# בעיית השידוך היציב (SMP) ובעיית מועמדות למכללות

מוגש ע"י: עופר גרין

מנחה פרויקט: ד"ר מרק ברמן

# תוכן עניינים

## הקדמה:

בעיית השידוך היציב היא בעייה הנוגעת בתחומי המתמטיקה, הכלכלה ומדעי המחשב המבקשת למצוא שידוך בין שתי קבוצות אלמנטים מאותו הגודל, בהנתן ההעדפה של כל אלמנט, כך שהשידוך יהיה יציב. שידוך במקרה זה הוא קישור בין אלמנט מקבוצה אחד לאלמנט מקבוצה שניה כך שכל אלמנט משויך לאלמנט יחיד (אלמנט לא יהיה מקושר לשני אלמנטים או יותר). השידוך היציב הרצוי הוא מצב סופי בו כל אלמנט מקבוצה אחת משודך לאלמנט מקבוצה שונה כך שלא יהיו קיימים שתי זוגות משודכים {x,y},{a,b} כך של- x עדיף להיות עם b ול- b עדיף להיות עם x מאשר עם הזוגות הנוכחיים שלהם.

בשנת 1962 הוכיחו David Gale ו- Lloyd Shapley במאמר[1] כי עבור תנאים מסוימים ובשימוש באלגוריתם שלהם, יהיה תמיד ניתן להגיע לשידוך יציב.

למרות שבמבט ראשון הבעייה נראית פשוטה וכמתעלמת מהיבטים רבים הדורשים התייחסות בבעיות יותר קרובות למציאות, בעיית השידוך היציב עדיין מהווה בסיס חשוב להגדרה וניתוח של בעיות הקיימות בארגונים ממשלתיים גדולים היום.

במסמך זה נתייחס לבעיית השידוך היציב, להגדרתה, ניתוחה ודרך פתרונה, ונרחיב עליה. כחלק מההרחבה נגיע ונציב את בעיית המועמדות למכללה ונראה כיצד צורת הניתוח שלה דומה לניתוח בעיית השידוך היציב.

[1] Gale, D.; Shapley, L. S. (1962). "College Admissions and the Stability of Marriage". *American Mathematical Monthly* **69**: 9–14

## בעיית השידוך היציב Stale Marriage Problem:

תהיה קבוצה של גברים M בגודל סופי n: M=$\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, וקבוצה של נשים W בגודל סופי n: W=$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. לכל גבר מקבוצה M קיימת קבוצה סדורה בגודל n: $Pm_i$ כאשר $1 \leq i \leq n$. נקרא לה "רשימת ההעדפה של גבר $m_i$" כאשר $m_i$ מייצג את הגבר מקבוצת הגברים אליו מתייחסת הקבוצה הסדורה. רשימת ההעדפה של כל גבר $m_i$ תכיל פרמוטציה (Permutation) של נשים מקבוצת הנשים ללא חזרות, כלומר, כל אישה תופיע פעם אחת בלבד ברשימה. יהיו בנוסף n רשימות של העדפות לנשים מקבוצה W: $Pw_i$ שתכיל פרמוטציות של גברים מקבוצת הגברים ללא חזרות. רשימת העדפה מייצגת אילו נשים מעדיף גבר יותר מאחרות ולהיפך.

נגדיר "שידוך" כזוג איברים אשר מכיל גבר אחד מקבוצה M ואישה אחת מקבוצה W. שידוך מקשר בין הגבר והאישה למטרת נישואים.

נגדיר "תוצאת שידוך" או "תוצאת שידוך סופית" כאוסף קבוצות שידוך זרות בינהן. כלומר, מצב שבו כל גבר מקבוצה M נשוי לאישה מקבוצה W כך שכל גבר "משודך" לאישה אחת ולהיפך.

נגדיר "החלפה" כפעולה בודדת בה מחליפים את הגברים או הנשים בין שני שידוכים קיימים. לדוגמא:

תוצאת שידוך לפני החלפה:

$\{(m_1, w_1), \quad (m_2, w_2)\}$

תוצאת שידוך לאחר החלפה:

$\{(m_1, w_2), \quad (m_2, w_1)\}$

תוצאה רצויה בהנתן קבוצת גברים, נשים ורשימת העדפות של שתי הקבוצות – למצוא תוצאת שידוך בין הנשים והגברים לפני רשימת ההעדפות של כולם כך שכולם יהיו מרוצים עם השידוך שלהם.

לכן נגדיר "תוצאת שידוך יציבה" כתוצאת שידוך סופית בה לא קיימת החלפה בין שני זוגות כך שבו-זמנית תגרום לגבר להיות עם אישה שהוא אוהב יותר ולהיפך. במילים אחרות, תוצאת השידוך <u>לא תהיה יציבה</u> אם גבר A מזוג אחד מעדיף את אישה B על פני אישתו ששובצה לו ובו-זמנית אישה B מזוג שני מעדיפה את גבר A על פני בעלה ששובץ לה - הרי טוב להם יותר ביחד מאשר בן/בת הזוג ששודכו להם והם יהיו מעוניינים "לברוח" ביחד. יש לציין כי תוצאת שידוך עדיין תחשב יציבה אם אחד מהצדדים מעוניין להתחלף (כדי להיות עם בן זוג יותר מועדף) אבל הצד השני אינו מעוניין – כלומר, כבר קיבל שידוך טוב יותר.

