



Department of
Mathematics



היחידה
למתמטיקה

פרויקט מסכם לתואר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

**שיבוץ מבוסס אופטימיזציה
במערכות ייצור גמישות**

נטליה גוטקין

**Optimization-based scheduling for flexible
manufacturing systems**

Natalia Gutkin

פרויקט מסכם לתואר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

שיבוץ מבוסס אופטימיזציה במערכות ייצור גמישות

נטליה גוטקין

OPTIMIZATION-BASED SCHEDULING FOR
FLEXIBLE MANUFACTURING SYSTEMS

NATALIA GUTKIN

Advisor: Dr. Boris Shnits

מנחה: ד"ר בוריס שניץ

המחלקה להנדסת תעשייה וניהול

Karmiel



כרמיאל

המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה (ע"ר) רח' סנונית 51 ת.ד. 78. כרמיאל 21982, טל 04-9901911-04, פקס 04-9882016-04
Ort Braude College, P.O.Box 78, Karmiel 21982, Israel, Tel: 972-4-99901911, Fax: 972-4-9882016

תקציר

פרויקט המוצג בפניכם עוסק בנושא "שיבוץ מבוסס אופטימיזציה במערכות ייצור גמישות".

בתחילת הפרויקט מתוארת בעיית השיבוץ בכלל ומוצגות דוגמאות לשיבוץ במפעלי ייצור ובחברות הנותנות שירות בפרט.

הפרויקט עוסק בעיקר בבעיית השיבוץ במפעל ייצור, לכן נרחיב יותר על סביבות ייצור שונות הקיימות במפעלים, ונביא הגדרה לכל סביבת ייצור בנפרד.

בחלק העיקרי של הפרויקט נבנה מודל מתמטי לבעיית השיבוץ במערכת ייצור גמישה אשר כוללת מספר מכונות עיבוד שאמורות לבצע אוסף של משימות ייצור.

המודל המתמטי הוא בעיית אופטימיזציה עם פונקציית מטרה ואילוצים, שאותם ננסח עבור סביבת ייצור זו.

את פתרון הבעיה נקבל ע"י תוכנה לאופטימיזציה Lingo, בה נרשום את פונקציית המטרה והאילוצים ונריץ אותה עבור דוגמא מספרית מסוימת. בהסתמך על תוצאות הריצה, נציג את פתרון הבעיה בעזרת דיאגרמת גנט ולבסוף נסכם את תוצאות הפתרון של הבעיה.

תוכן עניינים

3.....	תקציר
5.....	1 מבוא
5.....	1.1 הקדמה
6.....	1.2 דוגמאות לשיבוץ
6.....	1.2.1 מפעל המייצר שקיות נייר
6.....	1.2.2 הקצאות השערים בנפל התעופה
7.....	1.3 פונקציית שיבוץ
7.....	1.4 שיבוץ במפעלים
8.....	1.5 שיבוץ בסביבות ייצור שונות
9.....	2 בעיית שיבוץ בסביבת JOB SHOPS ובמערכות ייצור גמישות
9.....	2.1 תיאור סביבת הבעיה
10.....	2.2 הגדרת הבעיה
11.....	3 בניית מודל מתמטי
11.....	3.1 סימונים
12.....	3.2 פונקציית מטרה ואילוצים
14.....	4 המחשה ופתרון הבעיה ע"י דוגמא
14.....	4.1 הצגת הדוגמא והצבת המטרה
15.....	4.2 פתרון הבעיה בעזרת Lingo
19.....	4.3 תוצאות
20.....	5 סיכום ומסקנות
21.....	6 ביבליוגרפיה
22.....	7 נספחים: פלט התוכנית

1. מבוא

1.1 הקדמה

שיבוץ הוא תהליך של קבלת החלטות במפעלים ותעשיות הנותנות שירות. השיבוץ עוסק בהקצאת משאבים (כגון מכונות ייצור, חומרים, כוח עבודה וכו') למשימות בצורה היעילה ביותר. המשאבים והמשימות יכולים להיות רבים ומגוונים, כגון: דוגמאות למשאבים: מכונות ייצור במפעלים, מסלולי המראה בנמלי התעופה, צוותים בבניית אתרים, יחידות עיבוד במחשב ועוד. דוגמאות למשימות: שלבים בתהליכי הייצור, המראות ונחיתות של מטוסים בנמלי התעופה, שלבים בתהליך הבנייה, ריצות של תוכנות מחשב ועוד. לכל משימה יכולה להיות רמת עדיפות משלה, זמן התחלה המוקדם ביותר האפשרי ומועד סיום נדרש. ישנם מספר מטרות שברצוננו להשיג על ידי השיבוץ: למשל, מינימיזציה של זמן הסיום של המשימה המסיימת אחרונה, כלומר לשבץ את כל המשימות שיש לבצע כך שיסתיימו מוקדם ככל הניתן. מטרה נוספת שנרצה להשיג על ידי שיבוץ יעיל היא מזעור מספר משימות מאחרות (המסתיימות אחרי זמן הסיום הנדרש). תהליך השיבוץ משחק תפקיד חשוב ברוב מערכות הייצור והשירות.

1.2 דוגמאות לשיבוץ

1.2.1 מפעל המייצר שקיות נייר

נתבונן במפעל שמייצר שקיות נייר עבור מלט, פחם, מזון כלבים, וכן הלאה. חומר הגלם הבסיסי לייצור המוצרים הנ"ל הוא גלילי נייר. תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים: הדפסה של הלוגו, הדבקה של צדדי השקית, ותפירה בקצה אחד או בשני הקצוות של השקית.

