

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

התמרת פורייה הקוואטרניונית

דלית זפרן ושני בן-חמו

Quaternion Fourier Transforms

Dalit Zafran & Shani Ben-Hemo



פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

התמרת פורייה הקוואטרניונית

דלית זפרן ושני בן חמו

Quaternion Fourier Transforms

Dalit Zafran & Shani Ben-Hemo

Advisor:

Dr. Victor Ostrovski

מנחה:

ד"ר אוסטרובסקי ויקטור

Karmiel

כרמיאל

2015

תקציר

בפרויקט זה למדנו וחקרנו אודותיהם של המספרים הקוטרניים. תחילה למדנו מה הם מספרים קוטרניים ומה הן התכונות הבסיסיות של האלגברה זו, האלגברה הלא-קומוטטיבית הראשונה. לאחר מכן העמקנו והוכחנו את תכונותיה של התמרת פורייה הקוטרנית, וכמו כן פתרנו משואות דיפרנציאליות חשובות המכילות פונקציות קוטרניות כדוגמת משוואת שרדינגר ומשוואת החום. לבסוף העמקנו באחד מהשימושים העיקריים של התמרת פורייה הקוטרנית הבדידה שהוא כמובן עיבוד תמונות צבעוניות. למדנו מהו הליך עיבוד התמונה, כיצד הוא מתבצע ויישמנו אותו ב-MATLAB על גבי תמונות שונות תוך כדי בדיקת יעילותו.

הקדשות ותודות:

- ברצוננו להודות מקרב לב למנחה הפרויקט, ד"ר אוסטרובסקי ויקטור על תמיכתו המלאה
לכל אורך הפרויקט ועל הידע הרב שהעניק לנו במסגרת הפרויקט .

עמוד

תוכן עניינים:

1	1. מבוא
1-2	1.1. רקע היסטורי
3	2. אלגברה קוטרניונית
3-4	2.1. הצגת המספר הקוטרניוני
5	2.2. תכונותיהם הבסיסיות של המספרים הקוטרניונים
5	2.2.1. חיבור וחסור של מספרים קוטרניונים
5	2.2.2. הכפלה של מספרים קוטרניונים
5	2.2.3. הצגה של מספר קוטרניוני ממשי
5	2.2.4. הכפלה בסקלר
6	2.2.5. מספר קוטרניוני צמוד
6	2.2.6. מספר קוטרניוני הופכי
6	2.2.7. נורמה של קוטרניון
7	3. תכונות התמרת פורייה הקוטרניונית הרציפה והוכחתן
8	3.1. תכונת הלינאריות
8	3.2. תכונת ההזזה בזמן
9	3.3. תכונת ההזזה בתדר
9	3.4. תכונת סקילינג בזמן
10	3.5. תכונת סקילינג בתדר
10	3.6. תכונת פונקציה דלתא
11	3.7. תכונת הזזת פונקציה דלתא
11-12	3.8. תכונת הגזירה
12-13	3.9. תכונות הגזירה המשך
13	3.10. תכונת Simplex
14	3.11. תכונת Pure perplex
14	3.12. תכונת Real, Even, Symmetric
15	3.13. תכונת Pure μ -imaginary, Odd, Anti-Symmetric
16	4. חלק ראשון- משוואות דיפרנציאליות חלקיות מעל Q
16-17	4.1. משוואת לפלס
18-21	4.2. משוואת פואסון

22-23	4.3. משוואת Helmholtz
24-26	4.4. משוואת החום
27-29	4.5. משוואת Schrodinger עבור בעיית פיזור
30	5. חלק שני- עיבוד תמונה ועיבוד אותות
30	5.1. תכונות והגדרות עבור התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה ממימד שני
30-31	5.1.1. התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה וההפוכה ב-2D ($DQFT^{-1}$)
31-32	5.1.2. תכונת ההזזה
32	5.1.3. תכונת הנורמה ממעלה שנייה
32	5.1.4. משפט התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה הצמודה
33-34	5.2. תהליך עיבוד התמונה ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה
34-37	5.3. יישום הפחתת רעשים ע"י פילטר גאוסני והתמרת פורייה הקוטרניונית
38	5.3.1. השפעת תדר הסף בפונקציית הפילטר על התמונה הסופית
39	5.4. יישום זיהוי קצוות של תמונה צבעונית בעלת ייצוג קוטרניוני
39	6. סיכום
40	7. סימוכין
40	8. מקורות נוספים

איורים:

2	איור 1 : שלט המדווח על גילוי של המילטון על גשר ברוגהם [1]
7	איור 2 : תכונות התמרת פורייה הקוטרניונית 1D [2]
33	איור 3 : תהליך עיבוד תמונה צבעונית במרחב התדר ע"י פירוק RGB [4]
34	איור 4 : תהליך עיבוד תמונה צבעונית במרחב התדר ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית [4]
37	איור 5 : תמונה מקורית [5]
37	איור 6 : תמונה עם רעש
37	איור 7 : איור 6 לאחר פילטר LP גאוסיאני
37	איור 8 : תמונה עם רעש
37	איור 9 : איור 8 לאחר פילטר LP גאוסיאני
38	איור 10 : תמונה עם רעש
38	איור 11 : איור 10 לאחר פילטר LP גאוסיאני

- איור 12 : תמונה מקורית [6] 38
- איור 13 : איור 12 לאחר הוספת רעש 38
- איור 14 : תמונה עם $D_L = 10$ 38
- איור 15 : תמונה עם $D_L = 30$ 38
- איור 16 : תמונה עם $D_L = 60$ 38
- איור 17 : תמונה מקורית [7] 39
- איור 18 : איור 17 לאחר הפעלת זיהוי קצוות 39

רשימת קיצורים

FT	F ourier T ransform
DFT	D iscrete F ourier T ransform
FFT	F ast F ourier T ransform
FFT2	F ast F ourier T ransform 2D
FFT2^{-1}	I nverse F ast F ourier T ransform 2D
QFT	Q uaternion F ourier T ransform
QDFT	Q uaternion D iscrete F ourier T ransform
DQFT2^{-1}	D iscrete I nverse Q uaternion F ast F ourier T ransform 2D
QFFT2^{-1}	I nverse Q uaternion F ast F ourier T ransform 2D
FQFT2	F ast Q uaternion F ourier T ransform 2D
RGB	R ed G reen B lue
LP	L ow p ass

1. מבוא

אלגברת הקוטרניונים של המילטון, המסומנת לרוב בסימון $\mathbb{H}$, היא מבנה אלגברי שאבריו הם מספרים מהצורה $a + ib + jc + kd$ כאשר a, b, c, d הם מספרים ממשיים ו- i, j, k מקיימים: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

עצם קיומם של מספרים מרוכבים הציג שאלה מפתה למתמטיקאים של המאה ה-18 וה-19. בעוד שמספרים מרוכבים שימשו לייצוג נקודות במישור הדו ממדי באופן המאפשר ביצוע פעולות חיבור וכפל נשאלה השאלה, האם ניתן לייצג באופן מקביל נקודות במרחב התלת-ממדי. המתמטיקאי האירי ויליאם רואן המילטון, חיפש במשך כמעט עשור דרך לייצג נקודות במרחב, בדרך המאפשרת לבצע על הנקודות פעולות חיבור וכפל, לפני המצאת הווקטור. ניסיונותיו לייצג באופן מקביל נקודות במרחב התלת-ממדי כשלו, אולם בעת טיול עם אשתו, מצא את הבסיס לנוסחת הכפל של רביעיות מספרים, ומכאן נולדה ההרחבה למרחב ארבעה ממדים בדמות הקוטרניונים. הקוטרניונים מהווים הרחבה של השדה הקומפלסקי משני ממדים לארבעה ממדים. השימוש בקוטרניונים חייב את נטישת חוק החילוף, דבר שהיה מהפכני באותם ימים ובעצם היווה את האלגברה הלא-קומוטטיבית הראשונה. בהמשך, פותחו הווקטור והמטריצה והשימוש בקוטרניונים לצורכי הצגה גרפית דעך. עם זאת, עדיין קיימים שימושים בקוטרניונים, למשל בגרפיקה תלת ממדית ובעיבוד תמונות צבעוניות.

1.1 רקע היסטורי

הקוטרניונים הומצאו על ידי המתמטיקאי האירי ויליאם רואן המילטון כפי שהוסבר במבוא ופורסמו על ידיו בשנת 1843. התגלית שלו סיפקה את המסגרת המתמטית הראשונה לטיפול בוקטורים כמותיים. למרות שהמילטון הגיע להמצאה שלו דרך האלגברה, היה ברור לו כי לקוטרניונים יש פוטנציאל גאומטרי משמעותי, והוא החל מיד לחקור את התכונות הוקטוריות והרוטציות שלהם. בשנת 1840, 3 שנים לפני גילוי של המילטון, פירסם מתמטיקאי צרפתי בשם בינג'מין אולינד רודריגז מאמר המתאר איך לייצג סיבובים רצופים על צירים שונים ע"י סיבוב יחיד על הציר השלישי. בנוסף הוא הציג את הפתרון שלו ע"י שימוש בסקלר וציר תלת ממדי, אלמנטים אלו מהווים את עיקר הגישה של המילטון. כמו כן ממצאים מראים שהמתמטיקאי הגדול קרל פרידריך גאוס גילה את הקוטרניונים בשנת 1819 אך לא פרסם את ממצאיו. המילטון שאב השראה מההקבלה בין מספרים מרוכבים לבין נקודות על מישור דו-ממדי. ההקבלה מבוססת על כך שמספר מרוכב ניתן לכתוב בתור $c = x + yi = re^{i\theta}$. בנוסף, ניתן לייחס אותו לנקודה שהקורדינטות שלה הם (x, y) . באופן דומה ניתן לתאר פעולות גאומטריות באמצעות פעולות אלגבריות על מספרים מרוכבים. לדוגמה סיבוב של נקודה $c = x + yi$ בזווית α מתבצע באופן הבא:

$$c' = ce^{i\alpha} = c(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$

בהתבסס על הקבלה זו, חיפש המילטון הכללה של המספרים המרוכבים שתאפשר לתאר גאומטריה תלת-ממדית - $a + bi + cj$ כאשר i, j הם החלקים המדומים שהשורש שלהם הוא -1. חיפושיו של המילטון לנוסחא שתאפשר הכפלה של מספרים בייצוג כזה עלו בתוהו ולא יכלו לעבוד עם הרחבה אלגברית.

$$z_1 = a_1 + b_1i + c_1j$$

$$z_2 = a_2 + b_2i + c_2j$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j)(a_2 + b_2i + c_2j) = \\ &= a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2j + b_1a_2i + b_1b_2ii + b_1c_2ij + c_1a_2j + c_1b_2ji + c_1c_2jj = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)j + b_1c_2ij + c_1b_2ji \end{aligned}$$

הפעולה אינה סגורה כיוון שהיא מכילה מונחים של ij ו- ji . גם אם נניח כי $ij = -ji$ נשאר עם הביטוי $(b_1c_2 - c_1b_2)ij$.