להלן הדגמה:

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 3 |

בשתי הטבלאות מוצגות רשימות ההעדפה של הגברים ושל הנשים בסדר יורד, כאשר מלמעלה למטה מוצג לכל אחד ואחת את מספר בת/בן הזוג בהתאמה מהמועדף ביותר להכי פחות מועדף לדוגמא – רשימת ההעדפה של גבר $m_1$: $Pm_1 = (w_1, w_2, w_3)$, גבר $m_1$ מעדיף להיות עם אישה $w_1$ והכי פחות מעדיף להיות עם אישה $w_3$. רשימת ההעדפה של אישה $w_1$ היא: $Pw_1 = (m_2, m_3, m_1)$. ישנם 6 אפשרויות שידוך אפשריות בין הגברים לנשים אבל רק 3 מהם יציבות:

I. $(m_1, w_1),\ (m_2, w_2), (m_3, w_3)$
II. $(m_1, w_3),\ (m_2, w_1), (m_3, w_2)$
III. $(m_1, w_2),\ (m_2, w_3), (m_3, w_1)$

ניתן לבדוק ולראות כי בכל אחד מן הפתרונות הנ"ל כי אם אישה מכל שידוך תציע לגבר משידוך אחר להתחלף, הוא לא יסכים כי הוא כבר משובץ עם אישה אותה הוא אוהב יותר. באותה מידה אם גבר כלשהו יציע לאישה אחרת משיבוץ אחר להתחתן היא לא תסכים, כי היא מרוצה עם הגבר שלה יותר. למרות זאת, שאר תוצאות השידוך האפשריות אינן יציבות – לדוגמא:

IV. $(m_1, w_2),\ (m_2, w_1), (m_3, w_3)$

או בהצגה אחרת:

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | ***3*** |
| ***2*** | 3 | 1 |
| 3 | ***1*** | 2 |

| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|---|---|---|
| ***2*** | 3 | 1 |
| 3 | ***1*** | 2 |
| 1 | 2 | ***3*** |

במקרה זה אישה $w_3$ וגבר $m_2$ קיבלו שניהם את הבחירה האחרונה שלהם. אם שניהם יעזבו את השיבוץ הנוכחי שלהם ויתחתנו אחד עם השנייה יווצר מצב יותר טוב לשניהם, הרי שניהם נמצאים במקום השני (יותר טוב מאחרון) ברשימת ההעדפות אחד של השני. יהיה רצון משותף לשנות את השיבוץ ולכן זוהי תוצאת שידוך לא יציבה.

שאלה 1:

בהנתן קבוצת גברים ונשים בגודל n עם רשימות ההעדפה שלהם בהתאם, האם תמיד נוכל לייצר או להגיע לתוצאת שידוך יציבה?

ישנה תשובה לשאלה אך לפני כן יש להציג קודם כל אלגוריתם קיים לבעיה (Gale and Shapley) ולאחר מכן ע"י חקירת התנהגותו יהיה ניתן להגיע למסקנה.

אלגוריתם שידוך של Gale and Shapley:

נציג את האלגוריתם בשלבים לשם פשטות:

- שלב 1: כל הגברים מציעים נישואין (משודכים) לאישה הראשונה ברשימת ההעדפה שלהם.
- שלב 2: אישה שקיבלה הצעת נישואין יחידה נחשבת מאורסת זמנית לגבר שהציעה לה נישואין. אישה שקיבלה הצעת נישואין מכמה גברים "תדחה" את כולם חוץ מהגבר הכי מועדף עליה מכלל הגברים שהציעו להלפי רשימת ההעדפה שלה ואליו היא תהיה מאורסת זמנית.
- שלב 3: כל הגברים שקיבלו דחייה חוזרים על שלב 1 עבור האישה הבא ברשימת ההעדפה שלהם.

מכאן שלב 2 ו-3 חוזרים על עצמם. התהליך יסתיים כאשר כל הנשים קיבלו הצעת נישואים.

כאן ניתן לחזור על השאלה – האם תמיד נוכל לייצר תוצאת שידוך יציבה? התשובה היא כן. כל תוצאת שידוך המתקבלת מהאלגוריתם הנ"ל תהיה יציבה.

הוכחה: אנו נרצה להראות כי בתוצאת שידוך סופית כי כל גבר שינסה להציע נישואין לאישה אותה הוא מעדיף יותר מאשר את אישתו ששובצה לו יקבל סירוב כי היא קיבלה שידוך יותר טוב ממנו - הרי זה יציבות . ניתן להוכיח זאת בצורה לוגית לפי מבט על האלגוריתם:

כל אישה שגבר מסוים מעדיף יותר מאשתו הנוכחית, אליה הוא משודך בסוף התהליך, דחתה אותו מתישהו במהלך הדרך עבור גבר אחר אותו היא מעדיפה יותר. אף אחת מהנשים הללו לא תסכים לקחת את הגבר על פני בעלה הנוכחי. מש"ל.

זוהי הוכחה מספקת המראה כי בשימוש באלגוריתם של Gale and Shapley תמיד תתקבל תוצאת שידוך יציבה בסוף התהליך (הוכחת קיום שידוך יציב). ניתן כעת לתת הגדרה נוספת ולאחר מכן בעזרתה יהיה ניתן לטעון טענה שתחזק את המסקנה אליה הגענו בשאלה הקודמת.