ייצור כל שלב מתבצע על מספר מכונות אשר אינו בהכרח זהה בכל שלב. המכונות בכל שלב עשויות להיות שונות במהירויות בהן פועלות, במספר הצבעים שהן יכולות להדפיס או בגודל של שק שהן יכולות לייצר. לכל הזמנה (לכמות מסוימת של שקיות נייר) יש דרישות משלה (כגון: צבע, גודל, לוגו המודפס על השקית ועוד). הזמנה חייבת להיות מיוצרת ונשלחת על ידי המפעל לידי הלקוח בתאריך שנקבע מראש. משלוח מאוחר גורם לקנס ואובדן התדמית של המפעל. גודל הקנס תלוי בחשיבות ההזמנה וגודל המשלוח. אחת המטרות של השיבוץ היא למזער את סכום הקנסות האלה.

1.2.2 הקצאות השערים בנמל תעופה

בנמלי התעופה הגדולות יש עשרות שערים מאות מטוסים הנכנסים ויוצאים מדי יום. השערים אינם כולם זהים וכך גם המטוסים. חלק מהשערים נמצאים במקומות בהם מאוכלסים מטוסים גדולים. שערים אחרים נמצאים במקומות עם גישה מוגבלת למטוסים;

המטוסים מגיעים ועוזבים לפי לוח זמנים מסוים אשר מושפע בין היתר מגורמים אקראיים כמו תנאי מזג האוויר או אירועים בלתי צפויים בנמלי תעופה אחרים.

זמן היציאה המתוכנן הוא למעשה זמן שניתן לראות בו "זמן סיום נדרש של כל הפעולות שיש עם המטוס" (עליית נוסעים, מטען וכו'), והביצועים של חברת התעופה נמדדים בהתאם. עם זאת, אם ידוע מראש שהמטוס לא יכול לנחות בשדה התעופה הבא בגלל העומס הצפוי בזמן ההגעה המתוכנן שלו, אז המטוס לא ממריא. אם המטוס אינו מורשה להמריא, מופעלת בדרך כלל מדיניות שקובעת כי הנוסעים יישארו בטרמינל ולא על המטוס. אם העלייה נדחתה, מטוס עשוי להישאר בשער למשך תקופה ארוכה, ובכך למנוע ממטוסים אחרים להשתמש בשער.

על המשבץ יש להקצות מטוסים ושערים בצורה שתביא לאופטימום את מספר המטרות. עליו להקצות מטוסים לשערים מתאימים הזמינים בשעות ההגעה של המטוסים. המטרות כוללות מזעור עבודה עבור אנשי חברת התעופה ומזעור עיכובים של המטוסים.

בתרחיש זה השערים הם המשאבים וכל הפעולות של הטיפול והשירות במטוסים הן המשימות. הגעתו של המטוס לשער מייצגת את זמן התחלת המשימה ושעת יציאתו מייצגת את הזמן להשלמת המשימה.

1.3 פונקציית השיבוע

פונקציית השיבוע במערכות הייצור ובחברות המספקות שירות חייבת להיות באינטראקציה עם פונקציות רבות אחרות. אינטראקציות אלה הן תלויות מערכת והן יכולות להשתנות באופן מהותי ממצב אחד למשנהו. לעתים קרובות הן לוקחות חלק בתוך מערכת מידע ארגונית. במפעלים מודרניים וארגונים הנותנים שירות לעיתים קרובות נמצא מידע רחב השמור בתוך מחשב מרכזי ובמבני הנתונים. רשתות מקומיות של מחשבים אישיים, תחנות עבודה ושרתי נתונים יכולים לשמש לשחזור נתונים או רישום נתונים חדשים. התוכנה השולטת במערכת מידע משוכללת זאת נקראת ERP-Enterprise Resource Planning תכנון משאבי הארגון. מספר חברות תוכנה מתמחות בהספקת תוכנות ארגון כאלו. שיבוע נעשה לעתים קרובות באופן אינטראקטיבי באמצעות מערכות תומכות החלטה המותקנות במחשבים אישיים או בעמדות עבודה המקושרות למערכת ERP.

1.4 שיבוע במפעלי ייצור

כעט נתייחס לסביבה גנרית של מפעל ייצור ותפקיד השיבוע בה. הזמנות שקיבל המפעל צריכות להיות מתורגמות לעבודות עם תאריכי סיום מוגדרים. עבודות אלו אמורות להיות מעובדות על המכונות במרכזי עבודה לפי סדר עדיפות מוגדר או לפי הרצף. לפעמים הביצוע מעוכב כאשר הרבה עבודות מגיעות בו זמנית לאותן המכונות. מקרים בלתי צפויים שיכולים לקרות במפעל כגון אי-תקינות של מכונה מסוימת או תהליך ארוך שמתעכב במכונה ספציפית, גם הם אמורים להיות לקוחים בחשבון בעת תכנון השיבוע. אחרי שבוצע תהליך השיבוע יש לוודא כי כל חומרי הגלם והמשאבים הנדרשים לתהליך הייצור נמצאים במלאי וזמינים.

1.5 שיבוץ בסביבות ייצור שונות

- **מכונה בודדת**- מקרה הכי פשוט של תהליך ייצור בו קיימת רק מכונה אחת (בודדת) האמורה לבצע אוסף של משימות שונות (עם זמני עיבוד שונים).
- **מכונות זהות במקביל**- בתהליך ייצור משתתפות m מכונות זהות במקביל. כל משימה, הכוללת פעילות אחת, יכולה להתבצע על כל אחת מהמכונות הנ"ל. זמני ביצוע של משימות שונות יכולים להיות שונים.
- **מכונות במקביל עם קצב שונה**- בתהליך ייצור משתתפות m מכונות שפועלות במקביל, אבל המכונות הן שונות מבחינת קצבי העבודה שלהן. מכונה i מייצרת בקצב V_i . זמן ייצור של משימה i על מכונה j הוא T_{ij} .
- **Flow shop**- בתהליך ייצור משתתפות m מכונות. כל משימה חייבת להיות מעובדת על כל אחת מהמכונות כאשר סדר העיבוד הוא זהה לכל המשימות (כלומר לכל משימה יש אותו מסלול). אחרי שמשימה עוברת מכונה אחת היא נכנסת לתור למכונה השנייה במסלול, וכך הלאה. זמן ייצור של משימה i על מכונה j הוא T_{ij} .
- **Job shop**- בתהליך ייצור m מכונות. לכל משימה שנכנסת לעיבוד יש מסלול ספציפי משלה. משימות לא חייבות לעבור את כל המכונות, ייתכן שבמסלול ישתתפו רק חלק מהן, אבל לכל היותר כל משימה נכנסת לכל מכונה פעם אחת. (כלומר לא יקרה מצב שבו משימה מעובדת פעמיים או יותר על אותה מכונה).