ב-16 באוקטובר 1843, בעת טיול עם אשתו לאורך התעלה המלכותית בדבלין, בעת שהשניים עברו בסמוך לגשר ברוגהם (Brougham Bridge) מצא המילטון את הבסיס לנוסחת הכפל של רביעיות מספרים. התלהבותו של המילטון מהתגלית הייתה כה גדולה עד כי, במעשה שכונה מאוחר יותר "אקט של ואנדליזם מתמטי" הוא חרט על הגשר את הנוסחה הבסיסית לכפל קוטרניונים:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$



איור 1: שלט המדווח על גילוי של המילטון על גשר ברוגהם [1]

המילטון כינה את המספרים שגילה בשם 'קוטרניונים' והקדיש למחקר וההפצה של הרעיון את שארית חייו. ספרו האחרון והארוך ביותר של המילטון "יסודות הקוטרניונים" התפרסם לאחר מותו, ב-1863.

תלמידיו וממשיכי דרכו של המילטון, פיטר טייט ובנימין פירס הרחיבו על האופן שבו ניתן להשתמש בקוטרניונים לתיאור פרקים בגאומטריה ובפיזיקה. כך לדוגמה הם הראו שאת משוואות מקסוול ניתן לכתוב באופן פשוט באמצעות קוטרניונים.

בסוף שנות ה-80 התנהל ויכוח מדעי ער בין התומכים בשימוש בקוטרניונים לתיאור גאומטריה תלת-ממדית, לבין התומכים בשימוש באנליזה וקטורית. בין היתר בזכות תמיכתם של פיזיקאים ומתמטיקאים כמו ג'וסיה וילארד גיבס ואוליבר הביסייד הפך השימוש באנליזה וקטורית למקובל על הרוב המכריע של הקהילה המדעית. תמיכה זאת נבעה בין היתר מכך שתיאור של גאומטריה אלגברית על ידי וקטורים נחשבה לפשוטה ואינטואיטיבית יותר, ומשום שהיא ניתנת להכללה לכל מספר שהוא של ממדים.

לקראת סוף המאה ה-20 החל מתגבר השימוש בקוטרניונים לתיאור סיבובים במגוון של תחומים הכוללים גרפיקה ממוחשבת, אווירודינמיקה, תורת הבקרה, עיבוד אותות, פיזיקה וביואינפורמטיקה.

בנוסף משחק המחשב טומב רידר משנת 1996 נחשב למשחק המסחרי הראשון שהמנוע הגרפי שלו מבוסס על קוטרניונים, והיום נעשה בקוטרניונים שימוש במרבית משחקי המחשב המסחריים.

2. אלגברה קוטרניונית:

הימלטון הגדיר את המספר הקוטרניוני באופן הבא:

$$q = s + ai + bj + ck ; s, a, b, c \in \mathbb{R}$$

אשר מקיים את התנאים:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k ; ji = -k$$

$$jk = i ; kj = -i$$

$$ki = j ; ik = -j$$

2.1 הצגת המספר הקוטרניוני:

נסתכל על שני הצגות שונות (הימלטוני וזוג סדור) עבור המספר הקוטרניוני:

$$(1) q = s + xi + yj + zk$$

$$(2) q = [s, v]$$

כאשר $s, x, y, z \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$

נרצה להראות כי הצגה (2) שקולה להצגה (1):

נסתכל על שני מספרים קוטרניונים q_a, q_b לפי ההצגה (1):

$$q_a = s_a + x_a i + y_a j + z_a k$$

$$q_b = s_b + x_b i + y_b j + z_b k$$

ונראה כי נוכל להציג את q_a, q_b באופן הבא:

$$q_a = [s_a, a] ; s_a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^3$$

$$q_b = [s_b, b] ; s_b \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3$$

נשים לב שבגישה זו נקבל את קוטרניוני היחידה בצורה הבאה:

$$i = [0, i] ; j = [0, j] ; k = [0, k]$$

חיבור

$$\begin{aligned} q_a + q_b &= (s_a + x_a i + y_a j + z_a k) + (s_b + x_b i + y_b j + z_b k) \\ &= (s_a + s_b) + (x_a + x_b) i + (y_a + y_b) j + (z_a + z_b) k \end{aligned}$$

$$q_a + q_b = [s_a, a] + [s_b, b] = [s_a + s_b, a + b]$$

ניתן לראות כי היא סגורה לחיבור.

מכפלה

$$\begin{aligned} q_a q_b &= (s_a + x_a i + y_a j + z_a k)(s_b + x_b i + y_b j + z_b k) \\ &= (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b) + (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a) i + \\ &\quad + (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a) j + (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a) k \end{aligned}$$

אם ניקח בחשבון את ההצגה שלנו עבור קוורטניוני היחידה, יחד עם העובדה כי ניתן להציג את $1 = [1, 0]$, נוכל להציג את התוצאה שקבילנו בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} [s_a, a][s_b, b] &= (s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b)[1, 0] + (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a)[0, i] + \\ &\quad + (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a)[0, j] + (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a)[0, k] = \\ &= [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, 0] + [0, (s_a x_b + s_b x_a + y_a z_b - y_b z_a) i] + \\ &\quad + [0, (s_a y_b + s_b y_a + z_a x_b - z_b x_a) j] + [0, (s_a z_b + s_b z_a + x_a y_b - x_b y_a) k] = \\ &= [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, 0] + [0, s_a (x_b i + y_b j + z_b k) + \\ &\quad + s_b (x_a i + y_a j + z_a k) + (y_a z_b - y_b z_a) i + (z_a x_b - z_b x_a) j + (x_a y_b - x_b y_a) k] = \\ &= [s_a s_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b, s_a (x_b i + y_b j + z_b k) + s_b (x_a i + y_a j + z_a k) + \\ &\quad + (y_a z_b - y_b z_a) i + (z_a x_b - z_b x_a) j + (x_a y_b - x_b y_a) k] \end{aligned}$$

אם נציב:

$$\begin{aligned} a &= x_a i + y_a j + z_a k \\ b &= x_b i + y_b j + z_b k \end{aligned}$$

נקבל כי:

$$[s_a, a][s_b, b] = [s_a s_b - \mathbf{ab}, s_a \mathbf{b} + s_b \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$$

ניתן לראות שגם פעולת הכפל היא פעולה סגורה.

תחת פעולות אלה של חיבור וכפל, הקוורטניונים מהווים חוג. באופן מפתיע, לכל קוורטניון (פרט לקוורטניון האפס) יש איבר הופכי, ומה שמונע מהקוורטניונים להיות שדה הוא דווקא אי-קיום תכונת הקומוטטיביות (חילופיות): עבור קוורטניונים q_a, q_b בדרך כלל $q_a q_b \neq q_b q_a$.

אם כך הראינו כי ההגדרות הן שקולות ולכן נוכל לעבוד עם כל אחת מההגדרות הנ"ל. לשם פשטות נעבוד עם הגדרה (2).

2.2 תכונותיהם הבסיסיות של המספרים הקוטרניונים:

נגדיר את 2 המספרים הקוטרניונים הבאים אשר בעזרתם נראה את הגדרות האלגברה הקוטרניונית:

$$q_a = [s_a, a] = [s_a, x_a i + y_a j + z_a k]$$

$$q_b = [s_b, b] = [s_b, x_b i + y_b j + z_b k]$$

2.2.1 חיבור וחיסור של מספרים קוטרניונים:

$$q_a + q_b = [s_a + s_b, a + b]$$

$$q_a - q_b = [s_a - s_b, a - b]$$

2.2.2 הכפלה של מספרים קוטרניונים:

$$\begin{aligned} q_a q_b &= [s_a, a][s_b, b] \\ &= [s_a s_b - a \cdot b, s_a b + s_b a + a \times b] = \\ &= \begin{bmatrix} s_a & -x_a & -y_a & -z_a \\ x_a & s_a & -z_a & y_a \\ y_a & z_a & s_a & -x_a \\ z_a & -y_a & x_a & s_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_b \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

וכמו שציינו לפני כן לרוב $q_a q_b \neq q_b q_a$.

2.2.3 הצגה של מספר קוטרניוני ממשי:

$$q = [s, 0]$$

נשים לב כי כפל של שני קוטרניונים ממשיים גם הוא מספר קוטרניוני ממשי:

$$q_a = [s_a, 0]$$

$$q_b = [s_b, 0]$$

$$q_a q_b = [s_a, 0][s_b, 0] = [s_a s_b, 0]$$

2.2.4 הכפלה בסקלר:

$$q = [s, v]$$

$$\lambda = [\lambda, 0]$$

$$\lambda q = [\lambda, 0][s, v] = [\lambda s, \lambda v]$$

2.2.5 מספר קוטרניוני צמוד:

באנלוגיה למספרים מרוכבים, מגדירים צמוד של קוטרני באופן הבא:

$$q^* = a - (bi + cj + dk)$$

כלומר

$$q^* = [s, -v]$$

בנוסף:

$$(q_a q_b)^* = q_a^* q_b^*$$

2.2.6 מספר קוטרניוני הופכי:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

בנוסף:

$$(q_a q_b)^{-1} = q_a^{-1} q_b^{-1}$$

2.2.7 נורמה של קוטרניון:

באנלוגיה למספרים מרוכבים, מגדירים נורמה של קוטרני באופן הבא:

$$|q| = \sqrt{s^2 + v^2} ; q = [s, v], v = |v|$$

$$|q| = |a + (bi + cj + dk)| = \sqrt{q\tilde{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

כלומר אם נחשב את המכפלה של מספר קוטרניוני עם הצמוד שלו נקבל:

$$\begin{aligned} q\tilde{q} &= [s, v][s, -v] = [s^2 - v \cdot (-v), -sv + sv + v \times (-v)] \\ &= [s^2 + v \cdot v, 0] = [s^2 + v^2, 0] \end{aligned}$$

באופן דומה ניתן להראות שגם עבור $\tilde{q}q$ תתקבל אותה התוצאה.