נגדיר עבור כל גבר "כלה אפשרית" ככל אישה אשר יכולה להיות משודכת לגבר בתוצאת שידוך יציבה כלשהי. בהדגמה למעלה (לפני שאלה 1) 3 התוצאות היציבות מראות שכלל הנשים הן כלות אפשריות לכל גבר, אך קיימים מקרים בהם גבר לא יוכל להיות עם אישה מסוימת אם רוצים שהתוצאה תהיה יציבה.

בהינתן ההגדרה של אוסף "כלות אפשריות" נטען את הטענה הבאה:

טענה: האלגוריתם של Gale and Shapley משדך בסופו לכל גבר את האישה הכי טובה אותו הוא יכול לקבל מתוך הכלות האפשריות לו – כלומר התוצאה אופטימלית לגברים.

הוכחה: נניח בשלילה כי ישנו גבר שלא קיבל את האישה הכי מועדפת עליו מתוך הכלות האפשריות. נסתכל על הגבר הראשון אשר בשלב כלשהו בתהליך נדחה על ידי כלה אפשרית שלו. נקרא לו $m_x$ ולה $w_{ppw}$. בהכרח קיים גבר כזה לפי ההנחה – כי במקרה ולא קיים גבר שנדחה על ידי כלה אפשרית הרי שתוצאת השיבוץ הסופית אופטימלית. הכלה האפשרית שדחתה את הגבר, עשתה זאת רק בגלל שהציעה לה גבר אותו היא רוצה יותר. נקרא לו $m_{better\ than\ m_x}$.

כך שמצב השידוך כרגע הוא:

$$m_x \leftrightarrow w_{final\ wife}$$

$$m_{better\ than\ m_x} \leftrightarrow w_{preferred\ possible\ wife\ for\ m_x}\ (w_{ppw})$$

כך שבעצם $m_{better\ than\ m_x}$ משודך לכלה האפשרית ל- $m_x$, ו- $m_x$ משודך לאישה אחרת ($w_{final\ wife}$) אותה הוא מעדיף פחות.

האישה אשר משודכת כעת ל- $m_{better\ than\ m_x}$, כלומר $w_{ppw}$, אוהבת אותו יותר מ- $m_x$, אותו היא דחתה, אבל בנוסף היא גם כלה אפשרית ל- $m_x$, זה אומר שיש תוצאת שידוך סופית יציבה כלשהי שמשדכת את $w_{ppw}$ ו- $m_x$ ביחד.עם זאת, ל- $m_{better\ than\ m_x}$ אין כלה אפשרית לו שהוא אוהב יותר מ- $w_{ppw}$ (כי לא קיימת אישה שדחתה בעל שאפשרי לה לפני $m_x$). מצב זה בפועל לא מאפשר שידוך יציב של $m_x$ עם $w_{ppw}$, זאת מפני ש $m_{better\ than\ m_x}$ ו- $w_{ppw}$ כרגע בראש העדיפות של השני. כלומר $w_{ppw}$ לא כלה אפשרית ל- $m_x$ – סתירה. מש"ל.

מסקנה: כל גבר מקבל את האישה הכי מתאימה לו (הכי גבוהה ברשימת ההעדפה שלו) מתוך כלל הנשים האפשריות לו בתוצאת שידוך יציב.

ניתן לציין כי ניתן להראות בצורה דומה לצורה בה הוכחנו את הטענה האחרונה כי בסוף האלגוריתם הנ"ל – בזמן שהגברים מקבלים את הבחירה הכי טובה מכלל הנשים האפשריות להם, הנשים מקבלות את הבחירה הכי גרועה מכלל הגברים האפשריים להם בתוצאות שידוך יציב.

עד כה דובר על שידוך יציב עבור הגברים, בו הם הכי מרוצים מהבחירה ומקבלים בשידוך את האישה הכי טובה מתוך הכלות האפשריות להן. עם זאת, בבחינה קצרה ניתן לראות כי מטעמי סימטריה קיים התהליך ההפוך: הנשים יכולות להציע לגברים והגברים ידחו או יתארסו זמנית לנשים לפי העדפתם– הנשים והגברים מחליפים מקומות באלגוריתם. זה כמובן מביא לכך שהנשים יקבלו את הבחירה הכי טובה האפשרית להן מכלל הגברים אותן יוכלו לקבל בתוצאת שידוך יציב, והגברים לעומת זאת יקבלו את הבחירה הכי פחות טובה עבורם מתוך כלל הכלות האפשריות להם בתוצאת שידוך יציב.

## הכללה 1 לבעיית השידוך היציב – מספר גברים ונשים שונה:

עד כה הוצג המקרה הפשוט ביותר בו מספר הנשים והגברים זהה ובסוף תהליך השידוך לכל גבר תהיה אישה ולהיפך. אך מה יקרה כאשר מספר הגברים גבוה ממספר הנשים? ומה קורה כאשר מספר הנשים גבוה ממספר הגברים? נבחן את המקרים עבור האלגוריתם בו הגברים מציעים לנשים אך התוצאות יהיו מקבילות לחלוטין גם למקרה ההפוך:

<u>$|M| > |W|$:</u>

כאשר מספר הגברים גבוה ממספר הנשים – האלגוריתם יסתיים כאשר כל אחד מהגברים או נבחר על ידי אישה או נדחה על ידי כל הנשים עבור גבר אחר. אם גבר ששודך עם אישה יעשה החלפה עם גבר שלא שודך זה יהיה מצב לא מטיב עבורו. בנוסף, קבוצת הגברים ששודכה מהווה תוצאה של שידוך יציב לפי האלגוריתם – כלומר, תוצאת השידוך עבור מספר גברים הגבוה ממספר הנשים - גם הוא תמיד יהיה יציב.

