלא יהיה אותו מספר אסטרטגיות לכל שחקן.

הגדרה 2.10: בוקטור האסטרטגיה המעורבת $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ אם $\sigma_i > 0$ אז אומרים שאסטרטגיה המעורבת σ משתמשת באסטרטגיה הטהורה ה- i ית.

הגדרה 2.11: יהי σ_1 ו- σ_2 שני וקטור עמודה שמייצגים את האסטרטגיה המעורבת של שחקן שורות ושחקן העמודות בהתאמה. הערך $\langle \sigma_1, R\sigma_2 \rangle$ מייצג את התועלת של שחקן השורות כאשר $(\cdot, \cdot)$ מייצג מכפלה פנימית בין שני וקטורים n -מימדיים.

דוגמא 2.3:

		σ_2^1	σ_2^2
		1	2
σ_1^1	1	r_{11}, c_{11}	r_{12}, c_{12}
σ_1^2	2	r_{21}, c_{21}	r_{22}, c_{22}
σ_1^3	3	r_{31}, c_{31}	r_{32}, c_{32}

ואז מתקיים:

$$\begin{aligned}
 U_1(\sigma_1, \sigma_2) &= r_{11}\sigma_1^1\sigma_2^1 + r_{12}\sigma_1^1\sigma_2^2 + r_{21}\sigma_1^2\sigma_2^1 + r_{22}\sigma_1^2\sigma_2^2 + r_{31}\sigma_1^3\sigma_2^1 + r_{32}\sigma_1^3\sigma_2^2 \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_1^2 \\ \sigma_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^1 \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \sigma_1, R\sigma_2 \rangle \\
 U_2(\sigma_1, \sigma_2) &= c_{11}\sigma_1^1\sigma_2^1 + c_{12}\sigma_1^1\sigma_2^2 + c_{21}\sigma_1^2\sigma_2^1 + c_{22}\sigma_1^2\sigma_2^2 + c_{31}\sigma_1^3\sigma_2^1 + c_{32}\sigma_1^3\sigma_2^2 \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_1^2 \\ \sigma_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2^1 \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \sigma_1, C\sigma_2 \rangle
 \end{aligned}$$

הגדרה 2.12: $Supp(\sigma) - \text{support of } \sigma$ הוא קבוצת כל האסטרטגיות שאסטרטגיה σ משתמשת בהן.

הגדרה 2.13: אסטרטגיה מעורבת σ נקראת k -uniform אם היא מתפלגת בצורה אחידה על קבוצה S של אסטרטגיות טהורות עם $|S| = k$.

הגדרה 2.14: שתי אסטרטגיות מעורבות σ_1^*, σ_2^* הם נקודת שיווי משקל נאש אם:

- לכל אסטרטגיה מעורבת $\bar{\sigma}_1$ של שחקן השורות מתקיים: $\langle \bar{\sigma}_1, R\sigma_2^* \rangle \leq \langle \sigma_1^*, R\sigma_2^* \rangle$
- לכל אסטרטגיה מעורבת $\bar{\sigma}_2$ של שחקן העמודות מתקיים: $\langle \sigma_1^*, C\bar{\sigma}_2 \rangle \leq \langle \sigma_1^*, C\sigma_2^* \rangle$

כעת נגדיר את מושג הקירוב של שיווי משקל נאש.

הגדרה 2.15: לכל $\varepsilon > 0$ שתי אסטרטגיות מעורבות σ_1', σ_2' הם נקודת ε -שיווי משקל נאש אם:

(i) לכל אסטרטגיה מעורבת $\bar{\sigma}_1$ של שחקן השורות מתקיים: $\langle \bar{\sigma}_1, R\sigma_2' \rangle \leq \langle \sigma_1', R\sigma_2' \rangle + \varepsilon$

(ii) לכל אסטרטגיה מעורבת $\bar{\sigma}_2$ של שחקן העמודות מתקיים: $\langle \sigma_1', C\bar{\sigma}_2 \rangle \leq \langle \sigma_1', C\sigma_2' \rangle + \varepsilon$

במילים, שיווי משקל נאש הוא פרופיל (זוג במקרה של 2 שחקנים) האסטרטגיות שמהווה התגובה הכי טובה לכל שאר האסטרטגיות עד כדי ε .

2.4 תוצאה מרכזית

נניח תחילה שכל האיברים במטריצות R, C הם מספרים בין 0 ו-1.

משפט 2.1: לכל נקודת שיווי משקל נאש σ_1^*, σ_2^* ולכל $\varepsilon > 0$ קיים לכל $k \geq \frac{12 \ln n}{\varepsilon^2}$ זוג של k -uniform אסטרטגיות σ_1', σ_2' כך ש-:

- σ_1', σ_2' הם ε -שיווי משקל נאש.
- $|\langle \sigma_1', R\sigma_2' \rangle - \langle \sigma_1^*, R\sigma_2^* \rangle| < \varepsilon$ - תועלת של שחקן השורות כמעט קרובה לתועלת שלו בשיווי משקל.
- $|\langle \sigma_1', C\sigma_2' \rangle - \langle \sigma_1^*, C\sigma_2^* \rangle| < \varepsilon$ - תועלת של שחקן העמודות כמעט קרובה לתועלת שלו בשיווי משקל.

הגדרה 2.16: חבילה A (multiset) היא הכללה של מושג 'קבוצה' כך שבה כל איבר יכול להופיע יותר מפעם אחת.

עבור $\varepsilon > 0$ נתון. קבע $k \geq \frac{12 \ln n}{\varepsilon^2}$.

בנה חבילה A באמצעות דגימה k פעמים מקבוצת האסטרטגיות הטהורות של שחקן השורות לפי התפלגות של σ_1^* .

בנה חבילה B באמצעות דגימה k פעמים מקבוצת האסטרטגיות הטהורות של שחקן העמודות לפי התפלגות של σ_2^* .

תהי σ_1' אסטרטגיה מעורבת של שחקן השורות עם הסתברות $\frac{1}{k}$ לכל אסטרטגיה שנמצאת ב- A ו-0 לשאר האסטרטגיות.