3. תכונות התמרת פורייה הקוטרניונית של משתנה רציף והוכחתן :

עקב תכונת החוסר קומוטטיביות של המספרים הקוטרניונים ישנן 2 הגדרות שונות להתמרת פורייה הקוטרניונית :

- התמרת פורייה הקוטרניונית הימנית והשמאלית 1D.

$$\text{Right - sided : } F^q\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mu\omega t} dt \quad \text{Left - sided : } F^q\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f(t)dt$$

- התמרת פורייה הקוטרניונית הימנית והשמאלית 2D.

$$\text{Right - sided : } F^q\{f(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-\mu_1\omega x} e^{-\mu_2\nu y} dx dy$$

$$\text{Left - sided : } F^q\{f(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu_1\omega x} e^{-\mu_2\nu y} f(x, y) dx dy$$

במסגרת פרויקט זה אנו נוכיח את תכונות התמרה ה-1D.

Left-sided:	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu\omega t} F(\omega) d\omega = f(t) \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f(t) dt$	
Right-sided:	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mu\omega t} d\omega = f(t) \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mu\omega t} dt$	
Time-domain	$f(t) \Rightarrow F(\omega)$	Frequency-domain
Time reversal	$f(-t) \Rightarrow F(-\omega)$	Frequency reversal
Quaternion conjugation	$\overline{f(t)} \Rightarrow$	
Reversed conjugation	$\overline{f(-t)} \Rightarrow$	
Real	$f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\omega) = \overline{F(-\omega)}$	Even, symmetric
Pure μ -imaginary	$f(t) \in \mu\mathbb{R} \Rightarrow F(\omega) = -\overline{F(-\omega)}$	Odd, anti-symmetric
Even, symmetric	$f(t) = f^*(-t) \Rightarrow F(\omega) \in \mathbb{R}$	Real
Odd, anti-symmetric	$f(t) = -f^*(-t) \Rightarrow F(\omega) \in \mu\mathbb{R}$	Pure μ -imaginary
Simplex	$f(t) \in \mathbb{C}_{\mu_2} \Rightarrow F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$	
Pure perplex	$f(t) \in \mathbb{C}_{\mu_2\mu} \Rightarrow F(-\omega) = -\overline{F(\omega)}$	
Time shift	$f(t - \tau) \Rightarrow e^{-\mu\omega\tau} F(\omega)$	(Left-sided transform)
	$f(t - \tau) \Rightarrow F(\omega) e^{-\mu\omega\tau}$	(Right-sided transform)
Modulation (left-sided transform)	$e^{\mu\nu t} f(t) \Rightarrow F(\omega - \nu)$	Frequency shift
Modulation (right-sided transform)	$f(t) e^{\mu\nu t} \Rightarrow F(\omega - \nu)$	Frequency shift
Time scale	$f(\alpha t) \Rightarrow \frac{1}{ \alpha } F(\frac{\omega}{\alpha})$	
	$\frac{1}{ \alpha } f(\frac{t}{\alpha}) \Rightarrow F(\alpha\omega)$	Frequency scale
Linearity	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \Rightarrow \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$	
Convolution	$(f_1 * f_2)(t) \Rightarrow$	
Correlation	$(f_1 \star f_2)(t) \Rightarrow$	
Delta function	$\delta(t) \sqrt{2\pi} \Rightarrow 1$	
Shifted delta	$\delta(t - \tau) \sqrt{2\pi} \Rightarrow e^{-\mu\omega\tau}$	
	$e^{\mu\nu t} \Rightarrow \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \nu)$	Shifted delta
	$1 \Rightarrow \sqrt{2\pi} \delta(\omega)$	Delta function
n th derivative	$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \Rightarrow (\mu\omega)^n F(\omega)$	(Left-sided transform)
n th derivative	$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \Rightarrow F(\omega) (\mu\omega)^n$	(Right-sided transform)
(Left-sided transform)	$t^n f(t) \Rightarrow \mu^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$	n th derivative
(Right-sided transform)	$t^n f(t) \Rightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \mu^n$	n th derivative

NOTE.- $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$, $\mu_2 \perp \mu$, and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

איור 2: תכונות התמרת פורייה הקוטרניונית 1D [2]

3.1 תכונת הליניאריות:

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \xrightarrow{QFT} \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Left - sided : } F^q \{ \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\mu\omega t} \alpha f_1(t) + e^{-\mu\omega t} \beta f_2(t)) dt = \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f_1(t) dt + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f_2(t) dt = \\ &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Right - sided : } F^q \{ \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-\mu\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1(t) e^{-\mu\omega t} + \beta f_2(t) e^{-\mu\omega t}) dt = \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-\mu\omega t} dt + \beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-\mu\omega t} dt = \\ &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) \end{aligned}$$

3.2 תכונת ההזזה בזמן:

$$f(t-\tau) \xrightarrow{QFT} e^{-\mu\omega\tau} F(\omega) \quad (\text{Left - sided transform}) :$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F^q \{ f(t-\tau) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f(t-\tau) dt = \left[\begin{array}{l} t-\tau = x \\ dt = dx \\ t = x+\tau \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega(x+\tau)} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega x} e^{-\mu\omega\tau} f(x) dx = \\ &= e^{-\mu\omega\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega x} f(x) dx = e^{-\mu\omega\tau} F(\omega) \end{aligned}$$

$$f(t-\tau) \xrightarrow{QFT} F(\omega) e^{-\mu\omega\tau} \quad (\text{Right - sided transform}) :$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F^q \{ f(t-\tau) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-\mu\omega t} dt = \left[\begin{array}{l} t-\tau = x \\ dt = dx \\ t = x+\tau \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu\omega(x+\tau)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu\omega x} e^{-\mu\omega\tau} dx = \\ &= e^{-\mu\omega\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu\omega x} dx = F(\omega) e^{-\mu\omega\tau} \end{aligned}$$

3.3 תכונת ההזזה בתדר :

$$e^{\mu vt} f(t) \xleftrightarrow{QFT} F(\omega - \nu) \quad \text{Modulation(Left - sided transform) :}$$

הוכחה :

$$F^q \{e^{\mu vt} f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu \omega t} e^{\mu vt} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t(\omega - \nu)} f(t) dx = F(\omega - \nu)$$

$$f(t) e^{\mu vt} \xleftrightarrow{QFT} F(\omega - \nu) \quad \text{Modulation(Right - sided transform) :}$$

הוכחה :

$$F^q \{e^{\mu vt} f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu \omega t} f(t) e^{\mu vt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mu t(\omega - \nu)} dx = F(\omega - \nu)$$

3.4 תכונת סקילינג בזמן :

$$f(\alpha t) \xleftrightarrow{QFT} \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

הוכחה :

$$\text{Left - sided : } F^q \{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu \omega t} f(\alpha t) dt = \begin{bmatrix} \alpha t = x, & t = \frac{x}{\alpha}, & dt = \frac{1}{\alpha} dx \\ \text{if } \alpha < 0 \text{ } f(\alpha t) \notin L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H}) \Rightarrow \alpha \geq 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu \omega \frac{x}{\alpha}} f(x) \frac{1}{\alpha} dx = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\text{Right - sided : } F^q \{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-\mu \omega t} dt = \begin{bmatrix} \alpha t = x, & t = \frac{x}{\alpha}, & dt = \frac{1}{\alpha} dx \\ \text{if } \alpha < 0 \text{ } f(\alpha t) \notin L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H}) \Rightarrow \alpha \geq 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu \omega \frac{x}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} dx = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

3.5 תכונת סקילינג בתדר:

$$\frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \xrightarrow{QFT} F(\alpha\omega)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Left - sided : } F^q\left\{\frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \left[\begin{array}{l} \frac{t}{\alpha} = x, \quad t = \alpha x, \quad dt = \alpha dx \\ \text{if } \alpha < 0 \quad f(\alpha t) \notin L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H}) \Rightarrow \alpha \geq 0 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega\alpha x} \frac{1}{|\alpha|} f(x) |\alpha| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega\alpha x} f(x) dx = F(\alpha\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Right - sided : } F^q\left\{\frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\mu\omega t} dt = \left[\begin{array}{l} \frac{t}{\alpha} = x, \quad t = \alpha x, \quad dt = \alpha dx \\ \text{if } \alpha < 0 \quad f(\alpha t) \notin L^1(\mathbb{R}; \mathbb{H}) \Rightarrow \alpha \geq 0 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|} f(x) e^{-\mu\omega\alpha x} |\alpha| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mu\omega\alpha x} dx = F(\alpha\omega) \end{aligned}$$

3.6 תכונת פונקציית דלתא:

$$\delta(t)\sqrt{2\pi} \xrightarrow{QFT} 1$$

הוכחה:

$$\text{Left - sided : } F^q\{\delta(t)\sqrt{2\pi}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t)\sqrt{2\pi} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t) dt = e^{-\mu\omega 0} \delta(0) = 1$$

$$\text{Right - sided : } F^q\{\delta(t)\sqrt{2\pi}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\sqrt{2\pi} e^{-\mu\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\mu\omega t} dt = \delta(0) e^{-\mu\omega 0} = 1$$

$$1 \xrightarrow{QFT} \delta(t)\sqrt{2\pi}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Left - sided : } F^q\{1\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t) dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t) dt = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t) dt = \sqrt{2\pi} \delta(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Right - sided : } F^q\{1\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\mu\omega t} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\mu\omega t} dt = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-\mu\omega t} dt = \sqrt{2\pi} \delta(\omega) \end{aligned}$$

3.7 תכונת הזזת פונקציית דלתא:

$$\delta(t-\tau)\sqrt{2\pi} \xrightarrow{QFT} e^{-\mu\omega\tau}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Left-sided: } F^q\{\delta(t-\tau)\sqrt{2\pi}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t-\tau)\sqrt{2\pi} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \delta(t-\tau) dt = \\ &= [\delta(t-\tau) \Rightarrow t-\tau=0 \Rightarrow t=\tau] = e^{-\mu\omega\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Right-sided: } F^q\{\delta(t-\tau)\sqrt{2\pi}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\sqrt{2\pi} e^{-\mu\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-\mu\omega t} dt = \\ &= [\delta(t-\tau) \Rightarrow t-\tau=0 \Rightarrow t=\tau] = e^{-\mu\omega\tau} \end{aligned}$$

$$e^{\mu\omega t} \xrightarrow{QFT} \sqrt{2\pi}\delta(\omega-\nu)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \text{Left-sided: } F^q\{e^{\mu\omega t}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} e^{\mu\omega t} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t(\omega-\nu)} dt = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t(\omega-\nu)} dt = \sqrt{2\pi}\delta(\omega-\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Right-sided: } F^q\{e^{\mu\omega t}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu\omega t} e^{-\mu\omega t} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t(\omega-\nu)} dt = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t(\omega-\nu)} dt = \sqrt{2\pi}\delta(\omega-\nu) \end{aligned}$$

3.8 תכונת הגזירה:

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xrightarrow{QFT} (\mu\omega)^n F(\omega) \quad (\text{Left-sided transform}):$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F^q\left\{\frac{d^1}{dt^1} f(t)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-\mu\omega t} dt = \left[\begin{array}{l} u = e^{-\mu\omega t}, \quad dv = f'(t) \\ du = -\mu\omega e^{-\mu\omega t} dt, \quad v = f(t) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-\mu\omega t}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\mu\omega e^{-\mu\omega t}) dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mu\omega e^{-\mu\omega t} dt = \\ &= \mu\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mu\omega t} dt = \mu\omega F(\omega) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow F'(\omega) &= \mu\omega F(\omega) = (\mu\omega)^1 F(\omega) \\ \Rightarrow F''(\omega) &= \mu\omega \underbrace{F'(\omega)}_{=\mu\omega F(\omega)} = \mu\omega \cdot \mu\omega \cdot F(\omega) = (\mu\omega)^2 F(\omega) \\ \Rightarrow F'''(\omega) &= \mu\omega \underbrace{F''(\omega)}_{=\mu\omega \cdot \mu\omega F(\omega)} = \mu\omega \cdot \mu\omega \cdot \mu\omega \cdot F(\omega) = (\mu\omega)^3 F(\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F^q\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = (\mu\omega)^n F(\omega)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \xleftrightarrow{QFT} F(\omega) (\mu\omega)^n \quad \text{(Right-sided transform):}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} F^q \left\{ \frac{d^1}{dt^1} f(t) \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f'(t) dt = \left[\begin{array}{l} u = e^{-\mu\omega t}, \quad dv = f'(t) \\ du = -\mu\omega e^{-\mu\omega t} dt, \quad v = f(t) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{e^{-\mu\omega t}}_{\text{Bounded function}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)=0} \right) - \int_{-\infty}^{\infty} (-\mu\omega e^{-\mu\omega t}) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\omega e^{-\mu\omega t} f(t) dt = \\ &= \mu\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f(t) dt = F(\omega) \mu\omega \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow F'(\omega) &= F(\omega) \mu\omega = F(\omega) (\mu\omega)^1 \\ \Rightarrow F''(\omega) &= \underbrace{F'(\omega)}_{=\mu\omega F(\omega)} \mu\omega = F(\omega) \cdot \mu\omega \cdot \mu\omega = F(\omega) (\mu\omega)^2 \\ \Rightarrow F'''(\omega) &= \underbrace{F''(\omega)}_{=\mu\omega \cdot \mu\omega \cdot F(\omega)} \mu\omega = F(\omega) \cdot \mu\omega \cdot \mu\omega \cdot \mu\omega = F(\omega) (\mu\omega)^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F^q \left\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t) \right\} = F(\omega) (\mu\omega)^n$$

3.9 תכונות הגזירה המשך:

$$t^n f(t) \xleftrightarrow{QFT} \mu^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \quad \text{(Left-sided transform):}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} F(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} f(t) dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} e^{-\mu\omega t} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} (-\mu t) f(t) dt = \\ &= F^q \{ (-\mu t) f(t) \} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) = F^q \{ (-\mu t) f(t) \} \end{aligned}$$

$$\text{Multiplying both sides by } \mu \Rightarrow \mu \frac{d}{d\omega} F(\omega) = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} (-\mu t) f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} \underbrace{(-\mu \cdot \mu \cdot t)}_{= -(-1)=1} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu\omega t} t f(t) dt = F^q \{ t f(t) \}$$

$$\Rightarrow \mu \frac{d}{d\omega} F(\omega) = F^q \{ t f(t) \}$$

$$\text{Repeating this process we get } \mu^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) = F^q \{ t^n f(t) \}$$

$$t^n f(t) \xleftrightarrow{\text{QFT}} \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \mu^n \quad \text{(Right - sided transform) :}$$

הוכחה :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} F(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt = \\ &= F^q \{(-it) f(t)\} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) = F^q \{(-it) f(t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplying both sides by } \mu &\Rightarrow \left(\frac{d}{d\omega} F(\omega) \right) \mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt \right) \mu = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{(-i\mu \cdot \mu \cdot t)}_{= -(-1)=1} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t e^{-i\omega t} dt = F^q \{t f(t)\} \\ &\Rightarrow \frac{d}{d\omega} F(\omega) \mu = F^q \{t f(t)\} \end{aligned}$$

$$\text{Repeating this process we get } \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega) \mu^n = F^q \{t^n f(t)\}$$

3.10 תכונת Simplex :

$$f(t) \in C_{\mu_2} \xleftrightarrow{\text{QFT}} F(-\omega) = \bar{F}(\omega)$$

הוכחה :

$$f(t) \in C_{\mu_2} \Rightarrow \begin{cases} f_p(t) = 0 \\ f_s(t) \in C_{\mu_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \cos(\omega t) + \underbrace{f_p(t) \sin(\omega t)}_{=0} \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_s(t) \cos(\omega t) dt \Rightarrow F_s(-\omega) = F_s(\omega)$$

$$\Rightarrow F_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \sin(\omega t) - \underbrace{f_p(t) \cos(\omega t)}_{=0} \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_s(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow F_p(-\omega) = -F_p(\omega)$$

(Left - sided transform) :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_s(\omega) + \mu F_p(\omega) \Rightarrow F(-\omega) = F_s(-\omega) + \mu F_p(-\omega) = \begin{bmatrix} F_s(-\omega) = F_s(\omega) \\ F_p(-\omega) = -F_p(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= F_s(\omega) - \mu F_p(\omega) = \bar{F}(\omega) \end{aligned}$$

(Right - sided transform) :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_s(\omega) + F_p(\omega) \mu \Rightarrow F(-\omega) = F_s(-\omega) + F_p(-\omega) \mu = \begin{bmatrix} F_s(-\omega) = F_s(\omega) \\ F_p(-\omega) = -F_p(\omega) \end{bmatrix} = \\ &= F_s(\omega) - F_p(\omega) \mu = \bar{F}(\omega) \end{aligned}$$

3.11 תכונת Pure perplex :

$$f(t) \in C_{\mu_2} \mu \xrightarrow{QFT} F(-\omega) = -\bar{F}(\omega)$$

הוכחה:

$$f(t) \in C_{\mu_2} \mu \Rightarrow \begin{cases} f_p(t) \in C_{\mu_2} \mu \\ f_s(t) = 0 \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \cos(\omega t) + f_p(t) \sin(\omega t) \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_p(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow F_s(\omega) = -F_s(-\omega)$$

$$F_p(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \sin(\omega t) - f_p(t) \cos(\omega t) \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_p(t) \cos(\omega t) dt \Rightarrow F_p(\omega) = F_p(-\omega)$$

(Left - sided transform):

$$\begin{aligned} F(\omega) = F_s(\omega) + \mu F_p(\omega) \Rightarrow F(-\omega) = F_s(-\omega) + \mu F_p(-\omega) &= \begin{bmatrix} F_s(\omega) = -F_s(-\omega) \\ F_p(\omega) = F_p(-\omega) \end{bmatrix} = -F_s(\omega) + \mu F_p(\omega) = \\ &= -[F_s(\omega) - \mu F_p(\omega)] = \bar{F}(\omega) \end{aligned}$$

(Right - sided transform):

$$\begin{aligned} F(\omega) = F_s(\omega) + F_p(\omega) \mu \Rightarrow F(-\omega) = F_s(-\omega) + F_p(-\omega) \mu &= \begin{bmatrix} F_s(\omega) = -F_s(-\omega) \\ F_p(\omega) = F_p(-\omega) \end{bmatrix} = -F_s(\omega) + F_p(\omega) \mu = \\ &= -[F_s(\omega) - F_p(\omega) \mu] = \bar{F}(\omega) \end{aligned}$$

3.12 תכונת Real, Even, Symmetric :

$$f(t) \in R \xrightarrow{QFT} F(\omega) = -\bar{F}(\omega)$$

הוכחה:

$$f(t) \in R \Rightarrow \begin{cases} f_p(t) = 0 \\ f_s(t) \in R \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \cos(\omega t) + f_p(t) \sin(\omega t) \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_s(t) \cos(\omega t) dt \Rightarrow F_s(-\omega) = F_s(\omega)$$

$$F_p(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \sin(\omega t) - f_p(t) \cos(\omega t) \right] dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_s(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow -F_p(\omega) = F_p(-\omega)$$

(Left - sided transform):

$$F(\omega) = F_s(\omega) + \mu F_p(\omega) = \begin{bmatrix} F_s(-\omega) = F_s(\omega) \\ F_p(\omega) = -F_p(-\omega) \end{bmatrix} = F_s(-\omega) - \mu F_p(-\omega) = \bar{F}(-\omega)$$

(Right - sided transform):

$$F(\omega) = F_s(\omega) + F_p(\omega) \mu = \begin{bmatrix} F_s(-\omega) = F_s(\omega) \\ F_p(\omega) = -F_p(-\omega) \end{bmatrix} = F_s(-\omega) - F_p(-\omega) \mu = \bar{F}(-\omega)$$

3.13 תכונת Pure μ -imaginary, Odd, Anti-Symmetric :

$$f(t) \in \mu R \xrightarrow{QFT} F(\omega) = -\bar{F}(-\omega)$$

הוכחה:

$$f(t) \in \mu R \Rightarrow \begin{cases} f_p(t) \in \mu R \\ f_s(t) = 0 \end{cases}$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \cos(\omega t) + f_p(t) \sin(\omega t) \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_p(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow -F_s(-\omega) = F_s(\omega)$$

$$F_p(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left[f_s(t) \sin(\omega t) - f_p(t) \cos(\omega t) \right] dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f_p(t) \cos(\omega t) dt \Rightarrow F_p(\omega) = F_p(-\omega)$$

(Left - sided transform) :

$$\begin{aligned} F(\omega) = F_s(\omega) + \mu F_p(\omega) &= \begin{bmatrix} F_s(\omega) = -F_s(-\omega) \\ F_p(\omega) = F_p(-\omega) \end{bmatrix} = -F_s(-\omega) + \mu F_p(-\omega) = \\ &= -[F_s(-\omega) - \mu F_p(-\omega)] = -\bar{F}(-\omega) \end{aligned}$$

(Right - sided transform) :

$$\begin{aligned} F(\omega) = F_s(\omega) + F_s(\omega)\mu &= \begin{bmatrix} F_s(\omega) = -F_s(-\omega) \\ F_p(\omega) = F_p(-\omega) \end{bmatrix} = -F_s(-\omega) + F_p(-\omega)\mu = \\ &= -[F_s(-\omega) - F_p(-\omega)\mu] = -\bar{F}(-\omega) \end{aligned}$$

4. חלק ראשון- משוואות דיפרנציאליות חלקיות מעל Q

4.1 משוואת לפלס

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } G, \quad G = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y > 0\} \quad \partial G = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y = 0\}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{on } \partial G, \quad \{u : G \rightarrow Q, f : \partial G \rightarrow Q\}$$

כאן $W_{p,Q}^k(\Omega)$ הוא מרחב של Sobolov של פונקציות קוטרניוניות מעל תחום Ω .