<u>$|M| < |W|$:</u>

כאשר מספר הנשים גבוה ממספר הגברים האלגוריתם יסתיים ברגע שישודכו כל הגברים לנשיהם. במצב זה גבר שכבר שודך לא ירצה לקחת אחת מן הנשים שנותרו ללא בעל מכיוון שהן נמוכות יותר ברשימת ההעדפה שלו, ובנוסף, השידוך של הנשים המשודכים ובעליהן מהווים תוצאת שידוך יציב – כלומר, תוצאת השידוך עבור מספר נשים גבוה ממספר הגברים גם הוא תמיד יהיה יציב.

## הכללה 2 לבעיית השידוך היציב – גברים או נשים לא רצויים:

בשביל לפתור את בעיית השידוך היציב, התבקשו כלל הנשים והגברים ליצור רשימת העדפה שמכילה את כלל המין השני בסדר מסויים. מצב יותר קרוב למציאות הוא כאשר אישה או גבר יכולים לסרב בתוקף להיות עם גבר או אישה כלשהם בהתאמה.

לדוגמא:

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 3 |
|  | 1 | 2 |

| $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
|  | 2 | 3 |

אישה $w_1$ מעדיפה את גבר $m_2$ ואחריו את גבר $m_1$ אך לעולם לא תסכים להנשא לגבר $m_3$. בנוסף גבר $m_1$ מעדיף את אישה $w_1$ ואחריה את אישה $w_3$ אך מסרב בתוקף להנשא לאישה $w_2$.

במקרה זה יתכן המצב כי לא כל הנשים או הגברים ישודכו בסוף התהליך. למרות זאת, בשימוש באלגוריתם של Gale and Shapley, תתקבל עדיין תוצאת שידוך יציב לפי אותו עקרון של ההכללה עבור מספר נשים ומספר גברים שונה.

## הכללה 3 לבעיית השידוך היציב – בעיית השותפים לדירה Stable Roommate Problem:

יותר מהכללה, בעיית השותפים לדירה היא בעייה בפני עצמה אשר דומה לבעיית השידוך היציב. בבעיית השותפים לדירה יש את הרצון לשדך אנשים בינהם מתוך קבוצה אחת בודדת לזוגות. גם כאן המטרה הרצויה היא להגיע לתוצאת שידוך יציבה, כאשר הגדרת היציבות מקבילה להגדרה כפי שהיא ניתנה בבעיית השידוך היציב – תוצאת שידוך תקרא יציבה אם לא קיימים שני אנשים מזוגות שונים שהיו מעדיפים אחד את השני מאשר את השותפים איתם הם נמצאים.

ניתן לתת דוגמא פשוטה המראה כי עבור הבעייה הזו יכולה להתקיים תוצאה לא יציבה:

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | |
| | | | |
| | | | |
| 4 | 4 | 4 | |

(את שאר המקומות בטבלה ניתן למלאות אך אין צורך במקרה זה)

במקרה הזה לא משנה מה ההעדפות של $m_4$ לא יכול להתקיים שידוך יציב. כל מי שישודך עם $m_4$ ירצה להתחלף עם שותף אחר ואחד מהשניים הנותרים יסכים לקחת אותו. לדוגמא:

$$(m_1, m_2), (m_3, m_4)$$

$m_3$ יעדיף את $m_1$ או $m_2$ על גבי $m_4$ איתו הוא שודך ומכיוון ש- $m_1$ ו- $m_2$ לא בראש רשימת ההעדפה אחד של השני בטוח אחד מהם יעדיף את $m_3$ על פני השותף הקיים שלו.

מכאן ניתן ללמוד כי לא תמיד ניתן לראות בבירור אם קיים פתרון יציב לכל בעיות השידוך באשר הן.

## הכללה 4 לבעיית השידוך היציב – בעיית המועמדות למכללות / בעיית בתי החולים והמתמחים college admissions problem:

הבעיה מוגדרת כך:

קבוצה של n מועמדים/סטודנטים אותם יש לשייך ל- m מכללות, כאשר $q_i$ היא המכסה המקסימלית של סטודנטים היכולה מכללה i לקבל לתוכה (כאשר $i \in \{1,2,\dots,m\}$ ). כמו בבעיית השידוך היציב כל מועמד ידרג את המכללות אליהם ירצה להכנס לפי סדר העדפה, כאשר מכללות אליהן המועמד אינו מעוניין להכנס לא ירשמו ברשימת ההעדפה שלו. נניח (עבור המקרה הפשוט) כי אין קשרים בסדר ההעדפה – כלומר במקרה ומועמד מעדיף להכנס לשתי מכללות או יותר באותה מידה אז במקרה זה יצטרך בסופו של דבר לדרג אותן בסדר עדיפות ברור. באותה הצורה כמו המועמדים, גם כל מכללה תדרג את n המועמדים לפי רשימת העדפה, כאשר גם בה ניתן להוציא מועמדים אשר מכללה לא תסכים לקבל בשום אופן.