תהי σ_2' אסטרטגיה מעורבת של שחקן העמודות עם הסתברות $\frac{1}{k}$ לכל אסטרטגיה שנמצאת ב- B ו-0 לשאר האסטרטגיות.

מובן שאם אסטרטגיה נמצאת α פעמים בחבילה אז ההסתברות שלה תהיה $\frac{\alpha}{k}$.

נסמן ב- σ_1^i את האסטרטגיה ה- i ית של שחקן השורות וב- σ_2^j את האסטרטגיה ה- j ית של שחקן העמודות.

לפי שיטה זו בסוף התהליך אנחנו נקבל קבוצה של וקטורים שמועמדים להיות ε -שיווי משקל ולפי הבחירה שלהם יהיו קרובים להתפלגות של וקטור שיווי המשקל σ_1^* ו- σ_2^* (כי הדגימה מתבצעת לפי ההתפלגות של שיווי המשקל).

בכדי לנתח את ההסתברות ש σ_1' , σ_2' היא ε -שיווי משקל ומשיקולים של יעילות נסתכל על הסטיות מאסטרטגיות טהורות.

נגדיר :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \left\{ |(\sigma_1', R\sigma_2') - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ \pi_{1,i} &= \{(\sigma_1^i, R\sigma_2') < (\sigma_1', R\sigma_2') + \varepsilon\}, \quad (i = 1, \dots, n) \\ \phi_2 &= \left\{ |(\sigma_1', C\sigma_2') - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ \pi_{2,j} &= \{(\sigma_1', C\sigma_2^j) < (\sigma_1', C\sigma_2') + \varepsilon\}, \quad (j = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

$$GOOD = \phi_1 \bigcap \phi_2 \bigcap_{i=1}^n \pi_{1,i} \bigcap_{j=1}^n \pi_{2,j}$$

אנחנו מתכוונים לראות ש- $\Pr[GOOD] > 0$ וזה אומר שקיימת בחירה של A ו- B כך שהאסטרטגיות המתאימות σ_1' , σ_2' מקימות את המשפט.

נגדיר :

$$\begin{aligned}\phi_{1a} &= \left\{ |(\sigma_1', R\sigma_2^*) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ \phi_{1b} &= \left\{ |(\sigma_1', R\sigma_2') - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ \phi_{2a} &= \left\{ |(\sigma_1^*, C\sigma_2') - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\ \phi_{2b} &= \left\{ |(\sigma_1', C\sigma_2') - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \right\}\end{aligned}$$

נשים לב ש- $\phi_{1a} \cap \phi_{1b} \subseteq \phi_1$ כיוון ש- :

אם נתון : $|(\sigma_1', R\sigma_2^*) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \wedge |(\sigma_1', R\sigma_2') - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4}$ אז :

$$|(\sigma'_1, R\sigma'_2) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| = |(\sigma'_1, R\sigma'_2) - (\sigma'_1, R\sigma_2^*) + (\sigma'_1, R\sigma_2^*) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| \\ \leq |(\sigma'_1, R\sigma_2^*) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| + |(\sigma'_1, R\sigma_2') - (\sigma'_1, R\sigma_2^*)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

משפט 2.2: (חסם הופדינג) יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \in [a_i, b_i]$.

אזי הממוצע שלהם $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ מקיים לכל t חיובי:

$$\Pr(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| \geq t) \leq 2 \exp\left(-\frac{2n^2 t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

נבדוק קיום התנאים של המשפט במקרה שלנו:

$\sigma_1^i = (\sigma_1^1, \dots, \sigma_1^n) \in [0, 1]$ כאשר σ_1^i הוא משתנה מקרי.

הביטוי $\langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle$ הוא סכום של k מחוברים בלתי תלויים ורנדומליים בגלל ש- σ_1^i הוא וקטור שמורכב מ- n משתנים באופן הבנייה כך שחלק מהם ייקבלו ערך 0 ולכן נסתכל אך ורק על האסטרטגיות בשימוש כלומר כאלה שהסתברות שלהם שונה מ-0.

אז המכפלה $\langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle$ היא בעצם ממוצע משוכלל מנורמל של k המחברים ולכן מתקיים לכל $t > 0$:

$$\Pr(|\bar{X}_k - E[\bar{X}_k]| \geq t) \leq 2 \exp(-2kt^2)$$

$$\Pr[\phi_{1a}^c] = \Pr(|\langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle - \langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle| \geq \frac{\varepsilon}{4}) \\ = \Pr(|\langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle - E[\langle \sigma_1^i, R\sigma_2^* \rangle]| \geq \frac{\varepsilon}{4})$$

$$\Pr[\phi_{1a}^c] \leq 2e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}}, \Pr[\phi_{1b}^c] \leq 2e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}} \rightarrow \Pr[\phi_1^c] \leq 4e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}}, \Pr[\phi_2^c] \leq 4e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}}$$

נגדיר:

$$\psi_{1,i} = \left\{ (\sigma_1^i, R\sigma_2') < (\sigma_1^i, R\sigma_2^*) + \frac{\varepsilon}{2} \right\}, (i = 1, \dots, n) \\ \psi_{2,j} = \left\{ (\sigma_1', R\sigma_2^j) < (\sigma_1^*, R\sigma_2^j) + \frac{\varepsilon}{2} \right\}, (j = 1, \dots, n)$$

ניתן לראות ש-:

$$\psi_{1,i} \cap \phi_1 \subseteq \pi_{1,i}, (i = 1, \dots, n) \\ \psi_{2,j} \cap \phi_2 \subseteq \pi_{2,j}, (j = 1, \dots, n)$$

באותה מידה גם מתקיים:

$$\Pr[\psi_{1,i}^c] \leq e^{-\frac{k\varepsilon^2}{2}}, \Pr[\psi_{2,i}^c] \leq e^{-\frac{k\varepsilon^2}{2}}$$

ולכן:

$$\Pr[GOOD^c] \leq \Pr[\phi_1^c] + \Pr[\phi_2^c] + \sum_{i=1}^n \Pr[\pi_{1,i}^c] + \sum_{j=1}^n \Pr[\pi_{2,j}^c] \\ \leq 8e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}} + 2n \left[e^{-\frac{k\varepsilon^2}{2}} + 4e^{-\frac{k\varepsilon^2}{8}} \right] <^* 1$$

* לפי המאמר המעבר מתקיים עבור חסם $k \geq \frac{(12 \cdot \ln(n))}{\varepsilon^2}$ אבל ע"י סימולציות ב-matlab מצאנו שהחסם לא מדויק, כלומר עבור n ו- ε עם k המתאים לפי החסם האי-שוויון לא מתקיים, למשל: עבור $n = 2, \varepsilon = 5$ הביטוי מקבל ערך גדול מ-1.