אם $f \in W_{2,Q}^{k+\frac{1}{2}}(G)$ אזי קיים הפתרון $u \in W_{2,Q}^{k+1}(G)$ (הוכחה ניתן למצוא בספרות [1]).

תחילה נגדיר:

$$p_y(x) = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad (-\infty < x < \infty, y > 0)$$

$$P_y(\omega) = F^q \{p_y(x)\} = F^q \left\{ \frac{2y}{x^2 + y^2} \right\} = e^{-y|\omega|}$$

נבצע התמרת פורייה על 2 האגפים לפי X :

$$F^q \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} = \underbrace{F^q \{0\}}_{=0} \Rightarrow (\mu\omega)^2 F^q \{u(x, y)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F^q \{u(x, y)\} = 0$$

לכן ניתן להציג את ההתמרה כך:

$$F^q \{u(x, y)\} = U(\omega, y)$$

$$\Rightarrow (\mu\omega)^2 U(\omega, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(\omega, y) = 0$$

כעת נוכל להשתמש בפתרון משוואות דיפרנציאליות פשוטות ידוע:

$$U(\omega, y) = A(\omega)e^{-\omega y} + B(\omega)e^{\omega y}$$

לפי תנאי ההתחלה:

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow$$

$$U(\omega, 0) = F(\omega) = A(\omega) + B(\omega)$$

כדי למצוא פתרון יחיד ל- A ול- B ולהבטיח את קיומה של התמרת פורייה נדרוש ש- u תשאף לאפס במידה שווה במשתנה y כאשר $|x|$ שואף לאינסוף לכן:

$$u(x, 0) = f(x) \Rightarrow$$

$$A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega > 0 \\ F(\omega), & \omega \leq 0 \end{cases} \quad B(\omega) = \begin{cases} F(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(\omega, y) = \begin{cases} F(\omega)e^{-\omega y}, & \omega > 0 \\ F(\omega)e^{\omega y}, & \omega < 0 \end{cases} \Rightarrow U(\omega, y) = F(\omega)e^{-|\omega|y} = F(\omega)P(\omega)$$

$= P_y(\omega)$

נבצע התמרת פורייה הפוכה על 2 האגפים:

$$(F^q)^{-1} \{U(\omega, y)\} = (F^q)^{-1} \{F(\omega)P(\omega)\}$$

$$u(x, y) = f(x) * p(x)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t)p(x-t, y)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t) \frac{2y}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

4.1.1 משוואת פואסון

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \{u, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Q}\}$$

אם $f \in W_{2,Q}^k(\mathbb{R}^2)$ אזי קיים הפתרון $u \in W_{2,Q}^{k+2}(\mathbb{R}^2)$ (הוכחה ניתן למצוא בספרות [1]).

נגדיר אופרטור L :

$$L[u] = \nabla^2 u = f(x, y)$$

נציג את $u(x, y)$ באופן הבא באמצעות פונקציית גרין:

$$u(x, y) = G(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y) f(x', y) dx'$$

נראה כי ההצגה שקולה לבעיה המקורית כאשר $L[G] = \delta(x, y)$:

$$\begin{aligned} L[u] &= L \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y) f(x', y) dx' \right] = \int_{-\infty}^{\infty} L[G(x - x', y)] f(x', y) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x', y) f(x', y) dx' = f(x, y) \end{aligned}$$

**** פונקציית גרין G הינה פתרון לכל משוואה לא הומוגנית כאשר אגף שמאל שלה הינה פונקציית דלתא לכן:**

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x, y)$$

נפעיל את התמרת פוריה הקוטרניונית על שני האגפים:

$$\begin{aligned} F^q \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right\} &= F^q \{ \delta(x, y) \} \\ \underbrace{(\mu_1 \omega)^2}_{=-\omega^2} F^q \{ G(x, y) \} + \underbrace{(\mu_2 v)^2}_{=-v^2} F^q \{ G(x, y) \} &= \frac{1}{2\pi} \\ -\omega^2 F^q \{ G(x, y) \} - v^2 F^q \{ G(x, y) \} &= \frac{1}{2\pi} \\ -(\omega^2 + v^2) F^q \{ G(x, y) \} &= \frac{1}{2\pi} \\ F^q \{ G(x, y) \} &= -\frac{1}{2\pi} Pf \left(\frac{1}{\omega^2 + v^2} \right) \end{aligned}$$

כאשר Pf הינו סימון לכך שזו פונקציה מוכללת.

כעת נפעיל התמרת פורייה הקוטרניונית ההפוכה על שני האגפים:

$$(F^q)^{-1} \{ F^q \{ G(x, y) \} \} = (F^q)^{-1} \left\{ -\frac{1}{2\pi(\omega^2 + v^2)} \right\}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} Pf \iint_{R^2} \left(-\frac{1}{2\pi(\omega^2 + v^2)} \right) e^{\mu_1 \omega x} e^{\mu_2 v y} d\omega dv$$

נעבור כעת להצגה פולרית כאשר:

$$\begin{aligned}\omega &= r \cos \theta \\ v &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{\omega^2 + v^2}\end{aligned}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} Pf \iint_{\Delta} \left(-\frac{1}{2\pi \underbrace{(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)}_{=r^2}} \right) e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} r dr d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi} Pf \iint_{\Delta} \left(-\frac{r}{r^2} \right) e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} dr d\theta = -\frac{1}{4\pi} Pf \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} d\theta = -\frac{1}{4\pi} Pf \int_0^\infty \frac{dr}{r} I(r, x, y)$$

$$e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} \neq e^{\mu_1 r \cos \theta x + \mu_2 r \sin \theta y} \quad \text{מפאת חוסר הקומוטטיביות חשוב לזכור כי :}$$

כדי לחשב אינטגרל לפי הזווית θ נשתמש בנוסחת אויילר:

$$\begin{aligned}e^{\mu_1 r \cos \theta x} &= \cos(rx \cos \theta) + \mu_1 \sin(rx \cos \theta) \\ e^{\mu_2 r \sin \theta y} &= \cos(ry \sin \theta) + \mu_2 \sin(ry \sin \theta)\end{aligned}$$

תחילה נחשב את אינטגרל $I(r, x, y)$:

$$\begin{aligned}I(r, x, y) &= \int_0^{2\pi} e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos(rx \cos \theta) + \mu_1 \sin(rx \cos \theta)] [\cos(ry \sin \theta) + \mu_2 \sin(ry \sin \theta)] d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(rx \cos \theta) \cos(ry \sin \theta) + \underbrace{\mu_2 \cos(rx \cos \theta) \sin(ry \sin \theta)}_{\text{odd function} \Rightarrow =0} + \\ &\quad + \underbrace{\mu_1 \sin(rx \cos \theta) \cos(ry \sin \theta)}_{\text{odd function} \Rightarrow =0} + \underbrace{\mu_1 \mu_2 \sin(rx \cos \theta) \sin(ry \sin \theta)}_{\text{odd function} \Rightarrow =0}] d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(rx \cos \theta) \cos(ry \sin \theta) d\theta\end{aligned}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\cos \theta \cos \varphi = \frac{\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)}{2}$$

$$\begin{aligned} I(r, x, y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(rx \cos \theta) \cos(ry \sin \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[rx \cos \theta + ry \sin \theta] d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos[rx \cos \theta - ry \sin \theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \theta \right) \right] d\theta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \theta \right) \right] d\theta = \\ &= \left[\tan \alpha = \frac{y}{x}, \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \right] d\theta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) \right] d\theta = \end{aligned}$$

נעת נעזר שוב בזהות טריגונומטרית:

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi &= \frac{\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)}{2} + \frac{\sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi)}{2} = \sin(\theta + \varphi) \\ \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi &= \frac{\sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)}{2} - \frac{\sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi)}{2} = \sin(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(r, x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) \right] d\theta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin(\theta + \alpha)) \right] d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} (\sin(\theta - \alpha)) \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \left[r\sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta \right] d\theta = 2\pi J_0 \left[r\sqrt{x^2 + y^2} \right] \end{aligned}$$

כאשר $J_0(t)$ הינה פונקציית בסל (Bessel).

נחזור לפונקציית גרין שלנו:

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} Pf \int_0^\infty \frac{dr}{r} I(r, x, y) = -\frac{1}{4\pi} Pf \int_0^\infty \frac{dr}{r} \underbrace{2\pi J_0 \left[r \sqrt{x^2 + y^2} \right]}_{=I(r, x, y)} = -\frac{1}{2\pi} Pf \int_0^\infty \frac{J_0 \left[r \sqrt{x^2 + y^2} \right]}{r} dr$$

נחשב אינטגרל זה במובן של פונקציות מוכללות.

ידוע כי עבור וקטור דו-מימדי $\vec{x}$ הפונקציה $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$ הינה פונקציה מוכללת.

מסמנים: $Pf \frac{1}{|\vec{x}|^2}$.

קיים כלל לחישוב אינטגרל (מכפלה פנימית) של $Pf \frac{1}{|\vec{x}|^2}$ עם פונקציה $\varphi(\vec{x})$ והוא:

$$\left\langle Pf \frac{1}{|\vec{x}|^2}, \varphi(\vec{x}) \right\rangle = \int_{|\vec{x}| < 1} \frac{\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{0})}{|\vec{x}|^2} d^2x + \int_{|\vec{x}| > 1} \frac{\varphi(\vec{x})}{|\vec{x}|^2} d^2x$$

ולכן:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} Pf \int_0^\infty \frac{J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{r} dr = -\frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{1}{r}, J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right) - 1}{r} dr + \int_1^\infty \frac{J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{r} dr \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{J_0(u) - 1}{u} du + \int_1^{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{J_0(u)}{u} du \right] = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} + C_0 \right) \end{aligned}$$

כאשר C_0 הינו קבוע המוגדר באמצעות הנוסחה הבאה:

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du$$

קבוע C_0 ניתן להורדה מכיוון שפונקציה קבועה הינה פתרון של משוואת לפלס (הומוגנית).

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{ולכן:}$$

נעת לאחר שמצאנו את פונקציית גרין ניתן להגיד כי פתרון משוואת פואסון הינו:

$$u(x, y) = G(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^\infty G(x - x', y) f(x', y) dx' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} f(x', y) dx'$$

4.2 משוואת Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = f \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \{u, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Q}\}$$

אם $f \in W_{2,Q}^k(\mathbb{R}^2)$ אזי קיים הפתרון $u \in W_{2,Q}^{k+2}(\mathbb{R}^2)$ (הוכחה ניתן למצוא בספרות [1]).