*** קיימים עוד סוגים רבים של סביבות ייצור, שלא נפרט לגביהם כאן.**

2 בעיית שיבוץ בסביבת JOB SHOPS ובמערכות ייצור גמישות.

2.1 תיאור סביבת הבעיה

• ג'ובשופ סטנדרטי:

מדובר בסביבת ייצור בה כל פעילות של משימה כלשהיא ניתן לבצע על מכונה מסוימת אחת. בו זמנית יכול להיווצר צורך באותה מכונה עבור מספר משימות. לכן במקרה זה קיים צורך בשיבוץ יעיל של משימות על כל פעילותן על המכונות הקיימות.

• מערכת ייצור גמישה:

מדובר בסביבת ייצור גמישה בה לכל משימה יש מספר פעילויות, כל אחת מהפעילויות הנ"ל יכולה להתבצע על מס' מכונות חלופיות כאשר זמן עיבוד של פעילות על המכונות השונות יכול להיות שונה. כלומר, לכל משימה ישנו מסלול משלה המורכב ממספר סופי של פעילויות כאשר כל פעילות צריכה להתבצע על אחת מבין מספר המכונות האפשריות.

2.2 הגדרת הבעיה

נדון במפעל ייצור כלשהו אליו מגיעות משימות אותן נדרש לעבד באמצעות המכונות הקיימות. יש להחליט על שיבוץ המשימות על המכונות. בבעיית שיבוץ זו ניתן להבדיל בין המקרים הבאים:

מקרה 1:

מקרה של שיבוץ סטטי בו בנקודת זמן של קבלת ההחלטה קיים מידע על כל ה-N משימות שנדרש לעבד.

מקרה 2:

מקרה של שיבוץ דינאמי, בו במהלך עבודת המערכת ממשיכות להגיע משימות נוספות שאותן שנדרש לעבד.
בכל רגע במערכת ישנן N משימות ($N=0,1,2,\dots$) ו- M מכונות.
בנקודת זמן של קבלת ההחלטה מסתכלים על המצב הנתון של מערכת ומשבצים את המשימות הנמצאות במערכת והצפויות להגיע למערכת במשך פרק הזמן המוגדר.

בשני המקרים לכל משימה i יש j שלבים/פעילויות ($j=1,2,3,\dots$). הפעילויות מבוצעות לפי סדר ספציפי המוגדר לכל משימה.
לביצוע כל פעילות יכולות להתאים מספר מכונות שיכולות להבדל בזמני ביצוע הפעילות.

- בתהליך השיבוץ ניתן להגדיר פונקציות מטרה שונות אך בעבודה זו נבחרה פונקציית מטרה הממזערת את סכום זמני הסיום של המשימות.

ניסוח המודל שמוצג בהמשך מבוסס על העבודות של (Shnits, 2011) ו (Low and Wu, 2001)

3.1 סימונים:

i - אינדקס של משימה $(1, \dots, I)$

j - אינדקס של פעילות $(1, \dots, J)$

k - אינדקס של מכונה $(1, \dots, K)$

C_i - זמן סיום של משימה i

JR_i - זמן מוכנות של משימה i

S_{ij} - זמן תחילת העיבוד של פעילות j של משימה i

t_{ijk} - זמן עיבוד של פעילות j של משימה i על מכונה k

MR_k - זמן מוכנות של מכונה k

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{אם פעילות } j \text{ של משימה } i \\ & \text{מעובדת על מכונה } k \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

SM_{ijk} - זמן תחילת עיבוד של פעילות j של משימה i על מכונה k

W - מספר גדול כלשהו

$$\delta_{ijpqk} = \begin{cases} 1, & \text{אם פעילות } j \text{ של משימה } i \\ & \text{משובצת לפני פעילות } q \text{ של משימה } p \\ & \text{על מכונה } k \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3.2 פונקציית מטרה ואילוצים לבעיה

$$\text{Min } \sum_{i=1}^I C_i$$

פונקציית מטרה: מינימיזציה של סכום זמני הסיום של כל המשימות.

$$1) \quad S_{i1} \geq J R_i \quad i=1,2,3,\dots,I$$

זמן התחלה של פעילות ראשונה בכל משימה יהיה גדול יותר מזמן מוכנות של אותה המשימה.

$$2) \quad S_{ij} + \sum_{k=1}^K t_{ijk} \cdot X_{ijk} \leq S_{i(j+1)} \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots,I \\ j=1,2,3,\dots,J-1 \end{matrix}$$

כל פעילות בכל משימה תתחיל אחרי שתסתיים פעילות קודמת של אותה משימה (זמן התחלה + זמן עיבוד של הפעילות הקודמת).

$$3) \quad S_{i1} \geq \sum_{k=1}^K M R_k \cdot X_{i1k} \quad i=1,2,3,\dots,I$$

זמן התחלה של פעילות ראשונה בכל משימה יהיה גדול מזמן מוכנות של אותה מכונה אליה תשובץ המשימה בפעילות הראשונה.

$$4) \quad \sum_{k=1}^K X_{ijk} = 1 \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots,I \\ j=1,2,3,\dots,J \end{matrix}$$

כל פעילות של כל משימה תשובץ אך ורק על מכונה אחת.