הרצה ב-matlab

```

function [ result ] = func( n,eps )

k=floor(12*log(n)/eps^2)+1;
result=8*exp((-k*(eps^2))/8)+2*n*(exp((-k*(eps^2))/2) ...
+4*exp((-k*(eps^2))/8));

end

```

Command Window

```

> func(2,5)

ans =

1.0545

```

אפשר להוכיח שהאי-שוויון תמיד מתקיים עבור $k \geq \frac{(37 \cdot \ln(n))}{\epsilon^2}$, הוכחה:

$$8e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} + 2n \left[e^{-\frac{k\epsilon^2}{2}} + 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} \right] \leq \sum_{k \geq \frac{(37 \cdot \ln(n))}{\epsilon^2}} \frac{8}{n^{\frac{37}{8}}} + \frac{2}{n^{\frac{35}{2}}} + \frac{8}{n^{\frac{29}{8}}} = f(n)$$

הפונקציה $f(n)$ היא פונקציה חיובית יורדת ממש לכל $n \geq 2$ וגם מתקיים $f(2) < 1$ ולכן $f(n) < 1 \forall n \geq 2$ ■

הגדרה 2.17: אלגוריתם שרץ בזמן Quasi – polynomial הוא אלגוריתם שרץ יותר איטי מאשר זמן פולינומי אבל עדיין לא יותר איטי מזמן אקספוננציאלי כלומר $2^{poly(\log n)}$. למשל: $T(n) = n^{\log \log n}, n^{\log n}$.

הגדרה 2.18: במדעי המחשב, כוח גס הוא סוג של אלגוריתם שאין בו תחכום, כזה הפועל בדרך הפשוטה ביותר להשגת המטרה דרך מעבר על כל מרחב הפתרונות האפשריים עד להשגת הפתרון, תוך שהוא צורך לעתים כמויות גדולות יחסית של משאבי מחשב (זמן או זיכרון).

דוגמה 2.4:

אלגוריתם מסוג זה הוא פיצוחן של סיסמאות כניסה למחשב באמצעות ניסיון להיכנס עם כל הסיסמאות האפשריות, עד להצלחה. טכניקה זו אינה יעילה, בדרך-כלל, מכיוון שמספר הצירופים האפשריים הוא עצום. לסיסמה בת 8 תווים עם אלפבית המכיל 36 תווים שונים ישנם 36^8 אפשרויות שונות. נניח שניתן אפשרות לנסות מיליון סיסמאות בשנייה, במצב הזה יקח לנסות את כלל האפשרויות 2,821,109 שניות שהן קצת יותר מחודש.

תוצאה 1: למשחק עם שני שחקנים, קיים אלגוריתם שהוא Quasi – polynomial לחישוב כל ה- k -uniform ϵ -שיווי משקל (לפי משפט 1 קיים לפחות שיווי משקל אחד כזה).

הוכחה :

עבור $\varepsilon > 0$ נתון. קבע $k = \frac{12 \ln n}{\varepsilon^2}$.

בשימוש באלגוריתם כוח גס אפשר לחשב כל ה- k -uniform ε -שיווי משקל (לפי משפט 1 קיים לפחות שיווי משקל אחד כזה ואימות ε -שיווי משקל הוא קל כי רק צריך לבדוק סטיה (של האסטרטגיות הטהורות) וזה בעצם אותו תהליך שביצענו בהוכחה של משפט 2.1. האלגוריתם רץ בזמן Quasi – polynomial בגלל שיש $\binom{n+k-1}{k}^2$ זוגות של חבילות. הסבר :

בהנחה שלכל שחקן קיימת n אסטרטגיות שונות, מספר האסטרטגיות ה- k -uniform השונות שאפשר להרכיב שווה למספר הקבוצות בגודל k שאפשר לבחור מתוך קבוצה בגודל n עם חזרות ובלי חשיבות לסדר (זה בדיוק הגדרה של $D(n, k)$ בקומבינטוריקה) ושווה ל- $\binom{n+k-1}{k}$.

לשני השחקנים אנו מעוניינים בכל הקומפיניציות ולכן לפי כלל הכפל מספר האפשרויות הכולל לבחור שתי אסטרטגיות מעורבות k -uniform אחת לכל שחקן שווה ל- $\binom{n+k-1}{k}^2$. לפי מה שידוע לנו, זהו האלגוריתם הראשון שרץ בזמן פחות מאקספוננציאלי, בנוסף בהינתן תועלת של נקודת שיווי משקל נאש האלגוריתם יוכל למצוא ε -שיווי משקל נאש שעבור התועלת של כל אחד מהשחקנים קרובה ב- ε לתועלת שהם יקבלו בשיווי משקל נאש עצמו.

הכללה 1 :

כאשר ערכי המטריצות R, C לא נמצאים בין 0 ו-1 ה- ε עלול להיפגע, וההפרש בין התועלת עלולה לגדול לכל היותר פ- $R_{\max} - R_{\min}$ עבור שחקן השורות ופי- $C_{\max} - C_{\min}$ עבור שחקן העמודות כאשר $R_{\max}$ ו- $R_{\min}$ הם הערך המקסימלי והערך המינימלי של R בהתאמה, ו- $C_{\max}$ ו- $C_{\min}$ הם הערך המקסימלי והערך המינימלי של C בהתאמה. ולכן אם ערכי המטריצות R, C לא נמצאים בין 0 ו-1 אז המשפט יהיה עדיין תקף ויניב תוצאות שהן מקיימות את תנאי המשפט עם $\varepsilon_1 = (R_{\max} - R_{\min}) * \varepsilon$ עבור שחקן השורות ו- $\varepsilon_2 = (C_{\max} - C_{\min}) * \varepsilon$ עבור שחקן העמודות.