נגדיר אופרטור L :

$$L[u] = \nabla^2 u + \lambda^2 u$$

נציג את $u(x)$ באופן הבא כפי שעשינו במשוואת פואסון כאשר G הינה פונקציית גרין:

$$u(x, y) = G(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y) f(x', y) dx'$$

נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה לפי משפט גרין:

$$L[G] = \delta(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \lambda^2 G = \delta(x, y)$$

נפעיל את התמרת פורייה הקוטרניונית על שני האגפים:

$$F^q \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \lambda^2 G \right\} = F^q \{ \delta(x, y) \}$$

$$\underbrace{(\mu_1 \omega)^2}_{=-\omega^2} F^q \{ G(x, y) \} + \underbrace{(\mu_2 v)^2}_{=-v^2} F^q \{ G(x, y) \} + \lambda^2 F^q \{ G(x, y) \} = \frac{1}{2\pi}$$

$$-\omega^2 F^q \{ G(x, y) \} - v^2 F^q \{ G(x, y) \} + \lambda^2 F^q \{ G(x, y) \} = \frac{1}{2\pi}$$

$$-(\omega^2 + v^2 - \lambda^2) F^q \{ G(x, y) \} = \frac{1}{2\pi}$$

$$F^q \{ G(x, y) \} = -\frac{1}{2\pi} pf \frac{1}{(\omega^2 + v^2 - \lambda^2)}$$

כעת נפעיל התמרת פורייה הקוטרניונית ההפוכה על שני האגפים:

$$(F^q)^{-1} \{ F^q \{ G(x, y) \} \} = (F^q)^{-1} \left\{ -\frac{1}{2\pi(\omega^2 + v^2 - \lambda^2)} \right\}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} pf \iint_{\mathbb{R}^2} \left(-\frac{1}{2\pi(\omega^2 + v^2 - \lambda^2)} \right) e^{i\mu_1 \omega x} e^{i\mu_2 v y} d\omega dv$$

נעבור כעת להצגה פולרית כאשר:

$$\begin{aligned}\omega &= r \cos \theta \\ v &= r \sin \theta \\ r &= \sqrt{\omega^2 + v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \frac{1}{2\pi} pf \iint_{\Delta} \left(-\frac{1}{2\pi \left(\underbrace{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_{=r^2} - \lambda^2 \right)} \right) e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} r dr d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} pf \iint_{\Delta} \left(-\frac{r}{r^2 - \lambda^2} \right) e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} dr d\theta = \frac{1}{4\pi} pf \int_0^\infty \left(-\frac{r dr}{r^2 - \lambda^2} \right) \int_0^{2\pi} e^{\mu_1 r \cos \theta x} e^{\mu_2 r \sin \theta y} d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} pf \int_0^\infty \left(-\frac{r dr}{r^2 - \lambda^2} \right) I(r, x, y)\end{aligned}$$

כאשר $I(r, x, y)$ זהה ל $I(r, x, y)$ אשר חושב להנ"ל עבור משוואת פואסון ולכן:

$$I(r, x, y) = 2\pi J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

נציב את $I(r, x, y)$ בפונקצית גרין:

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} pf \int_0^\infty \left(-\frac{r dr}{r^2 - \lambda^2} \right) I(r, x, y) = -\frac{1}{2\pi} pf \int_0^\infty \frac{r J_0 \left(r \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{r^2 - \lambda^2} dr$$

כפי שעשינו במשוואת פואסון נבצע רגוליזציה של האינטגרל, כלומר על פונקציה $\cdot pf \frac{1}{r^2 - \lambda^2}$

ונקבל כי :

$$G(x, y) = \frac{\mu}{4} H_0^{(1)}(\lambda \sqrt{x^2 + y^2})$$

כאשר $H_0^{(1)}(t)$ היא פונקצית Hankel.

כעת לאחר שמצאנו את פונקצית גרין ניתן להגיד כי פתרון משוואת Helmholtz הינו:

$$u(x, y) = G(x, y) * f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - x', y) f(x', y) dx' = \frac{\mu}{4} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\lambda \sqrt{(x - x')^2 + y^2}) f(x', y) dx'$$

4.3 משוואת החום

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (-\infty < x < \infty)$$

נגדיר את ההתמרה הקוטרניונית של u הימנית:

$$U(s, t) = F^q \{u(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-\mu s x} dx$$

נגזור את ההתמרה שלנו לפי t :

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = F_t^q \{u(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-\mu s x} dx \Rightarrow \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = F^q \{u_t(x, t)\}$$

נבצע התמרת פורייה על 2 האגפים ונשתמש בתכונת הליניאריות:

$$F^q \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = F^q \{0\}$$

$$F^q \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} - F^q \left\{ k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = 0 \Rightarrow F^q \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} - k F^q \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial U(s, t)}{\partial t} - k F^q \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} = \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} - k U(s, t) (\mu s)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = k U(s, t) (\mu s)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = -s^2 k U(s, t)$$

נבצע הפרדת משתנים:

$$U(s, t) = Q f(t)$$

כאשר Q הינו קבוע קוטרניוני.

נגזור את 2 האגפים לפי t ונקבל:

$$(ii) \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = Q \frac{df(t)}{dt}$$

לפי משוואות (i) ו-(ii) ניתן לראות כי:

$$\left. \begin{array}{l} (i) \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = -s^2 k U(s, t) \\ (ii) \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} = Q \frac{df(t)}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow Q \frac{df(t)}{dt} = -s^2 k U(s, t)$$

לפי הפרדת המשתנים:

$$\begin{aligned} U(s,t) = Qf(t) &\Rightarrow Q \frac{df(t)}{dt} = -s^2 k \underbrace{U(s,t)}_{=Qf(t)} \\ \Rightarrow Q \frac{df(t)}{dt} &= -s^2 k Qf(t) \\ \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} &= -s^2 k f(t) \end{aligned}$$

כיוון ש- $f(t)$ אינה פונקציה קוטרניונית נוכל לומר כי הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל הוא:

$$f(t) = e^{-ks^2 t}$$

נציב את $f(t)$ שקיבלנו במשוואה של $U(s,t) = Qf(t)$

$$U(s,t) = Qf(t) \Rightarrow U(s,t) = Qe^{-ks^2 t}$$

כעת נבצע התמרת פורייה קוטרניונית על 2 אגפי המשוואה כדי למצוא את קבוע הקוטרניונית Q:
נעזר בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) &\Rightarrow U(s,0) = F(s) \\ U(s,t) = Qe^{-ks^2 t} &\Rightarrow U(s,0) = Q \end{aligned} \left\{ \Rightarrow Q = F(s) \right.$$

$$\Rightarrow U(s,t) = F(s)e^{-ks^2 t} = F(s)P(s,t)$$

$=P(s,t)$

נבצע התמרת פורייה הפוכה על 2 האגפים:

$$(iii) \quad u(x,t) = F^{-1}\{F(s) \cdot P(s,t)\} = f(x) * p(x,t)$$

כעת נבצע התמרת פורייה קוטרניונית ההפוכה על פונקציה $P(s,t)$ כדי למצוא את $p(x,t)$:

$$\begin{aligned} (F^q)^{-1}\{P(s,t)\} &= (F^q)^{-1}\{e^{-ks^2 t}\} \\ \Rightarrow p(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2 t} e^{\mu s x} ds \end{aligned}$$

נשתמש בהגדרה של $e^{\mu s x}$

$$e^{\mu s x} = \cos(sx) + \mu \sin(sx)$$

ונציב באינטגרל:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2t} e^{\mu sx} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2t} (\cos(sx) + \mu \sin(sx)) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ks^2t} (\cos(sx))}_{\text{even func} * \text{even func} = \text{even func}} ds + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2t} (\mu \sin(sx)) ds}_{\text{even func} * \text{odd func} = \text{odd func} \Rightarrow =0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ks^2t} (\cos(sx))}_{\text{even func} * \text{even func} = \text{even func}} ds = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ks^2t} (\cos(sx)) ds$$

$$\Rightarrow p(x,t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ks^2t} (\cos(sx)) ds$$

נשתמש בפתרון ידוע לאינטגרל זה:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 y^2} \cos(by) dy = \frac{\sqrt{\pi} e^{-b^2/4a^2}}{2a}$$

ולכן נקבל:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

נציב את $p(x,t)$ ב- (iii):

$$u(x,t) = f(x) * p(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) p(x-y,t) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}} dy$$

4.4 משוואת Schrodinger עבור בעיית פיזור

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + V(x)u = Eu, \quad (-\infty < x < \infty), E > 0$$

$$u(x) \rightarrow \text{const} \cdot e^{ikx}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0, \quad \{V(x), u(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

נגדיר את פונקציית הפוטנציאל כמכפלה של קבוע קוטרניוני עם פונקציה דלתא:

$$V(x) = Q\delta(x)$$

כעת נפתור את המשוואה במקרה בו $E > 0$ מכיוון שאנו פותרים משוואה זו עבור בעיית פיזור כאשר פונקציית הפיזור של שטף החלקיקים רציפה:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + Q\delta(x)u = Eu$$

ולכן:

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} + Eu = Q\delta(x)u$$

נסמן את $E = k^2 > 0$ ונפתור בעזרת פונקציית גרין:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = Q\delta(x)u$$

באמצעות פונקציית גרין ניתן להציג את משוואת שרדיגר כמשוואה אינטגרלית:

$$u(x) = G(x) * (Q\delta(x)u(x)) + u_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') (Q\delta(x')u(x')) dx' + u_h(x) = QG(x)u(0) + u_h(x)$$

$$** \Rightarrow u(x) = QG(x)u(0) + u_h(x)$$

כאשר $u_h(x)$ הוא פתרון של משוואת שרדיגר כאשר $(Q=0), V(x)=0$.

כעת נגדיר אופרטור L כדי למצוא את פונקציית גרין:

$$L[u] = \frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u$$

נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה לפי משפט גרין:

$$L[G] = \delta(x)$$

$$\Rightarrow L[G] = \frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G(x) = \delta(x)$$

נבצע התמרה פורייה קוטרניונית על שני אגפי המשוואה:

$$\begin{aligned} F^q \left\{ \frac{d^2 G}{dx^2} \right\} + F^q \{ k^2 G(x) \} &= F^q \{ \delta(x) \} \\ \Rightarrow (\mu\omega)^2 F^q \{ G(x) \} + k^2 F^q \{ G(x) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \Rightarrow F^q \{ G(x) \} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p \frac{1}{(k^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

כאשר הסימון V.p מורה על כך שצריך להבין את פונקציית גרין כפונקציה מוכללת.