הרצון כאן הוא לשייך/לשדך מועמדים למכללות לפי סדרי ההעדפה של המכללות והמועמדים ועפ"י מקום פנוי (מכסות מקסימליות של המכללות) כך שתוצאת השיוך תהיה יציבה.

נגדיר תוצאת שיוך יציבה בבעית המועמדות למכללות כתוצאת שיוך בה לא קיימים סטודנט A ומכללה B המקיימים את שני התנאים הבאים בו-זמנית:

- סטודנט A לא קיבל שיבוץ לאף מכללה או מעדיף לעבור למכללה B על פני המכללה אליו הוא שובץ.
- למכללה B נשאר לפחות מקום אחד פנוי או מעדיפה את סטודנט A על גבי אחד מהסטודנטים שכרגע ממלאים את המכסה הקיימת שלה.

בנוסף נגדיר "תוצאת שיוך אופטימלית" כתוצאת שיוך בה לכל מועמד – שיבוץ ההעדפה שלו למכללה טוב לפחות כמו בכל שיוך יציב אחר.

<u>טענה 1</u>:

אם קיימת תוצאת שיוך אופטימלית לבעיית המועמדות למכללה, אז היא יחידה.

<u>הוכחה</u>:

נניח בשלילה כי קיימים שני שיבוצים אופטימליים לבעיה. בהתחשב בהנחה כי אין קשרים בהעדפות המועמדים (אין שתי מכללות המדורגות באותו סדר עדיפות אצל מועמד יחיד), הרי שבמצב אחד לפחות מתוך הפתרונות האופטימליים מועמד אחד יהיה במצב פחות טוב יותר מאשר היה במצב השני – המועמד ישובץ למכללה בא הוא פחות מעוניין בשביל לפנות מקום לסטודנט אחר. לכן אחד מהמצבים לא אופטימלי למרות הכול.

<u>אלגוריתם שיוך עבור בעיית המועמדות למכללה</u>:

למען נוחות ההסבר נניח כי אם יש סטודנט שמכללה מסוימת אינה תהיה מוכנה לקבל בשום אופן, אז הסטודנט לא יהיה רשאי לנסות להתקבל אליה מלכתחילה. האלגוריתם מוסבר כך:

1.) כלל המועמדים שולחים את מועמדותם למכללות בראש רשימת העדיפות שלהם.
2.) מכללה עם מכסה של q תשים את q המועמדים המועדפים עליה ברשימת המתנה – כלומר הם משובצים באופן זמני למכללה כל עוד לא מגיש מועמד יותר מוצלח מועמדות, ואת השאר היא תדחה. אם נרשמו פחות מ- q סטודנטים למכללה, היא תכניס את כולם לרשימת ההמתנה.
3.) מועמדים שנדחו ישלחו לאחר מכן בקשה למכללות הנמצאות במקום השני ברשימת ההעדפה שלהם ושוב המכללות יבחרו את q המועמדים המועדפים עליהן מתוך רשימת הנרשמים החדשים והסטודנטים הנמצאים ברשימת ההמתנה שלהן וידחו את השאר.

התהליך יסתיים ברגע שכל מועמד: או נמצא ברשימת ההמתנה של מכללה מסוימת או נדחה על ידי כל המכללות ברשימת ההעדפה שלו. בשלב זה כל מכללה מקבלת סופית את כל הסטודנטים ברשימת ההמתנה שלה ללימודים.

<u>טענה 2</u>:

פתרון השיוך המתקבל מן האלגוריתם הנ"ל תמיד יהיה יציב.

<u>הוכחה</u>:

ההוכחה זהה להוכחת היציבות של בעיית השידוך היציב. עבור כל סטודנט - כל מכללה שעדיפה עליו יותר מהמכללה אליה הוא התקבל בסוף התהליך דחתה אותו בשלב מסויים. מש"ל.

טענה 3:

פתרון השיוך המתקבל מן האלגוריתם הנ"ל תמיד יהיה אופטימלי.

הוכחה:

ההוכחה דומה בהצגתה להוכחת האופטימליות לגברים בבעיית השידוך היציב.

נגדיר מכללה כ"אפשרית" עבור מועמד מסוים אם קיים פתרון שיוך יציב בו המועמד התקבל למכללה. נניח כי עד נקודה מסוימת בתהליך השיבוץ אף מועמד עדיין לא נדחה ע"י מכללה אפשרית לו. במקרה ואף מועמד לא נדחה ממכללה אפשרית לו עד סוף התהליך, הרי זוהי תוצאה אופטימלית (המועמדים קיבלו את השיבוץ הכי טוב). במקרה וכן קיים מועמד שנדחה – נסתכל על מכללה A שדוחה את מועמד a לטובת מילוי המכסה שלה במועמדים $b_1, \dots, b_q$ רצויים לה יותר מאשר מועמד a. נרצה להוכיח כי במקרה זה מכללה A היא בעצם לא היתה מכללה אפשרית בשביל מועמד a מלכתחילה.