הכללה 2 :

אם לשני השחקנים מספר האסטרטגיות שונה (נגיד n_2, n_1) לכן אותה תוצאה מתקבלת עבור $k \geq \frac{12 \ln \max\{n_1, n_2\}}{\varepsilon^2}$.

הכללה 3 :

עבור משחק עם m -שחקנים :

משפט 2.3: יהי $\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*$ נקודת שיווי משקל נאש, במשחק עם m -שחקנים. יהיו $p_1^*, \dots, p_m^*$ התועלות של השחקנים בנקודת שיווי משקל נאש. אז לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $k \geq \frac{3m^2 \ln m^2 n}{\varepsilon^2}$ קיימת קבוצה של אסטרטגיות k -uniform $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m$ כך ש-:

1. $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_m$ היא נקודת ε -שיווי משקל נאש.
2. עבור $i = 1, \dots, m$ כאשר $p'_i, \dots, p'_m$ הם התועלות של השחקנים אם הם ישחקו באסטרטגיות σ'_i .

ניתן לראות שמשפט 2 מבטיח קיום נקודת ε -שיווי משקל עם k שהוא מסדר גודל לוגריתמי רק במקרה שבו m בלתי תלוי ב- n . כלומר ה- $support$ הוא בסדר גודל לוגריתמי כתלות במספר האסטרטגיות הטהורות של כל שחקן n .

גם למשחק עם מספר קבוע כלשהו של שחקנים התוצאה שלעיל (תוצאה 1) עדיין תקפה כי מספר הקומפינאציות של החבילות שהאלגוריתם צריך לעבור עד שימצא פתרון הוא $Quasi - polynomial$.

2.5 קירוב תועלת של שיווי משקל נאש עם k קבוע

כשחקנים לעיתים רבות אנחנו מעוניינים רק בתועלת כך שתהיה קרובה לכל האפשר לתועלת של שיווי משקל נאש ופחות מעניין האם הנקודה היא נקודת ϵ -שיווי משקל ועם דרישות יותר חלשות כאלה אפשר לקבל את הנדרש עם k שהוא יותר קטן.

משפט 2.4: לכל נקודת שיווי משקל σ_1^*, σ_2^* ולכל $\epsilon > 0$ ולכל $k \geq \frac{5}{\epsilon^2}$, זוג של אסטרטגיות k - $uniform$ (σ_1, σ_2) כך ש-:

- $|(\sigma_1, R\sigma_2) - (\sigma_1^*, R\sigma_2^*)| < \epsilon$ ז"א ששחקן השורות יקבל כמעט אותה תועלת
- $|(\sigma_1, C\sigma_2) - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*)| < \epsilon$ ז"א ששחקן העמודות יקבל כמעט אותה תועלת

(ניתן להכליל את המשפט עבור משחק עם m -שחקנים, ואז התומך של האסטרטגיות k - $uniform$ יהיה $O(m^2 \ln m)$)

משפט 2.4 מראה שקיים תומך קבוע k של אסטרטגיות שמקרב התועלת של שני השחקנים לתועלת שכל שחקן מקבל בשיווי משקל נאש.

ההוכחה של המשפט דומה לטכניקה בה הוכחנו את משפט 2.1 אותו תהליך עם אותן ההגדרות. וגם כאן נניח שערכי המטריצות R, C הם בין 0 ו-1. (במקרה הכללי נקבל ניפוח פי $R_{max} - R_{min}$ ו- $C_{max} - C_{min}$)

נשים לב שמשפט 2.4 הוא נכון לכל זוג של אסטרטגיות σ_1^*, σ_2^* ולא דווקא של שיווי משקל נאש. תוצאה כזאת יכולה להיות ניתנת לישום במקרה הבא: נניח שיש לנו משחק של שני שחקנים כך שלשניהם יש מספר גדול של אסטרטגיות טהורות. היות v_1, v_2 התועלות בנקודת שיווי משקל נאש של שחקן השורות ושחקן העמודות בהתאמה. אם התומך של האסטרטגיות של נקודת שיווי המשקל גדול מאוד אז יהיה יותר כדאי לחתום על הסכם בין שני השחקנים ולהשתמש בקבוצה מצומצמת של אסטרטגיות. במצב כזה התועלת של כל שחקן תהיה עדיין קרובה מאוד ל- v_1 ו- v_2 בהתאמה. כלומר השחקנים יעדיפו לשחק במספר מצומצם וקטן ולקבל בכל זאת תועלות שהן שוות בקירוב לתועלות המתאימות ששייכות לנקודת שיווי משקל. בנוסף כל שחקן יכול לבדוק תוך כדי המהלך של המשחק אם השחקן השני מפיר את ההסכם ובמקרה כזה הוא משנה אסטרטגייה בהתאם.

שימוש מעניין:

העובדה שניתן לחשב את נקודת ϵ -שיווי משקל בזמן שהוא $Quasi - polynomial$ היא מאוד חשובה בכך שהיא כמעט "טובה במידה שווה" לשיווי משקל מדויק במקרים רבים. ולכן הקושי בחישוב השיווי משקל המדויק אפשר לשים כבעיה משנית (לא עיקרית). דוגמה של שימוש בשיווי משקל נאש:

לפי מחקרים שנערכו על בעיות של ניתוב במקרה של עומסים, שהיא למעשה משחק מרובה שחקנים שבו התשלומים נמדדים לפי פונקציות תועלת חברתיות, המטרה בבעיות אלה היא למצוא כמה נקודת שיווי משקל נאש היא אופטימלית מבחינת מקסום פונקציות התועלת. מחקרים והוכחות הראו בבעיות אלה שנקודת שיווי משקל נאש עבור פונקציות תועלת חברתיות שלא יורדת נותנת תועלת שהיא לפחות חצי מתועלת של הפתרון האופטימלי.