נעת נפעיל התמרת פורייה הקוטרניונית ההפוכה על שני האגפים כדי למצוא את פונקציית גרין :

$$\begin{aligned} G(x) &= (F^q)^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.p \frac{1}{(k^2 - \omega^2)} \right\} \\ \Rightarrow G(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \omega^2)} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - \omega^2)} \left(\cos(\omega x) + \underbrace{\mu \sin(\omega x)}_{\text{odd function} \Rightarrow =0} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{(k^2 - \omega^2)} d\omega \end{aligned}$$

זהו אינטגרל ידוע ולכן:

$$G(x) = -\frac{\mu}{2k} e^{\mu k|x|}$$

נציב את $G(x)$ שקיבלנו ב (ii) :

$$\begin{aligned} (ii) \quad u(x) &= QG(x)u(0) + u_h(x) \\ \Rightarrow u(x) &= -\frac{\mu}{2k} e^{\mu k|x|} Qu(0) + u_h(x) = u_h(x) - \frac{\mu}{2k} e^{\mu k|x|} Qu(0) = \\ \Rightarrow u(x) &= \begin{cases} u_h(x) - \frac{\mu}{2k} e^{-\mu kx} Qu(0), & x < 0 \\ u_h(x) - \frac{\mu}{2k} e^{\mu kx} Qu(0), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

נבצע נגזרת על שני האגפים:

$$u'(x) = \begin{cases} u_h'(x) - \frac{1}{2} e^{-\mu kx} Qu(0), & x < 0 \\ u_h'(x) + \frac{1}{2} e^{\mu kx} Qu(0), & x > 0 \end{cases}$$

לכן בנקודה $x=0$ מתקיים:

$$\begin{cases} u(0^+) = u(0^-) = u(0) \\ u'(0^+) - u'(0^-) = Qu(0) \end{cases}$$

במילים אחרות, בנקודה $x=0$ הפונקציה $u(x)$ רציפה אבל הנגזרת $u'(x)$ מקבלת תוספת סופית $Qu(0)$. נחפש פתרון של הבעיה בצורה:

$$u(x) = \begin{cases} e^{\mu k x} + A(k)e^{-\mu k x}, & x < 0 \\ B(k)e^{\mu k x}, & x > 0 \end{cases}$$

כאשר $A(k), B(k) \in \mathbb{C}$.

נקבל כי:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(0^-) = 1 + A(k) \\ u(0^+) = B(k) \end{cases} &\Rightarrow (i) 1 + A(k) = B(k) \\ \begin{cases} u'(0^-) = \mu k(1 - A(k)) \\ u'(0^+) = \mu k B(k) \end{cases} &\Rightarrow (ii) \mu k (B(k) - 1 + A(k)) = Q B(k) \end{aligned}$$

מ- (i) ו- (ii) ניתן לראות כי:

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{Q}{2\mu k - Q} \\ B(k) &= \frac{2\mu k}{2\mu k - Q} \end{aligned}$$

ולכן:

$$u(x) = \begin{cases} e^{\mu k x} + \frac{Q}{2\mu k - Q} e^{-\mu k x}, & x < 0 \\ \frac{2\mu k}{2\mu k - Q} e^{\mu k x}, & x > 0 \end{cases}$$

5. חלק שני- עיבוד תמונה ועיבוד אותות

בעיבוד אותות התמרת פורייה ממירה את האות מימד הזמן למימד התדר.

במימד התדר הרבה ממאפייני האות מתגלים.

בתהליכי עיבוד תמונה רבים משתמשים בהתמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה להמרת האותות.

השימוש העיקרי הינו בהתמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה מממד שני ולכן נראה ונוכיח כאן כמה מהתכונות החשובות של התמרה זו.

5.1 תכונות והגדרות עבור התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה מממד שני [3]:

תחילה נגדיר את התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה מממד שני :

נגדיר $f(m,n)$ - זוג סדור קוטרניוני במימד שני

$$F^q(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \quad \text{where } m = 0, 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \mu^2 = -1$$

5.1.1 התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה וההפוכה ב-2D (DQFT⁻¹)

$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^q(u, v) e^{\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} f(m, n) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^q(u, v) e^{\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\underbrace{\sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f(m', n') e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m'u}{M} + \frac{n'v}{N} \right)}}_{=F^q(u, v)} \right] e^{\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m', n') \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\mu 2\pi \left(\frac{(m-m')u}{M} + \frac{(n-n')v}{N} \right)} \end{aligned}$$

נשים לב כי כאשר $m=m'$ ו- $n=n'$:

$$e^{\mu 2\pi \left(\frac{(m-m')u}{M} + \frac{(n-n')v}{N} \right)} = 1$$

ולכן כאשר $m=m'$ ו- $n=n'$:

$$\sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\mu 2\pi \left(\frac{(m-m')u}{M} + \frac{(n-n')v}{N} \right)} = MN$$

אך כאשר $m \neq m'$ ו- $n \neq n'$:

$$\sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} e^{\mu 2\pi \left(\frac{(m-m')u}{M} + \frac{(n-n')v}{N} \right)} = 0$$

מכיוון שכל אחד מהסכומים הינה סכום של סדרה הנדסית הסכום שווה לאפס.

$$\text{נסתכל על הסכום השני עבור } S_N = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q} \text{ כאשר } a_1 = e^{\mu 2\pi \frac{nv}{N}}, q = e^{-\mu 2\pi \frac{v}{N}}, v \in Z, \text{ ונראה}$$

כי:

$$S_N = \frac{a_1(1-q^N)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1-q^N = 1 - e^{\left(-\mu 2\pi \frac{v}{N}\right)^N} = 1 - e^{-\mu 2\pi v} = 1 - 1 = 0$$

$(e^{2\pi i})^{-v} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[\sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{N-1} f(m', n') e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m'u}{M} + \frac{n'v}{N} \right)} \right]}_{=F^q(u,v)} e^{\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} = f(m, n)$$

5.1.2 תכונת ההזזה:

$$F^q \{ f(m-m_0, n-n_0) \} = F^q(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[f(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \right] e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m_0 u}{M} + \frac{n_0 v}{N} \right)}$$

הוכחה:

$$F^q \{ f(m-m_0, n-n_0) \} = F^q(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m-m_0, n-n_0) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}$$

נסמן:

$$m-m_0 = m' \Rightarrow m = m' + m_0,$$

$$n-n_0 = n' \Rightarrow n = n' + n_0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow F^q \{ f(m-m_0, n-n_0) \} &= F^q(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m', n') e^{-\mu 2\pi \left(\frac{(m'+m_0)u}{M} + \frac{(n'+n_0)v}{N} \right)} = \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m', n') e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m'u}{M} + \frac{n'v}{N} \right)} e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m_0 u}{M} + \frac{n_0 v}{N} \right)} = \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\left[f(m', n') e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m'u}{M} + \frac{n'v}{N} \right)} \right]}_{=F^q(u, v)} e^{-\mu 2\pi \left(\frac{m_0 u}{M} + \frac{n_0 v}{N} \right)}
 \end{aligned}$$

5.1.3 תכונת הנורמה ממעלה שניה:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |f(m, n)|^2 = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F^q(u, v)|^2$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} |f(m, n)|^2 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \overline{f(m, n)} = \frac{1}{NM} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^q(u, v) e^{\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \right) \overline{f(m, n)} = \\
 &= \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^q(u, v) \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}}}_{=F^q(u, v)} = \\
 &= \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^q(u, v) \overline{F^q(u, v)} = \\
 &= \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F^q(u, v)|^2
 \end{aligned}$$

5.1.4 משפט התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה הצמודה:

$$\begin{aligned}
 \overline{F^q(u, v)} &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{f(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}} = \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (f_0(m, n) - i f_1(m, n) - j f_2(m, n) - k f_3(m, n)) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} = \\
 &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_0(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} - i \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_1(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} - \\
 &\quad - j \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_2(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} - k \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_3(m, n) e^{-\mu 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} = \\
 &= F_{f_0}^q(u, v) - i F_{f_1}^q(u, v) - j F_{f_2}^q(u, v) - k F_{f_3}^q(u, v)
 \end{aligned}$$

5.2 תהליך עיבוד התמונה ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה

התמרת פורייה החלה להיות שימושית מאוד והכרחית בתהליכי עיבוד אותות ועיבוד תמונה מאז גילוי ה-FFT אשר איפשר חישובים מורכבים של התמרת פורייה הבדידה באמצעות המחשב.

ישנן 2 שיטות עיקריות לעיבוד תמונה:

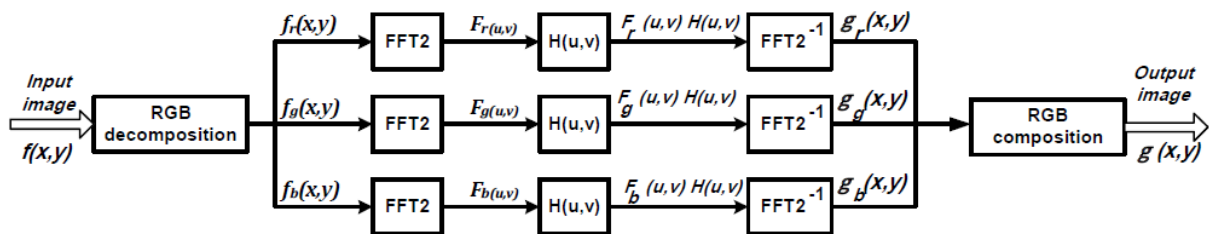
1. הפעלת קונבולוציה על התמונה במרחב הזמן- שיטה זו קשה מאוד לחישוב והרבה פחות יעילה.

2. הפעלת התמרת פורייה על התמונה ולאחר מכן הכפלת התמרת פורייה של התמונה בפילטר (HIGH-PASS/LOW-PASS/BAND-PASS) במרחב התדר וביצוע התמרת פורייה ההפוכה כדי לחזור למרחב הזמן - אלגוריתם FFT הינו דוגמה לשיטה זו.

אך עיבוד תמונה צבעונית עדיין היווה אתגר בעקבות קשת הצבעים הרחבה וכמות התדרים הרבים בתמונה זו.

עד לא מזמן הדרך הקונבנציונלית היתה הנפוצה ביותר להתמודדות עם עיבוד תמונה צבעונית.

דרך זו מבוססת על פירוק RGB, פירוק התמונה ל-3 תמונות של גווניה אדום ירוק וכחול והפעלת התמרת פורייה על כל תמונה כזו בנפרד. דרך זו גרמה לעיבוד ביחסים בין הצבעים של התמונה המקורית.