$$5) \quad S M_{ijk} = S_{ij} \cdot X_{ijk} \quad \begin{matrix} i=1,2,3,\dots,I \\ j=1,2,3,\dots,J \\ k=1,2,3,\dots,K \end{matrix}$$

זמן התחלה של פעילות במכונה אליה היא משובצת חייב להיות שווה לזמן התחלה של פעילות.

$$6) \quad \delta_{ijpqk} + \delta_{pqijk} = X_{ijk} \cdot X_{pqk}$$

עבור קבוצת פעילויות אשר יכולות להתבצע על מכונה k כאשר $k=1,2,3,\dots,K, i \neq p$

במקרה בו פעילות j של משימה i משובצת על מכונה k וגם פעילות q של משימה p משובצת על אותה מכונה, אילוץ זה דואג לכך שרק אחד מהמשתנים הבינאריים δ_{ijpqk} או δ_{pqijk} יהיה שווה ל-1, הדבר קובע את סדר השיבוץ בין פעילויות (i,j) ו (p,q) על מכונה k . ראו אילוץ 7.

$$7) \quad SM_{ijk} + t_{ijk} \cdot X_{ijk} \leq SM_{pqk} + W \cdot (1 - \delta_{ijpqk})$$

$$SM_{pqk} + t_{pqk} \cdot X_{pqk} \leq SM_{ijk} + W \cdot (1 - \delta_{pqijk})$$

עבור קבוצת פעילויות אשר יכולות להתבצע על מכונה k כאשר $k=1,2,3,\dots,K, i \neq p$

שני האילוצים הנ"ל תקפים במקרה בו פעילות j של משימה i משובצת על מכונה k וגם פעילות q של משימה p משובצת על אותה מכונה :

אם i, j ישובץ לפני p, q אז האיבר $W \cdot (1 - \delta_{ijpqk})$ באי-שוויון הראשון יהיה 0, האילוץ הראשון ידאג לכך ש פעילות q של משימה p תעובד על מכונה k אחרי שיסתיים עיבוד של פעילות j של משימה i , האי-שוויון השני יתקיים תמיד במקרה זה בגלל מס' גדול W .

אם p, q ישובץ לפני i, j אז האיבר $W \cdot (1 - \delta_{pqijk})$ באי-שוויון השני יהיה 0, האילוץ השני ידאג לכך ש פעילות j של משימה i תעובד על מכונה k אחרי שיסתיים עיבוד של פעילות q של משימה p , והאי-שוויון הראשון יתקיים תמיד במקרה זה בגלל מס' גדול W .

$$8) \quad C_i = S_{iJ} + \sum_{k=1}^K t_{ijk} \cdot X_{ijk}$$

$$i=1,2,3,\dots,I$$

זמן סיום של כל משימה הוא סכום של זמן התחלה של הפעילות האחרונה במשימה וזמן העיבוד של פעילות זו על המכונה אליה היא משובצת.

4 המחשה ופתרון הבעיה ע"י דוגמא

הדוגמא נלקחה מתוך המאמר של (Jiang and Hsiao, 1994):

4.1 הצגת הדוגמא

בטבלה הבאה מוצגת דוגמא לתהליך ייצור הכולל 5 משימות שלכל אחת מהן 3 פעילויות. כמו כן, ישנן 4 מכונות לביצוע המשימות הנ"ל. עבור כל פעילות של כל משימה מוצגות המכונות עליהן הפעילות יכולה להתבצע ומשך הזמן לביצוע פעילות זו.

המטרה היא מזעור של סכום זמני סיום של כל המשימות.

מס' מכונה משימה ופעילות	M1	M2	M3	M4
(A,1)	2			
(A,2)	1	2		
(A,3)				1
(B,1)		1		
(B,2)	1	2		
(B,3)	1			
(C,1)			2	
(C,2)				2
(C,3)	1			
(D,1)			1	2
(D,2)		2		
(D,3)		1		
(E,1)		1		
(E,2)		2		1
(E,3)			2	

• הנחות נוספות לדוגמא:

זמני מוכנות של כל המכונות (MR_k) ושל כל המשימות (JR_i) שווים ל-0.

4.2 פתרון הבעיה בעזרת Lingo

נפתור את הבעיה המוצגת בדוגמא ע"י התוכנה לאופטימיזציה Lingo .

לפניכם מוצג קוד התוכנית לפתרון הבעיה הנ"ל:

```
min=Ca+Cb+Cc+Cd+Ce;
```

```
Sa1>=0;
Sb1>=0;
Sc1>=0;
Sd1>=0;
Sc1>=0;
```

$$/ \quad S_{i1} \geq J R_i \quad i=a,b,c,d,e \quad /$$

```
Sa1+2*Xa11<=Sa2;
Sa2+Xa21+2*Xa22<=Sa3;
Sb1+Xb12<=Sb2;
Sb2+Xb21+2*Xb22<=Sb3;
Sc1+2*Xc13<=Sc2;
Sc2+2*Xc24<=Sc3;
Sd1+Xd13+2*Xd14<=Sd2;
Sd2+2*Xd22<=Sd3;
Se1+Xe12<=Se2;
Se2+2*Xe22+Xe24<=Se3;
```

$$/ \quad S_{ij} + \sum_{k=1}^K t_{ijk} \cdot X_{ijk} \leq S_{i(j+1)} \quad /$$

$$i=a,b,c,d,e$$

$$j=1,2$$

```
Xa11=1;
Xa21+Xa22=1;
Xa34=1;
```

$$/ \quad \sum_{k=1}^K X_{ijk} = 1 \quad /$$

$$i=a,b,c,d,e$$

$$j=1,2,3$$

```
Xb12=1;
Xb21+Xb22=1;
Xb31=1;
```

```
Xc13=1;
Xc24=1;
Xc31=1;
```

```
Xd13+Xd14=1;
Xd22=1;
Xd32=1;
```

```
Xe12=1;
Xe22+Xe24=1;
Xe33=1;
```

```
SMa11=Sa1*Xa11;
SMa21=Sa2*Xa21;
SMa22=Sa2*Xa22;
SMa34=Sa3*Xa34;
SMb12=Sb1*Xb12;
SMb21=Sb2*Xb21;
SMb22=Sb2*Xb22;
```