במקרים אלה, העובדה שאנחנו יכולים לחשב ϵ -שיווי משקל בזמן שהוא $Quasi - polynomial$ יכולה מאוד לעזור לנו. בנוסף הכללה פשוטה של משפט 3.4 עם תוצאה 1 נותנת את התוצאה הבאה:

תוצאה 2:
בהינתן מערכת שירות עם פונקציות תועלת לא יורדות. יהי OPT הערך המקסימלי של פונקציה זו. אז אנחנו יכולים לחשב בזמן $Quasi - polynomial$ כתלות במספר האסטרטגיות הטהורות, קבוצה של אסטרטגיות מעורבות שמהווים נקודות ϵ -שיווי משקל, שנותנות תועלת חברתית P כך שמתקיים: $P \geq \frac{1}{2} OPT - m\epsilon$, כאשר m הוא מספר השחקנים.

2.6 דרגה נמוכה מניבה שיווי משקל עם תומך קטן

בפרק זה אנחנו נחקור את השאלה: מתי במשחק בשני שחקנים קיים שיווי משקל נאש מדויק עם תומך k קטן.

משפט 2.5: יהיו σ_1^*, σ_2^* נקודת שיווי משקל נאש. אם $\text{rank}(C) \leq k$, אז קיימת אסטרטגיה מעורבת σ_1 עבור שחקן השורות עם $|Supp(\sigma_1)| \leq k + 1$ כך ש- σ_1, σ_2^* היא גם נקודת שיווי משקל נאש. בצורה דומה, אם $\text{rank}(R) \leq k$, אז קיימת אסטרטגיה מעורבת σ_2 עבור שחקן העמודות עם $|Supp(\sigma_2)| \leq k + 1$ כך ש- σ_1^*, σ_2 היא גם נקודת שיווי משקל נאש. בנוסף מתקיים:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^*, R\sigma_2^*) &= (\sigma_1, R\sigma_2^*) \\ (\sigma_1^*, C\sigma_2^*) &= (\sigma_1, C\sigma_2^*) \end{aligned} : (\text{rank}(C) \leq k \text{ כאשר } 1 \text{ מקרה})$$

$$\begin{aligned} (\sigma_1^*, R\sigma_2^*) &= (\sigma_1^*, R\sigma_2) \\ (\sigma_1^*, C\sigma_2^*) &= (\sigma_1^*, C\sigma_2) \end{aligned} : (\text{rank}(R) \leq k \text{ כאשר } 2 \text{ מקרה})$$

הוכחה:

משפט 2.6 *Carathedory*: תהי x נקודה במרחב d -מימדי מעל שדה מספרים $\mathbb{R}$ ו- P היא קבוצה של נקודות באותו מרחב. אם נקודה x נמצאת בקמור של קבוצה P , אז קיימת תת-קבוצה P' בעלת $d+1$ נקודות לכל היותר כך ש- x נמצאת בקמור שלה.

בלי הגבלת הכלליות נניח שמתקיים $\text{rank}(R) \leq k$ ותהי S מרחב k -מימדי שנפרש ע"י עמודות של המטריצה R . בגלל ש- $R\sigma_2^*$ היא צירוף ליניארי של עמודות של R , אזי לפי משפט *Carathedory* ניתן לכתוב אותו כצירוף ליניארי של $k + 1$ עמודות של R לכל היותר. נסתכל על הצירוף $R\sigma_2$, נסים לב שמתקיים- $Supp(\sigma_2) \subseteq Supp(\sigma_2^*)$, כי היות והצירוף הליניארי $R\sigma_2^*$ הוא צירוף של n עמודות לכל היותר ומתוכם לפי המשפט לקחנו לכל היותר $k + 1$ עמודות של המטריצה R וזה בדיוק כמו לאפס את העמודות שלא השתמשנו בהן כלומר לשים 0 במקום המתאים בווקטור σ_2 ואז ה- $Supp(\sigma_2)$ מוכל ב- $Supp(\sigma_2^*)$. מזה נובע ש- σ_2 היא התגובה הטובה ביותר ל- σ_1^* . מכיון ש- $R\sigma_2^* = R\sigma_2$ אז σ_1^* היא תגובה טובה ביותר ל- σ_2 . לכן הנקודה σ_1^*, σ_2 היא שיווי משקל נאש.

הגדרה 2.19: יהיו D, C $n \times n$ מטריצות. D היא ε -קירוב של C אם מתקיים $C = D + E$ כך ש- $|e_{ij}| \leq \varepsilon$ עבור $i, j = 1, \dots, n$.

למה 2.7: תהי מטריצה D ε -קירוב של C . ותהי σ_1^*, σ_2^* נקודת שיווי משקל נאש עבור משחק שני שחקנים עם מטריצות תועלות R, D . אז הנקודה σ_1^*, σ_2^* היא 2ε -שיווי משקל נאש עבור אותו משחק עם מטריצת תועלות R, C .