איור 3 : תהליך עיבוד תמונה צבעונית במרחב התדר ע"י פירוק RGB [4]

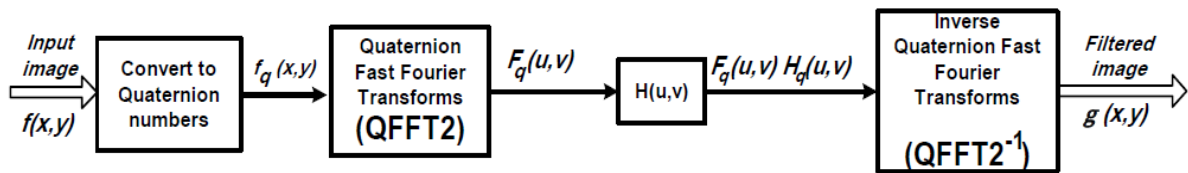
לאחרונה התגלתה הדרך לביצוע התמרת פורייה על תמונות צבעוניות דיגיטליות כיחידה אחת ללא הפירוק, דרך המשמרת את יחסי הצבע של התמונה המקורית.

השיטה מתבססת על ביצוע התמרת פורייה הקוטרניונית הבדידה ממימד שני על התמונה ובכך הפיכת התמונה לאות המורכב ממספרים קוטרניונים, לאחר מכן העברת התמונה בפילטר במרחב התדר ולבסוף החזרת התמונה למרחב המקורי ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית.

בשיטה זו המספרים הקוטרניוניים מייצגים את הפיקסלים של התמונה הצבעונית.

הפיקסלים של תמונה צבעונית מורכבים משלושה מרכיבים לכן החלק הממשי של המספר הקוטרניוני עבור כל פיקסל הינו אפס וכל אחד משלושת החלקים המדומים מהווה רכיב אחר של הפיקסל (אדום, ירוק, כחול). לדוגמא עבור פיקסל בתמונת RGB בעלת קורדינטות (x, y) , הפיקסל ייצוג באופן הבא: $f(x, y) = r(x, y)i + g(x, y)j + b(x, y)k$.

כאשר $r(x, y)$ זה הרכיב האדום, $g(x, y)$ הרכיב הירוק ו- $b(x, y)$ הרכיב הכחול.



איור 4 : תהליך עיבוד תמונה צבעונית במרחב התדר ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית [4]

באיור 3 שלהנ"ל ניתן לראות את המודל הבסיסי של עיבוד תמונה בשיטה זו.

כל פיקסל RGB של התמונה מומר למספר קוטרניוני כפי שהוסבר. לאחר מכן מתבצעת FFT הקוטרניונית ממימד 2 (FQFT2) על התמונה כיחידה מה שמניב $F_q(u, v)$.

$$F_q(u, v) \text{ מוכפל איבר איבר בפילטר במרחב התדר } H_q(u, v).$$

לבסוף מבצעים FFT הקוטרניונית ממימד שני ההפוכה $(QFFT2)^{-1}$ על ההכפלה.

5.3 יישום הפחתת רעשים ע"י פילטר גאוסני והתמרת פורייה הקוטרניונית

בחלק זה אנו נראה יישום של השיטה שדוברה להנ"ל בסעיף 5.2 באמצעות שימוש בפילטר LP גאוסיאני.

פילטר LP הינו פילטר שמעביר רק תדרים נמוכים משמע, חותך את כל התדרים הגבוהים מערך מסויים שנשמנו ב- D_0 כלומר D_0 הינו תדר הסף להעברה.

פונקצית התמרה של פילטר זה ניתן להגדיר באופן הבא :

$$H_q(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & D(u, v) \geq D_0 \end{cases}$$

כאשר $D(u, v) = [(u - \frac{M}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2]^{1/2}$ מציינת את המרחק מנקודה (u, v) למלבן התדירות המקורי $(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$.

נגדיר את פונקציה ההתמרה של פילטר גאוסני LP הדו מימדית באופן הבא :

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

כאשר σ מודדת את הפיזור סביב המרכז.

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad \text{אם נסמן } \sigma = D_0 \text{ נקבל כי:}$$

נסמן את ה-LP באופן הבא :

$$H_{LP}(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_L^2}$$

כש- D_L הוא תדר הסף עבור פילטר ה-LP.

איכות התמונה מושפעת לעיתים בגלל רעשים. רעשים יכולים להתווסף לתמונה בכל מיני מצבים שלא תמיד יש לנו שליטה עליהם ולכן היכולת להסיר רעשים היא משימה חשובה בתחום עיבוד התמונה.

רעשי תמונה מסווגים לרוב באופן הבא :

- Amplifier noise (Gaussian noise)
- Salt-Perrerr noise (Impulse noise)
- Shot noise
- Quantization noise (Uniform noise)
- Film grain
- Speckle noise (Multiplicative noise)
- Periodic noise

במסגרת פרוייקט זה בחרנו להראות עיבוד אותות ע"י התמרת פורייה הקוטרניונית ופילטר גאוסיאני כאשר תדר הסף שבחרנו הינו $D_L = 30$ על תמונה שנחשפה ל-3 מהרעשים הנ"ל:



איור 5 : תמונה מקורית [5]

• -Gaussian zero mean noise

לאיור 6 הוספנו רעש גאוסיאני עם תוחלת 0 ושונות 0.01.



איור 7 : איור 6 לאחר פילטר LP גאוסיאני



איור 6 : תמונה עם הרעש

• -Salt & Pepper noise

לאיור 8 הוספנו רעש "מלח & פלפל" בעל צפיפות רעש 0.05.



איור 9 : איור 8 לאחר פילטר LP גאוסיאני



איור 8 : תמונה עם הרעש

• Speckle uniformly distributed noise

לאיור 10 הוספנו רעש Speckle uniformly distributed עם תוחלת 0 ושונות 0.04.



איור 11 : איור 10 לאחר פילטר גאוסיאני

איור 10 : תמונה עם הרעש

5.3.1 השפעת תדר הסף בפונקציית הפילטר על התמונה הסופית

בסעיף זה נבדוק כיצד שינוי תדר הסף של LP פילטר משפיע על תמונה צבועונית.

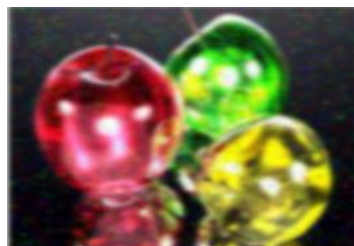
בחרנו לעבוד עם תמונה צבועונית אשר הוספנו לה רעש "מלח & פלפל" בעל צפיפות רעש 0.05.



איור 13 : איור 12 לאחר הוספת רעש

איור 12 : תמונה מקורית [6]

לשם כך בחרנו לבדוק ולהשוות את התדרים הבאים :



איור 16 : תמונה עם $D_L = 60$

איור 15 : תמונה עם $D_L = 30$

איור 14 : תמונה עם $D_L = 10$

ניתן לראות שהתדר האופטימלי במקרה שלנו הינו $D_L = 30$. אפשר להבין זאת לפי המשמעות של ה- LP פילטר, אשר מעביר רק את התדרים הנמוכים מתדר הסף. ניתן לראות שבאיור 14 בו $D_L = 10$ תדר הסף היה נמוך מידי וכתוצאה מכך קיבלנו תמונה מטושטשת כי מלבד סינון הרעש סיננו גם את קווי המתאר של האובייקטים בתמונה. כאשר בחרנו תדר $D_L = 60$ העברנו גם את הרעש וניתן לראות שתמונה זו (איור 16) לא שונה בהרבה מהתמונה עם הרעש המקורית (איור 13).

5.4 יישום זיהוי קצוות של תמונה צבעונית בעלת ייצוג קוטרניוני

זיהוי קצוות הינה פעולה מתמטית מרחבית שמטרתה למצוא את קווי הקצה של עצמים בתמונה דיגיטאלית. קווי קצה (שפות) מוגדרים כגבול בין רמות בהירות שונות. שפות מבדילות בין אזורים בעלי צבע שונה וטקסטורה שונה, לכן זיהוי קצוות הוא כלי בסיסי בעיבוד תמונה. בחלק זה אנו נראה יישום של זיהוי קצוות עבור תמונה צבעונית בעלת ייצוג קוטרניוני ואת היתרונות הקיימים בייצוג זה.



איור 18 : איור 17 לאחר הפעלת זיהוי קצוות



איור 17 : תמונה מקורית [7]

ייצוג תמונה צבעונית המבוסס על פירוק RGB, פירוק ל-3 מטריצות של גווני אדום ירוק וכחול, גורם לעיבוד ביחסים בין הצבעים של התמונה המקורית. הייצוג הקוטרניוני משמר את יחסי הצבע של התמונה המקורית בכך שמשאיר את התמונה כיחידה אחת, בדומה למה שקורה בייצוג תמונה בגווני אפור. בתמונה המיוצגת בגווני אפור כל פיקסל מקבל ערך מספרי, כאשר לבן מקבל ערך מספרי מינימאלי ושחור מקבל ערך מספרי מקסימלי. זיהוי הקצוות מזהה את ההבדל בין פיקסלים שכנים בעלי ערך מספרי שונה. השיטה הזו יכולה להיות מיושמת בצורה דומה על תמונה צבעונית כאשר כל פיקסל מיוצג ע"י מספר יחיד קוטרניוני ולא ע"י סט של שלושה מספרים כפי שנעשה בפירוק RGB. לכן ניתן לראות באיור 18 את גבולות קווי המתאר בצורה ברורה מאוד וכן את ההבדלים בין גווני האפור שהתקבלו עבור הצבעים השונים.

6. סיכום

בפרוייקט זה למדנו רבות אודות מספרים קוטרניים.

גילינו את תכונת חוסר הקומוטטיביות של האלגברה הקוטרניונית. ראינו כיצד מספרים אלו משפיעים על פתרון משוואות דיפרנציאליות חלקיות חשובות מאוד בעולם הפיזיקה, האלקטרוניקה, האקוסטיקה ועוד, כדוגמת משוואת Helmholtz המתארת פיזור של גלי קול וחשובה בעולם האקוסטיקה.

למדנו וחקרנו חלק קטן מאוד מתחום מעניין מרתק ונרחב הנקרא עיבוד תמונה, אשר הושפע והתפתח רבות בזכות קיומם של המספרים הקוטרניים. מספרים אלו ממש שינו את שיטת העיבוד של תמונה צבעונית ושיפרו את איכות עיבוד התמונה כפי שראינו בפרוייקט.

7. "Color Image Watermarking Using Quaternion Fourier"- Patrick Bas, N. Le Bihan, J.-M. Chassery, HAL archives-ouvertes, 7 Aug 2007
8. "Quaternion Fourier Transform for Colour Images"- Vikas R. Dubey, Mumbai University, 2014
9. "Convolution Theorems for Quaternion Fourier Transform"- Mawardi Bahri, Ryuichi Ashino, Rémi Vaillancourt, Hasanuddin University, Indonesia, 2013