$$/ \quad S M_{ijk} = S_{ij} \cdot X_{ijk} \quad /$$

$$i=a,b,c,d,e$$

$$j=1,2,3$$

$$k=1,2,3,4$$

SMb31=Sb3*Xb31;
 SMc13=Sc1*Xc13;
 SMc24=Sc2*Xc24;
 SMc31=Sc3*Xc31;
 SMd13=sd1*Xd13;
 SMd14=sd1*Xd14;
 SMd22=sd2*Xd22;
 SMd32=sd3*Xd32;
 SMe12=Se1*Xe12;
 SMe22=Se2*Xe22;
 SMe24=Se2*Xe24;
 SMe33=Se3*Xe33;

$$/ \quad X_{ijk} \cdot X_{pqk} = \delta_{ijpqk} + \delta_{pqijk} \quad /$$

Da1b21+Db2a11=Xa11*Xb21;
 Da1b31+Db3a11=Xa11*Xb31;
 Da1c31+Dc3a11=Xa11*Xc31;
 Da2b21+Db2a21=Xa21*Xb21;
 Da2b31+Db3a21=Xa21*Xb31;
 Da2c31+Dc3a21=Xa21*Xc31;
 Db2c31+Dc3b21=Xb21*Xc31;
 Db3c31+Dc3b31=Xb31*Xc31;
 Da2b12+Db1a22=Xa22*Xb12;
 Da2b22+Db2a22=Xa22*Xb22;
 Da2d22+Dd2a22=Xa22*Xd22;
 Da2d32+Dd3a22=Xa22*Xd32;
 Da2e12+De1a22=Xa22*Xe12;
 Da2e22+De2a22=Xa22*Xe22;
 Db1d22+Dd2b12=Xb12*Xd22;
 Db1d32+Dd3b12=Xb12*Xd32;
 Db1e12+De1b12=Xb12*Xe12;
 Db1e22+De2b12=Xb12*Xe22;

Db2d22+Dd2b22=Xb22*Xd22;
 Db2d32+Dd3b22=Xb22*Xd32;
 Db2e12+De1b22=Xb22*Xe12;
 Db2e22+De2b22=Xb22*Xe22;
 Dd2e12+De1d22=Xd22*Xe12;
 Dd2e22+De2d22=Xd22*Xe22;
 Dd3e12+De1d32=Xd32*Xe12;
 Dd3e22+De2d32=Xd32*Xe22;
 Dc1d13+Dd1c13=Xc13*Xd13;
 Dc1e33+De3c13=Xc13*Xe33;
 Dd1e33+De3d13=Xd13*Xe33;
 Da3c24+Dc2a34=Xa34*Xc24;
 Da3d14+Dd1a34=Xa34*Xd14;
 Da3e24+De2a34=Xa34*Xe24;
 Dc2d14+Dd1c24=Xc24*Xd14;
 Dc2e24+De2c24=Xc24*Xe24;
 Dd1e24+De2d14=Xd14*Xe24;

$$/ \quad SM_{ijk} + t_{ijk} \cdot X_{ijk} \leq SM_{pqk} + W \cdot (1 - \delta_{ijpqk}) \quad /$$

$$SM_{pqk} + t_{pqk} \cdot X_{pqk} \leq SM_{ijk} + W \cdot (1 - \delta_{pqijk})$$

Sma11+2*Xa11<=SMb21+1000*(1-Da1b21);
 SMb21+Xb21<=Sma11+1000*(1-Db2a11);

SMb22+2*Xb22<=SMd22+1000*(1-Db2d22);
 SMd22+2*Xd22<=SMb22+1000*(1-Dd2b22);

Sma11+2*Xa11<=SMb31+1000*(1-Da1b31);
 SMb31+Xb31<=Sma11+1000*(1-Db3a11);

SMb22+2*Xb22<=SMd32+1000*(1-Db2d32);
 SMd32+Xd32<=SMb22+1000*(1-Dd3b22);

Sma11+2*Xa11<=SMc31+1000*(1-Da1c31);
 SMc31+Xc31<=Sma11+1000*(1-Dc3a11);

SMb22+2*Xb22<=SMe12+1000*(1-Db2e12);
 SMe12+Xe12<=SMb22+1000*(1-De1b22);

Sma21+Xa21<=SMb21+1000*(1-Da2b21);
 SMb21+Xb21<=Sma21+1000*(1-Db2a21);

SMb22+2*Xb22<=SMe22+1000*(1-Db2e22);
 SMe22+2*Xe22<=SMb22+1000*(1-De2b22);

Sma21+Xa21<=SMb31+1000*(1-Da2b31);
 SMb31+Xb31<=Sma21+1000*(1-Db3a21);

SMd22+2*Xd22<=SMe12+1000*(1-Dd2e12);
 SMe12+Xe12<=SMd22+1000*(1-De1d22);

Sma21+Xa21<=SMc31+1000*(1-Da2c31);
 SMc31+Xc31<=Sma21+1000*(1-Dc3a21);

SMd22+2*Xd22<=SMe22+1000*(1-Dd2e22);
 SMe22+2*Xe22<=SMd22+1000*(1-De2d22);

SMb21+Xb21<=SMc31+1000*(1-Db2c31);
 SMc31+Xc31<=SMb21+1000*(1-Dc3b21);

SMd32+Xd32<=SMe12+1000*(1-Dd3e12);
 SMe12+Xe12<=SMd32+1000*(1-De1d32);