הוכחה:

$$(\sigma_1^*, R\sigma_2^*) \geq (\bar{\sigma}_1, R\sigma_2^*) : \text{ברור שלכל } \bar{\sigma}_1 \text{ מתקיים:}$$

עבור כל אסטרטגיה $\bar{\sigma}_2$ מתקיים:

$$(\sigma_1^*, C\sigma_2^*) = (\sigma_1^*, D\sigma_2^*) + (\sigma_1^*, E\sigma_2^*) \geq (\sigma_1^*, D\bar{\sigma}_2) + (\sigma_1^*, E\sigma_2^*)$$

בגלל ש- $\forall i, j |e_{ij}| \leq \varepsilon$ אז מתקיים:

$$(\sigma_1^*, E\bar{\sigma}_2) - (\sigma_1^*, E\sigma_2^*) \leq 2\varepsilon$$

לכן:

$$(\sigma_1^*, C\sigma_2^*) \geq (\sigma_1^*, D\bar{\sigma}_2) + (\sigma_1^*, E\bar{\sigma}_2) - 2\varepsilon = (\sigma_1^*, C\bar{\sigma}_2) - 2\varepsilon$$

כלומר:

$$(\sigma_1^*, C\bar{\sigma}_2) - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*) \leq 2\varepsilon$$

ואז גם מתקיים:

$$|(\sigma_1^*, C\overline{\sigma_2}) - (\sigma_1^*, C\sigma_2^*)| \leq 2\varepsilon$$

תוצאה 3:

עבור כל משחק עם פוקציות תועלות R, C וגם עבור כל $k < n$ אם C יכולה להיות ε -קירוב למטריצה עם דרגה k , אז קיימת נקודה σ_1, σ_2 שהיא 2ε -שיווי משקל עם $|Supp(x)| \leq k + 1$. דבר זה מתקיים גם עבור R .

בעצם, ניתן להשתמש בפירוק SVD כדי להעריך את מטריצות התועלות R, C ע"י מטריצה עם דרגה k עבור כל k . גורם הקירוב ε של תוצאה 3 הוא פונקציה של הערכים הסינגולריים של המטריצות. תוצאה שימושית נובעת, שבמשחק של שני שחקנים אם אנחנו יודעים את התומך של שיווי משקל נאש, אז אנחנו יכולים למצוא את אותן האסטרטגיות של שיווי משקל בזמן פולינומי. זה בגלל שאסטרטגית שיווי משקל σ_2 של שחקן העמודות גורמת לתועלת של שחקן השורות להיות שווה עבור כל אסטרטגיה שנמצאת בתומך שלו, וגם הכיוון ההפוך נכון. לכן אנו יכולים לכתוב אלגוריתם שרץ בזמן פולינומי ולחשב את שיווי משקל נאש ע"י התומך הנתון.

תוצאה 4:

אם למטריצות התועלות R, C קיימת דרגה קבועה, אז אנחנו יכולים לחשב שיווי משקל נאש ע"י אלגוריתם שרץ בזמן פולינומי. בפרט אם לאחד מהשחקנים יש מספר קבוע של אסטרטגיות טהורות, אז גם אנחנו יכולים לחשב שיווי משקל נאש בזמן פולינומי.

2.7 תוצאות סופיות

הוכחנו במאמר זה את קיומו של אסטרטגיות ε -שיווי משקל נאש עם תומך לוגריתמי כתלות במספר האסטרטגיות הטהורות. כמו כן, הראינו שניתן להעריך (עד כדי ε) את התועלת של כל השחקנים בכל שיווי משקל ע"י התועלת שלהם בנקודת ε -שיווי משקל נאש עם תומך לוגריתמי. אסטרטגיות אלו מתפלגות $uniform$ על חבילה בגודל לוגריתמי ולכן זה הוביל אותנו ל-Quasi – polynomial אלגוריתם לחישוב ε -שיווי משקל נאש. לפי מה שידוע זהו האלגוריתם הראשון מסוגו שרץ בזמן פחות מאיקספוננציאלי. התוצאות של המאמר מתקיימת עבור כל משחק עם m -שחקנים כל עוד מספר השחקנים הוא קבוע ובלתי תלוי במספר האסטרטגיות הטהורות. בנוסף הוכחנו שאם למטריצות התועלות של משחק עם שני שחקנים יש דרגה קטנה אז למשחק קיימת נקודת שבת נאש עם תומך קטן. זה גורר שאם מטריצות התועלות ניתנות להערכה ע"י מטריצות עם דרגה קטנה אז למשחק קיים ε -שיווי משקל. וזה גם גורר שאם למטריצות התועלות יש דרגה קבועה אנחנו יכולים לחשב את שיווי משקל נאש בזמן פולינומי.

חלק שלישי

3.1 מימוש אלגוריתם כוח גס למציאת אסטרטגיות ϵ -שיווי משקל נאש

```
Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\GenerateKUV.m
1 function [ result ] = GenerateKUV( sum,length)
2
3 c = nchoosek(1:sum+length-1,length-1);
4 m = size(c,1);
5 t = ones(m,sum+length-1);
6 t(repmat( (1:m).',1,length-1)+(c-1)*m) = 0;
7 u = [zeros(1,m);t. ';zeros(1,m)];
8 v = cumsum(u,1);
9 result = diff(reshape(v(u==0),length+1,m),1).';
10
11 end
```

הפונקציה מקבלת שני פרמטרים ומחזירה את אוסף כל הווקטורים באורך $length$ שהם פירמטציות של המספרים $1 \dots sum$ וסכום הרכיבים של כל וקטור הוא קבוע sum .
דוגמת הרצה:

```
Command Window
>> GenerateKUV(4,3)

ans =

     0     0     4
     0     1     3
     0     2     2
     0     3     1
     0     4     0
     1     0     3
     1     1     2
     1     2     1
     1     3     0
     2     0     2
     2     1     1
     2     2     0
     3     0     1
     3     1     0
     4     0     0

fx >>
```

```

Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\Compare.m
func.m  ApproximateNash.m  GenerateKUV.m  Compare.m  Utility.m  Algo.m  K_Simulation.m  +
1  function [ cb ] = Compare(R,C, c1 ,c2,eps )
2
3  if isempty(c1) || isempty(c2)
4      cb=0;
5      return;
6  end
7
8  u1=Utility(R,c1)-Utility(R,c2);
9  u2=Utility(C,c1)-Utility(C,c2);
10
11 if (u1==0&&u2==0)
12     cb=0;
13     return;
14 end
15
16 if ((u1>-eps && u2>-eps)&&~(u1<eps && u2<eps))
17     cb=1;
18 else
19     if ((u1<eps && u2<eps)&&~(u1>-eps && u2>-eps))
20         cb=2;
21     else
22         cb=0;
23     end
24 end
25