ידוע שכל המועמדים $b_1, \dots, b_q$ מעדיפים את מכללה A יותר מכל משאר המכללות חוץ מהמכללות שכבר דחו אותם לפני כן. המכללות שדחו אותם לא אפשריות להם לפי ההנחה הראשונית כי מועמד a הוא הראשון שנדחה על ידי מכללה אפשרית לו. מכללה A מעדיפה לקחת את כל המועמדים $b_1, \dots, b_q$ אליה מאשר את a, אז הרי המכללה אינה אפשרית ל- a, לא יהיה סיכוי ל- a להתקבל. ובמקרה ההיפותטי בו a משובץ למכללה A ומועמד $\beta_i$ כלשהו משובץ למכללה אחרת אפשרית לו, הרי הפתרון יהיה לא יציב כי מכללה A תעדיף את $\beta_i$ אצלה והפוך. הוכחנו שמכללה A לא הייתה אפשרית למועמד a (הראשון שנדחה על ידי מכללה אפשרית לו) מלכתחילה.

מסקנה:

באלגוריתם השיוך הזה עבור בעיית המועמדות למכללה, מכללות דוחות רק מועמדים שלא היו יכולים להיות שייכים אליהם בשום פתרון שיוך יציב. לכן הפתרון אופטימלי - כל מועמד, שיבוץ ההעדפה שלו למכללה טוב לפחות כמו בכל שיוך יציב אחר. מש"ל.

ניתן לציין כי למרות שלא קיימת הסימטריות של בעיית השידוך היציב בבעיית המועמדות למכללה עדיין ניתן להפוך את תהליך השיוך שהוצע בכדי שיהיה לטובת המכללות במקום לטובת המועמדים. בתהליך ההפוך המכללות מגישות הצעות למועמדים אותם הם הכי רוצים שילמדו אצלם עד לכמות המכסה שלהם, והמועמדים, כמו הנשים בבעיית השידוך היציב, דוחים את כל המכללות חוץ מהמכללה המועדפת עליהן באותו הסיבוב. משם התהליך ממשיך בצורה דומה.

## סיכום:

המקרים שהוצגו במסמך הזה מתארים מצבים מסוימים מאוד אשר לרוב רחוקים מאוד ממצבים בעולם האמיתי (היוצאים מהעולם התיאורטי המתמטי) ומתעלמים מהרבה גורמים המשפיעים רבות על דרך הפתרון ועל התשובה האם בכלל יכול להתקיים מצב שיוך יציב או אופטימלי. מטרת בעיות השידוך שהוצגו הן לשמש בסיס לבעיות יותר מסובכות המכילות מגבלות נוספות המקשות על ניתוחן ופתרונן. למשל:

- בעיית המועמדות למכללה היא מקרה קצה של בעיית הקצאה אחרת הקיימת בארגון NRMP (National Resident Matching Program) בארה"ב שמטרתה לשבץ מסיימי לימודי רפואה למסלולי התמחות בבתי חולים ברחבי המדינות. בעיית השיבוץ של NRMP לוקחת בחשבון מתמחים בשנה השנייה להתמחות שלהם, זוגות הרוצים להכנס לתוכנית התמחות ביחד באותו בית החולים וטיפול מיוחד במקומות ריקים בבתי חולים שלא מלאו את המכסה שלהם.[2] יש להוסיף כי הוספת האפשרות לזוגות מסוימים לדרוש להכנס לאותה התוכנית ביחד, ורק התכונה הזאת בלבד, מעלה את סיבוכיות החישוב ומציאת הפתרון לרמת NP-Complete אשר לרוב לא ניתנת לניתוח עבור המקרה הכללי ודורשת כלי פתרון יותר מסובכים.
- בעיית השידוך היציב ובעיית השותפים לדירה דומות לבעיית השידוך בתורת הגרפים בה יש רצון לשדך זוגות של צמתים בגרף בצורה שתתן תוצאה הכי עדיפה לפי סט קריטריונים נתון. למרות שהפתרונות הקיימים לבעיית השידוך של תורת הגרפים שונים מהפתרונות לבעיית השידוך היציב ובעיית השותפים לדירה דרכי הניתוח דומים.

[2] http://www.nrmp.org/

## תוכנה:

תוכנת Stable_Marriage היא ממשק גרפי שנכתב בתוכנת Matlab.