SMb31+Xb31<=SMc31+1000*(1-Db3c31);
 SMc31+Xc31<=SMb31+1000*(1-Dc3b31);

SMd32+Xd32<=SMe22+1000*(1-Dd3e22);
 SMe22+2*Xe22<=SMd32+1000*(1-De2d32);

SMa22+2*Xa22<=SMb12+1000*(1-Da2b12);	SMc13+2*Xc13<=SMd13+1000*(1-Dc1d13);
SMb12+Xb12<=SMA22+1000*(1-Db1a22);	SMd13+Xd13<=SMc13+1000*(1-Dd1c13);
SMA22+2*Xa22<=SMb22+1000*(1-Da2b22);	SMc13+2*Xc13<=SMe33+1000*(1-Dc1e33);
SMb22+2*Xb22<=SMA22+1000*(1-Db2a22);	SMe33+2*Xe33<=SMc13+1000*(1-De3c13);
SMA22+2*Xa22<=SMd22+1000*(1-Da2d22);	SMd13+Xd13<=SMe33+1000*(1-Dd1e33);
SMd22+2*Xd22<=SMA22+1000*(1-Dd2a22);	SMe33+2*Xe33<=SMd13+1000*(1-De3d13);
SMA22+2*Xa22<=SMd32+1000*(1-Da2d32);	SMA34+Xa34<=SMc24+1000*(1-Da3c24);
SMd32+Xd32<=SMA22+1000*(1-Dd3a22);	SMc24+2*Xc24<=SMA34+1000*(1-Dc2a34);
SMA22+2*Xa22<=SMe12+1000*(1-Da2e12);	SMA34+Xa34<=SMd14+1000*(1-Da3d14);
SMe12+Xe12<=SMA22+1000*(1-De1a22);	SMd14+2*Xd14<=SMA34+1000*(1-Dd1a34);
SMA22+2*Xa22<=SMe22+1000*(1-Da2e22);	SMA34+Xa34<=SMe24+1000*(1-Da3e24);
SMe22+2*Xe22<=SMA22+1000*(1-De2a22);	SMe24+Xe24<=SMA34+1000*(1-De2a34);
SMb12+Xb12<=SMd22+1000*(1-Db1d22);	SMc24+2*Xc24<=SMe24+1000*(1-Dc2e24);
SMd22+2*Xd22<=SMb12+1000*(1-Dd2b12);	SMe24+Xe24<=SMc24+1000*(1-De2c24);
SMb12+Xb12<=SMd32+1000*(1-Db1d32);	SMc24+2*Xc24<=SMd14+1000*(1-Dc2d14);
SMd32+Xd32<=SMb12+1000*(1-Dd3b12);	SMd14+2*Xd14<=SMc24+1000*(1-Dd1c24);
SMb12+Xb12<=SMe12+1000*(1-Db1e12);	SMd14+2*Xd14<=SMe24+1000*(1-Dd1e24);
SMe12+Xe12<=SMb12+1000*(1-De1b12);	SMe24+Xe24<=SMd14+1000*(1-De2d14);
SMb12+Xb12<=SMe22+1000*(1-Db1e22);	
SMe22+2*Xe22<=SMb12+1000*(1-De2b12);	

Ca=Sa3+1;	/	$C_i = S_{ij} + \sum_{k=1}^K t_{ijk} \cdot X_{ijk}$	/
Cb=Sb3+1;			
Cc=Sc3+1;		i=a,b,c,d,e	
Cd=Sd3+1;			
Ce=Se3+2;			

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{אם פעילות } j \text{ של משימה } i \\ & \text{מעובדת על מכונה } k \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

@bin(Xa11);	@bin(Xc13);
@bin(Xa21);	@bin(Xd13);
@bin(Xb21);	@bin(Xe33);
@bin(Xb31);	@bin(Xa34);
@bin(Xc31);	@bin(Xc24);
@bin(Xa22);	@bin(Xd14);
@bin(Xb12);	@bin(Xe24);
@bin(Xb22);	
@bin(Xd22);	
@bin(Xd32);	
@bin(Xe12);	
@bin(Xe22);	

$$/ \delta_{ijpqk} = \begin{cases} 1, & \text{אם פעילות } j \text{ של משימה } i \\ & \text{משובצת לפני פעילות } q \text{ של משימה } p \\ & \text{על מכונה } k \end{cases} /$$

אחרת

@BIN(DA1B21);
 @BIN(DA2B31);
 @BIN(DB3A21);
 @BIN(DA2C31);
 @BIN(DC3A21);
 @BIN(DD2C31);
 @BIN(DC3D21);
 @BIN(DB3C31);
 @BIN(DC3B31);
 @BIN(DA2B12);
 @BIN(DB1A22);
 @BIN(DA2B22);
 @BIN(DB2A22);
 @BIN(DA2D22);
 @BIN(DD2A22);
 @BIN(DA2D32);
 @BIN(DD3A22);
 @BIN(DA2E12);
 @BIN(DE1A22);
 @BIN(DA2E22);
 @BIN(DE2A22);
 @BIN(DB1D22);
 @BIN(DD2B12);
 @BIN(DB1D32);
 @BIN(DD3B12);
 @BIN(DB1E12);
 @BIN(DA3D14);
 @BIN(DD1A34);
 @BIN(DA3E24);
 @BIN(DE2A34);
 @BIN(DC2E24);
 @BIN(DE2C24);
 @BIN(DC2D14);