```

פונקציה זו מקבלת מטריצות התועלות של שני השחקנים, שתי קבוצות של אסטרטגיות מעורבות (כל קבוצה מכילה שתי אסטרטגיות אחת לכל שחקן) ו- ϵ ובודקת את האסטרטגיה העדיפה ביניהן לפי הגדרת הגדרת ϵ -שיווי משקל.

```

Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\Utility.m
func.m  ApproximateNash.m  GenerateKUV.m  Compare.m  Utility.m  Algo.m  abc.m  +
1  function [ utility ] = Utility( mat,ms )
2
3      utility=ms{1}*mat*ms{2}';
4
5  end
6
7

```

פונקציה זו מקבלת מטריצת תועלת, ושתי אסטרטגיות, אחת לכל שחקן ומחזירה את התועלת.

```

Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\ApproximatedNash.m
1 function [ Pairs ] = ApproximatedNash( R,C,eps )
2
3     k=floor(37*log(length(R))/eps^2)+1;
4
5     RES1=GenerateKUV(k,length(R))/k
6
7     Pairs = cell(length(RES1)^2,1);
8
9     for i=1:length(RES1)
10         for j=1:length(RES1)
11             Pairs{(i-1)*length(RES1)+j}=cell(2,1);
12             Pairs{(i-1)*length(RES1)+j}{1}=RES1(i,:);
13             Pairs{(i-1)*length(RES1)+j}{2}=RES1(j,:);
14         end
15     end
16
17     for i=1:length(Pairs)
18         for j=1:length(Pairs)
19
20             cmp=Compare(R,C,Pairs{i},Pairs{j},eps);
21
22             if(cmp==1)
23                 Pairs{j}=[];
24             end
25
26             if(cmp==2)
27                 Pairs{i}=[];
28             end
29
30         end
31     end
32
33     Pairs=Pairs(~cellfun('isempty',Pairs))
34

```

פונקציה זו היא מימוש לאלגוריתם שנמצא במאמר, היא עוברת על כל זוג קבוצות של אסטרטגיות ובודקת כל פעם את האסטרטגיה המועדפת לפי ההגדרה ובסוף היא מחזירה את כל האסטרטגיות שמקיימות את תנאי ϵ -שיווי משקל נאש.

דוגמאות הרצה:

```

Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\exe.m
1 R1=10*[1,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
2 C1=10*[1,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
3
4 celldisp(ApproximatedNash(R1,C1,6));
5
6 R2=20*[1,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
7 C2=20*[1,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
8
9 celldisp(ApproximatedNash(R2,C2,6));
10
11 R3=50*[1,-1,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
12 C3=-50*[1,-1,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,0]
13
14 celldisp(ApproximatedNash(R3,C3,6));

```

נרץ את האלגוריתם עם 3 מטריצות שונות. נכוון את המטריצות וה- ϵ כך שבכל דוגמה נקבל

סיטואציה אחרת . כך שבדוגמא א נקבל שרק חלק מהאסטרטגיות מקימות את תנאי ϵ -שיווי משקל נאש (7 אסטרטגיות מתוך 400) . בדוגמא ב נקבל ϵ -שיווי משקל נאש אחד ויחיד בדוגמא ג נקבל שכל האסטרטגיות מהוות ϵ -שיווי משקל נאש .

הפלט של ההרצה :

דוגמא א :

```

Command Window
>> exe

R1 =

    10     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

C1 =

    10     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

KUV =

fx      0      0      0      1.0000
Command Window
      0      0      0.5000      0.5000
      0      0      1.0000      0
      0      0.5000      0      0.5000
      0      0.5000      0.5000      0
      0      1.0000      0      0
      0.5000      0      0      0.5000
      0.5000      0      0.5000      0
      0.5000      0.5000      0      0
      1.0000      0      0      0

ans{1}{1} =

      0.5000      0      0      0.5000

ans{1}{2} =

fx      1      0      0      0

```

```

Command Window
ans{2}{1} =
    0.5000         0    0.5000         0

ans{2}{2} =
    1         0         0         0

ans{3}{1} =
    0.5000    0.5000         0         0

ans{3}{2} =
fx  1         0         0         0

Command Window
ans{4}{1} =
    1         0         0         0

ans{4}{2} =
    0.5000         0         0    0.5000

ans{5}{1} =
    1         0         0         0

ans{5}{2} =
fx  0.5000         0    0.5000         0

Command Window
ans{6}{1} =
    1         0         0         0

ans{6}{2} =
    0.5000    0.5000         0         0

ans{7}{1} =
    1         0         0         0

ans{7}{2} =
fx  1         0         0         0

```

```

Command Window
R2 =
    20     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

C2 =
    20     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

KUV =
     0     0     0     1.0000
     0     0     0.5000     0.5000
     0     0     1.0000     0

fx
Command Window
     0     0.5000     0     0.5000
     0     0.5000     0.5000     0
     0     1.0000     0     0
    0.5000     0     0     0.5000
    0.5000     0     0.5000     0
    0.5000     0.5000     0     0
    1.0000     0     0     0

ans{1}{1} =
     1     0     0     0

ans{1}{2} =
     1     0     0     0

fx

```

```

Command Window
R3 =
    50   -50     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

C3 =
   -50    50     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0

KUV =
     0     0     0    1.0000
     0     0    0.5000    0.5000
fx  0     0    1.0000     0

Command Window
     0    0.5000     0    0.5000
     0    0.5000    0.5000     0
     0    1.0000     0     0
    0.5000     0     0    0.5000
    0.5000     0    0.5000     0
    0.5000    0.5000     0     0
    1.0000     0     0     0

ans{1}{1} =
     0     0     0     1

ans{1}{2} =
     0     0     0     1
fx