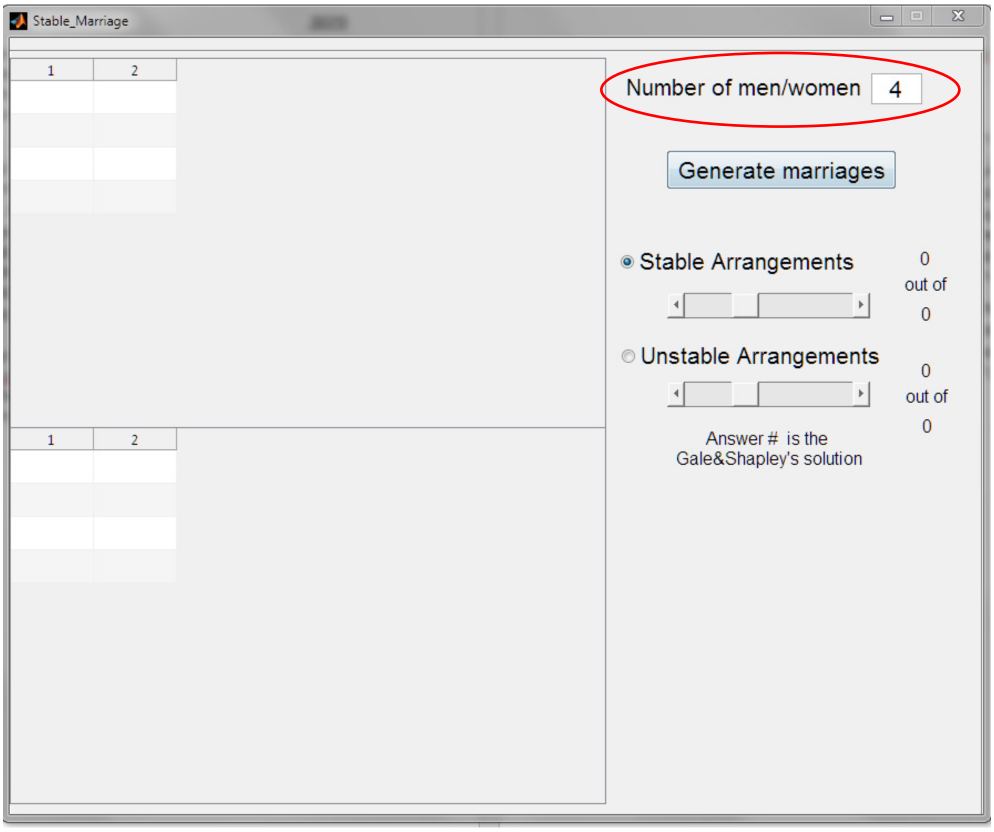
מטרת התוכנה להציג את כלל הנישואים האפשריים עבור בעיית השידוך היציב ( Stable Marriage Problem ) כאשר מספר הגברים ומספר הנשים זהה וגברים חייבים לכלול את כלל הנשים ברשימת ההעדפה שלהם ולהיפך. התוכנה מציגה את כלל תוצאות השידוך הסופיות, מחלקת אותן לתוצאות שידוך יציבות ולא יציבות ומציינת איזו תוצאה מן התוצאות היציבות היא התוצאה המתקבלת בשימוש באלגוריתם של Gale & Shapley. בנוסף, עבור כל תוצאת שידוך לא יציבה תסומן בתוכנה החלפה אפשרית בין זוגות שמראה את חוסר היציבות בשידוך.

בעזרת הממשק ניתן להדגים בקלות ובצורה גרפית את תוצאות השידוך, להדגים תוצאות שידוך לא יציבות ומה גורם להן להיות לא יציבות ובנוסף להראות את אופטימליות תוצאת השידוך של אלגוריתם Gale & Shapley (התוצאה הכי טובה בשביל הגברים והתוצאה הכי רעה עבור הנשים).

שלבי בדיקת השידוכים, מיונם, סימון ההחלפה האפשרית וכו' בתוכנה אינם מיועלים ( Not-Optimized ) מה שגורם לסיבוכיות זמן ריצה מאוד גבוהה (עד כדי $o(n^3)$), בעקבות זאת מספר הגברים והנשים בתוכנה הוגבל לבין 2 ו-7 גברים/נשים. למרות שהקוד יכול לתמוך בכל מספר גברים/נשים מ-2 ומעלה, 7 גברים/נשים מספיק לצורכי הדגמה.

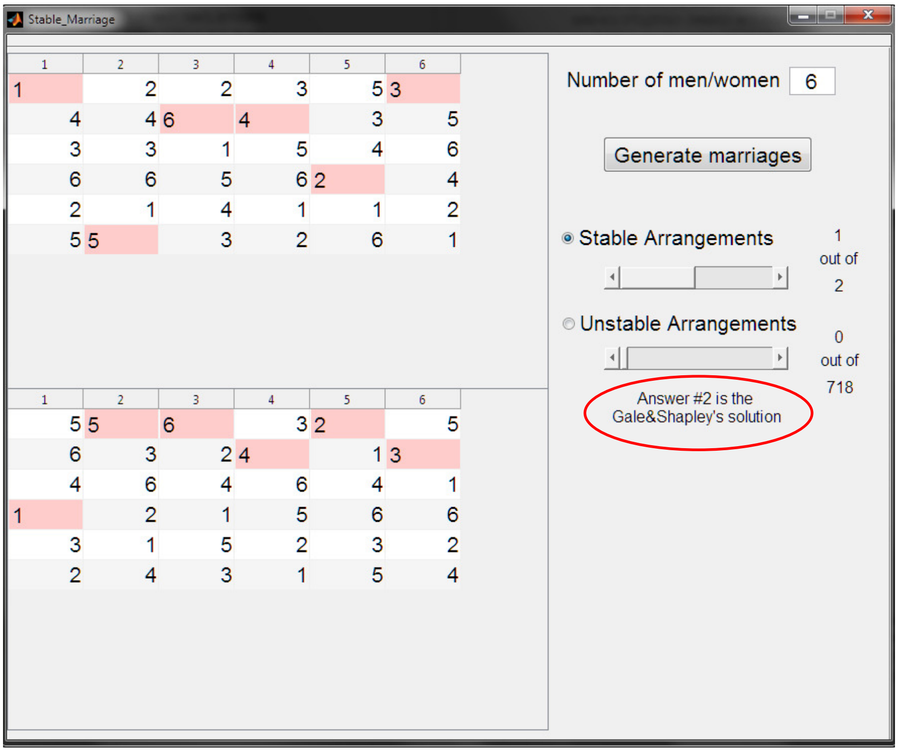
<u>הוראות הפעלה:</u>

1. הרץ את הקובץ Stable_Marriage.m ולאחר מכן בחר מספר גברים/נשים רצוי:

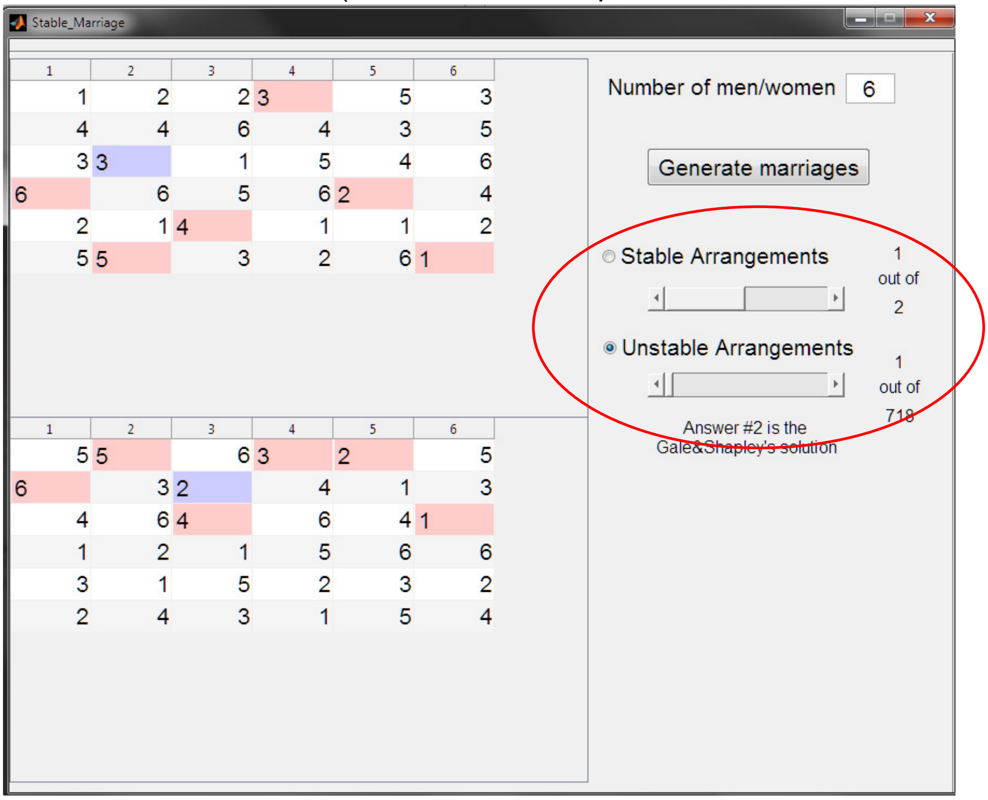



2. לחץ על כפתור Generate marriages. רשימת העדפות אקראית לכלל הנשים והגברים תיוצר, ולאחר מכן כלל פתרונות השידוך האפשריים יהיו קיימים להצגה כאשר הם ממוינים לפתרונות יציבים ( Stable Arrangements ) ופתרונות לא יציבים ( Unstable Arrangements ). הפתרון היציב הראשון יוצג באופן אוטומטי לאחר הלחיצה הראשונה.

בנוסף, בחלק התחתון הימני יצוין מספר הפתרון היציב מתוך הפתרונות היציבים שמתקבל מאלגוריתם של Gale & Shapley.




3.) הזזת המכוונים תציג תוצאות שידוך שונות. בבחירת שידוך לא-יציב תוצג תוצאת השידוך משמאל, ובנוסף לזאת תוצג בכחול אפשרות החלפה בין זוגות שיוצרת אי-יציבות (ההחלפה לא תהיה בהכרח היחידה בשידוך שגורמת לאי היציבות).



אפשרויות לשיפור:

1.) ייעול הקוד בכדי לייעל את זמן הריצה ובכך להראות תוצאות עבור מספר גברים/נשים גבוה יותר בזמן סביר.
2.) הוספת סימולציה של תהליך אלגוריתם Gale & Shapley בזמן אמת (לפי שלבים).
3.) הוספת כלי שמירת נתונים לניתוח סטטיסטי (מספר ממוצע של תוצאות שידוך יציבות לפי מספר גברים/נשים נבחר, מספר צעדים ממוצע לסיום אלגוריתם Gale & Shapley על רשימות העדפה אקראיות וכד').

# ביבליוגרפיה:


1. Gale, D.; Shapley, L. S. (1962). "College Admissions and the Stability of Marriage". *American Mathematical Monthly* **69**: 9–14
2. National resident matching program, http://www.nrmp.org.
3. D. G. McVitie and Leslie. B. Wilson, Stable marriage assignment for unequal sets, BIT Numerical Mathematics 10 (1970), 295-309.
4. Robert W. Irving, An efficient algorithm for the “stable roommates” problem, Journal of Algorithms 6 (1985), no. 4, 577-595.
5. Stable Matching Algorithms, EPSRC research project GR/M13329, http://www.dcs.gla.ac.uk/research/algorithms/stable/
6. Gusfield, D.; Irving, R. W. (1989). *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. MIT Press. p. 54