@BIN(DE1B12);
 @BIN(DB1E22);
 @BIN(DE2B12);
 @BIN(DB2D22);
 @BIN(DD2B22);
 @BIN(DB2D32);
 @BIN(DD3B22);
 @BIN(DB2E12);
 @BIN(DE1B22);
 @BIN(DB2E22);
 @BIN(DE2B22);
 @BIN(DD2E12);
 @BIN(DE1D22);
 @BIN(DD2E22);
 @BIN(DB2A11);
 @BIN(DA1B31);
 @BIN(DB3A11);
 @BIN(DA1C31);
 @BIN(DC3A11);
 @BIN(DA2B21);
 @BIN(DB2A21);
 @BIN(DD1E24);
 @BIN(DC1D13);
 @BIN(DD1C13);
 @BIN(DC1E33);
 @BIN(DE3C13);
 @BIN(DD1E33);
 @BIN(DE3D13);
 @BIN(DA3C24);
 @BIN(DC2A34);
 @BIN(DD1C24);
 @BIN(DD1E24);
 @BIN(DE2D14);

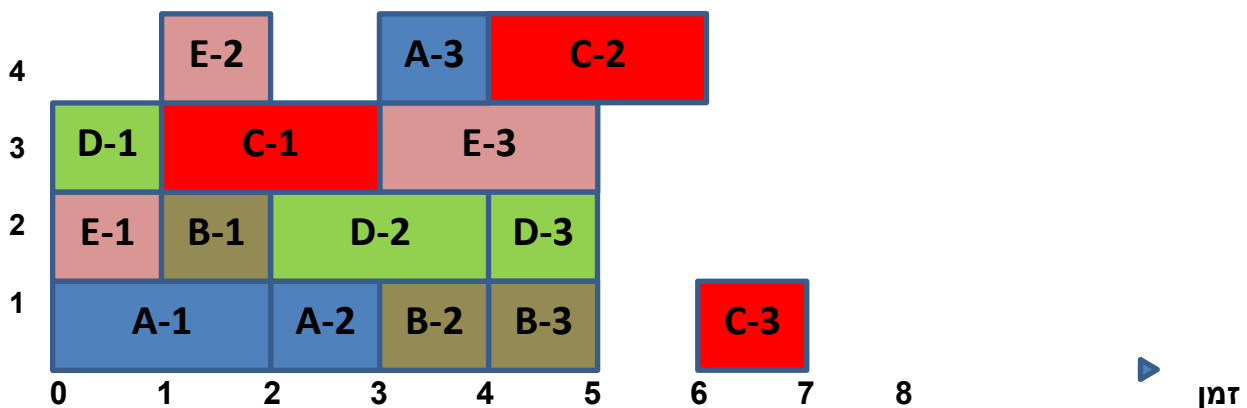
• פלט התוכנית מוצג בנספח א' (ראה עמ' 19)

4.3 תוצאות

נציג את תוצאות הפתרון שקיבלנו באמצעות דיאגרמת גנט.
 בפלט התוכנית מקבלים עבור כל פעילות של כל משימה לאיזו מכונה היא
 משובצת, כמה זמן נמשך העיבוד במכונה זו וסך זמני העיבוד של כל
 המשימות. האילוצים שתוכננו דואגים לכך שלא יהיו חפיפות, שעל אותה
 מכונה לא ישובצו בו זמנית שתי משימות, שאותה פעילות של משימה כלשהי
 לא תשובץ פעמיים ושפעילות כלשהי של כל משימה לא תתבצע לפני
 הפעילות הקודמת לה.

על סמך הנתונים הנ"ל בונים דיאגרמה:

מכונה



ערך פונקציה המטרה שהתקבל:

$$\sum_{i=1}^I Ci = Ca + Cb + Cc + Cd + Ce = 4+5+7+5+5 = 26$$

5 סיכום ומסקנות:

- בפרויקט עסקנו בעיקר בבעיית השיבוץ במערכת ייצור גמישה (ג'ובשופ גמיש). המטרה העיקרית שהצבנו היא מינימיזציה של זמני הסיום של כל המשימות הנמצאות והממשיכות להגיע למערכת הייצור.
בפרויקט עסקנו במקרה של שיבוץ סטטי בו בנקודת זמן של קבלת ההחלטה קיים מידע על כל ה-N משימות שנדרש לעבד (אך לא כולן חייבות להיות מוכנות לעיבוד בנקודת זמן זו).
על מנת לפתור את בעיית השיבוץ הנ"ל, בנינו מודל מתמטי המבוסס על אופטימיזציה. הצבנו לעצמנו פונקציית מטרה ובנינו את האילוצים הנדרשים לכך.
את פתרון הבעיה מימשנו על ידי תוכנה לפתרון בעיות אופטימיזציה - Lingo, בה רשמנו את פונקציית מטרה ואילוצים לבעיה שהגדרנו עבור דוגמא נתונה.
בהסתמך על תוצאות ריצה ופלט התוכנית, הצגנו את פתרון האופטימלי בעזרת דיאגרמת גנט.
- כהמשך והרחבות האפשריות ניתן לבנות מודל דומה לפתרון בעיית השיבוץ בסביבות ייצור אחרות.
כמו כן ניתן להגדיר פונקציות מטרה אחרות לבעיה.
בנוסף ניתן להגדיר ולהרחיב את המודל למקרה של שיבוץ דינאמי, בו במהלך עבודת המערכת ממשיכות להגיע משימות נוספות שאותן שנדרש לעבד.
- לסיום אוכל לומר כי העבודה על הפרויקט העשירה מאוד את ידיעותיי. שילוב הנושאים והמושגים החדשים בחומר שנלמד בקורסים אופטימיזציה ליניארית ואופטימיזציה לא ליניארית, עזר לי להבין יותר לעומק את החומר ואופן השימוש המעשי בו.
- ברצוני גם להודות לד"ר בוריס שניץ על ההנחיה המסורה, על העזרה הרבה בעת הצורך וההפניה למקורות מידע רלוונטיים.