```

3.2 סימולציה לחישוב חסם ל- k של משפט 2.1

בחלק זה נבצע סימולציה שבודקת עבור איזה k יובטח לנו קיום תנאי המשפט וקיום אסטרטגית ϵ -שיווי משקל נאש.

```

Editor - C:\Users\Nashat\Documents\MATLAB\K_Simulation.m
func.m  ApproximatedNash.m  GenerateKUV.m  Compare.m  Utility.m  exe.m  K_Simulation.m  +
1 - syms x n
2 - for n=2:70
3 -     eqn = 8*x+2*n*x^4+8*n*x==1;
4 -     root=solve(eqn, x);
5 -
6 -     root=root(imag(root)==0&real(root)>0);
7 -
8 -     a=-8*log(root)/log(n);
9 -
10 -    plot(n,a,'*');
11 -    hold on
12 -
13 -    if (n<8)
14 -        text(double(n)+0.3,double(a),num2str(double(a)));
15 -    end
16 -    xlabel('n-number of strategies');
17 -    ylabel('a');
18 - end
19

```

בהנחה ש- k הוא מהצורה $k = a * \frac{\ln n}{\epsilon^2}$ אז אם נסתכל על האי-שוויון שקיבלנו בהוכחה של משפט 2.1:

$$8e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} + 2n \left[e^{-\frac{k\epsilon^2}{2}} + 4e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}} \right] < 1$$

נסמן $x = e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$ ולכן:

$$8 * x + 2n * [x^4 + 4 * x] < 1$$

באלגוריתם שמימשנו למעלה פתרנו את המשוואה $8 * x + 2n * [x^4 + 4 * x] = 1$

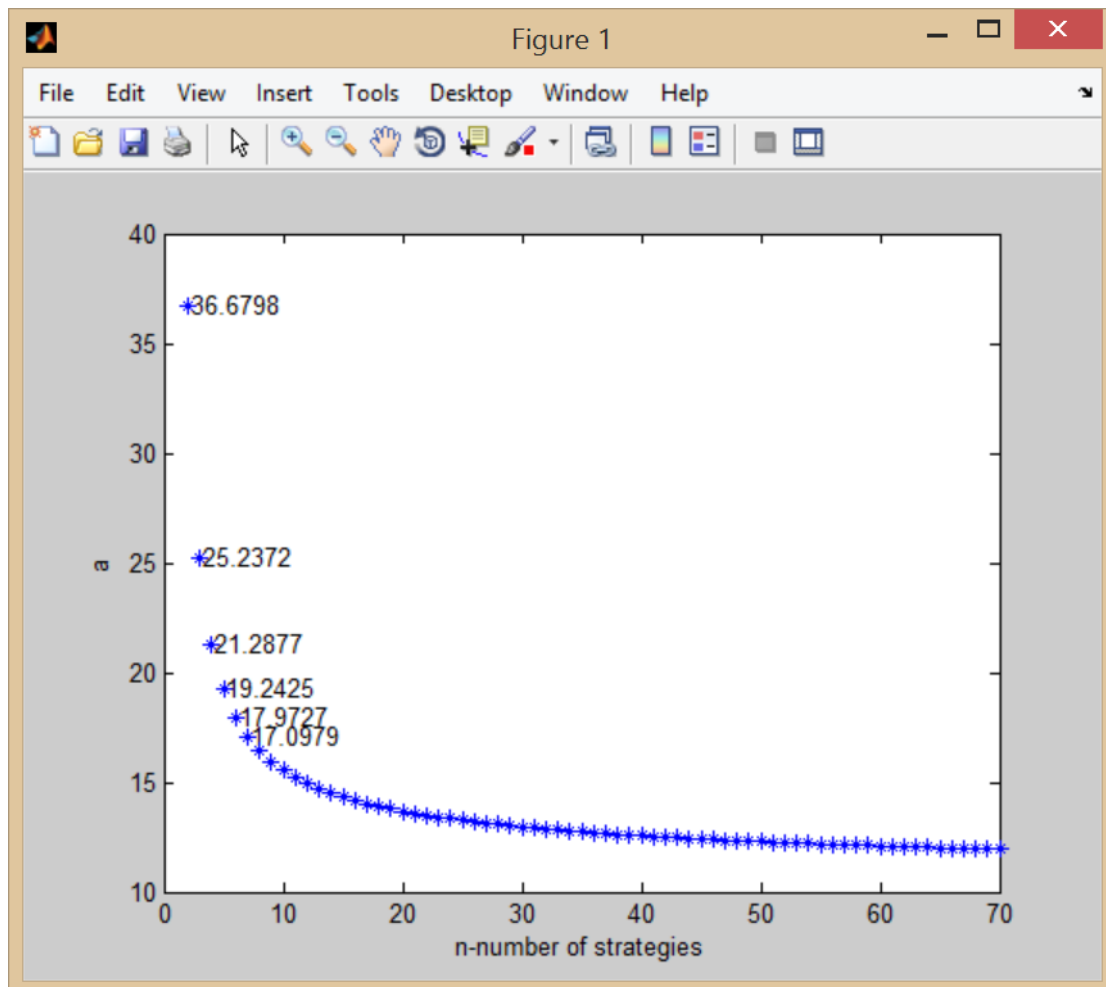
ואז מ- $x = e^{-\frac{k\epsilon^2}{8}}$ נקבל:

$$k = -8 * \frac{\ln x}{\epsilon^2}$$

אם נשווה את ה- k שקיבלנו לצורה $k = a * \frac{\ln n}{\epsilon^2}$ נקבל:

$$-8 * \frac{\ln x}{\epsilon^2} = a * \frac{\ln n}{\epsilon^2} \rightarrow a = -8 * \frac{\ln x}{\ln n}$$

ולכן עבור כל n ו- ε אפשר לחשב את החסם $k = a * \frac{\ln n}{\varepsilon^2}$ המינימלי שמקיים את השוויון. ולכן
 עבור כל $k' \geq a * \frac{\ln n}{\varepsilon^2}$ מתקיים האי-שוויון. בגרף הבא נציג את התולת בין n ו- a וכמקרה פרטי
 התוצאה עבור המשפט 2.1 כלומר החל מ- $n = 2$ ה- $a = 36.6 \dots \approx 37$.



1. ספר תורת המשחקים, שמואל זמיר, מיכאל משלר, אילון סולן
2. Playing large games using simple strategies R. Lipton, E. Markakis, and A. Mehta, Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic commerce (EC-03), 2003
3. <http://www.wikipedia.org>