- 1 Chinyao Low , Tai-Hsi Wu (2001), "Mathematical modelling and heuristic approaches to operation scheduling problems in an FMS environment". int. j. prod. res., 2001, vol. 39, no. 4, 689–708.
- 2 Jiang J., Hsiao W.-C., 1994, Mathematical programming for the scheduling problem with alternate process plans in FMS, Computers and Industrial Engineering, 27 (1-4), 15-18.
- 3 Michael L. Pinedo, Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems, 3rd ed., Springer, 2008
- 4 Shnits B., "Multi-Criteria Optimization-Based Dynamic Scheduling for Controlling FMS", Proceedings of the 21 st International Conference on Production Research (ICPR-21), on CD, 2011, Stuttgart, Germany.
- 5 W. Seifert Ralf, Susumu Morito, "Cooperative dispatching -exploiting the exhibility of an FMS by means of incremental optimization.", European Journal of Operational Research 129 (2001) 116-133
- 6 אילן הפטר, "ניהול מערכות ייצור השיבוץ"

7 נספחים

נספח א'-פלט התוכנית:

Local optimal solution found.

Objective value:	26.000000
Objective bound:	26.000000
Infeasibilities:	0.3108624E-14
Extended solver steps:	140
Total solver iterations:	23327

Variable	Value	Reduced Cost
CA	4.000000	0.000000
CB	5.000000	0.000000
CC	7.000002	0.000000
CD	5.000000	0.000000
CE	5.000000	0.000000
SA1	0.000000	0.000000
SB1	1.000000	0.000000
SC1	1.000000	0.000000
SD1	0.000000	0.000000
XA11	1.000000	0.000000
SA2	2.000000	0.000000
XA21	1.000000	0.000000
XA22	0.000000	0.000000
SA3	3.000000	0.000000
XB12	1.000000	0.000000
SB2	3.000000	0.000000
XB21	1.000000	-3.998997
XB22	0.000000	0.000000
SB3	4.000000	0.000000
XC13	1.000000	0.000000
SC2	4.000002	0.000000
XC24	1.000000	0.000000
SC3	6.000002	0.000000
XD13	1.000000	0.000000
XD14	0.000000	0.000000
SD2	2.000000	0.000000
XD22	1.000000	0.000000
SD3	4.000000	0.000000
SE1	0.000000	1.000000
XE12	1.000000	0.000000
SE2	1.000000	0.000000
XE22	0.000000	0.000000
XE24	1.000000	0.000000
SE3	3.000000	0.000000
XA34	1.000000	0.000000
XB31	1.000000	0.000000
XC31	1.000000	0.000000
XD32	1.000000	0.000000
XE33	1.000000	0.000000
SMA11	0.000000	0.000000
SMA21	2.000000	0.000000
SMA22	0.000000	0.000000
SMA34	3.000000	0.000000
SMB12	1.000000	0.000000

SMB21	3.000000	0.000000
SMB22	0.000000	0.000000
SMB31	4.000000	0.000000
SMC13	1.000000	0.000000
SMC24	4.000002	0.000000
SMC31	6.000002	0.000000
SMD13	0.000000	0.000000
SMD14	0.000000	0.000000
SMD22	2.000000	0.000000
SMD32	4.000000	0.000000
SME12	0.000000	0.000000
SME22	0.000000	0.000000
SME24	1.000000	0.000000
SME33	3.000000	0.000000
DA1B21	1.000000	0.000000
DB2A11	0.000000	0.000000
DA1B31	1.000000	0.000000
DB3A11	0.000000	0.000000
DA1C31	1.000000	0.000000
DC3A11	0.000000	0.000000
DA2B21	1.000000	1000.000
DB2A21	0.000000	0.000000
DA2B31	1.000000	0.000000
DB3A21	0.000000	0.000000
DA2C31	1.000000	1.000000
DC3A21	0.000000	1.000000
DB2C31	1.000000	0.000000
DC3B21	0.000000	0.000000
DB3C31	1.000000	0.000000
DC3B31	0.000000	0.000000
DA2B12	0.000000	0.000000
DB1A22	0.000000	0.000000
DA2B22	0.000000	0.000000
DB2A22	0.000000	0.000000
DA2D22	0.000000	0.000000
DD2A22	0.000000	0.000000
DA2D32	0.000000	0.000000
DD3A22	0.000000	0.000000
DA2E12	0.000000	0.000000
DE1A22	0.000000	0.000000
DA2E22	0.000000	0.000000
DE2A22	0.000000	0.000000
DB1D22	1.000000	1000.000
DD2B12	0.000000	0.000000
DB1D32	1.000000	0.000000
DD3B12	0.000000	0.000000
DB1E12	0.000000	-1000.000
DE1B12	1.000000	0.000000
DB1E22	0.000000	0.000000
DE2B12	0.000000	0.000000
DB2D22	0.000000	0.000000
DD2B22	0.000000	0.000000
DB2D32	0.000000	0.000000
DD3B22	0.000000	0.000000
DB2E12	0.000000	0.000000
DE1B22	0.000000	0.000000
DB2E22	0.000000	0.000000
DE2B22	0.000000	0.000000
DD2E12	0.000000	0.000000
DE1D22	1.000000	0.000000
DD2E22	0.000000	0.000000
DE2D22	0.000000	0.000000
DD3E12	0.000000	0.000000

DE1D32	1.000000	0.000000
DD3E22	0.000000	0.000000
DE2D32	0.000000	0.000000
DC1D13	0.000000	0.000000
DD1C13	1.000000	1000.000
DC1E33	1.000000	1000.000
DE3C13	0.000000	0.000000
DD1E33	1.000000	1.000000
DE3D13	0.000000	1.000000
DA3C24	1.000000	1000.000
DC2A34	0.000000	0.000000
DA3D14	0.000000	0.000000
DD1A34	0.000000	0.000000
DA3E24	0.000000	0.000000
DE2A34	1.000000	0.000000
DC2D14	0.000000	0.000000
DD1C24	0.000000	0.000000
DC2E24	0.000000	0.000000
DE2C24	1.000000	0.000000
DD1E24	0.000000	0.000000
DE2D14	0.000000	0.000000
DD3C31	0.000000	0.000000
DC3D31	0.000000	0.000000