



פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

חקירת מודלים להתפשטות של מגיפות

עמיחי דויטש

Research of epidemics spread models

Amichay Doitsh

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

חקירת מודלים להתפשטות של מגיפות

עמיחי דויטש

Research of epidemics spread models

Amichay Doitsh

Advisor:

Name

Haggai Katriel

מנחה:

שם

חגי כתריאל

Karmiel

כרמיאל

2012



תוכן העניינים:

הקדמה – עמ' 2

חלק א – מודל SIR

הנחות יסוד – עמ' 3

בניית המודל – עמ' 3

בניית המודל הבדיד – עמ' 3

בניית המודל הרציף – עמ' 4

שירטוט פיתרון המודל – עמ' 5

תנאי התחלה – עמ' 7

מציאת התנאי למגיפה – עמ' 7

מספר החולים המקסימלי – עמ' 8

מספר החולים לאחר זמן רב – עמ' 9

גודל המגיפה – Z – עמ' 10

שירטוט גודל המגיפה כתלות ב- R_0 – עמ' 13

חלק ב – מודל SIR^n

הנחות המודל – עמ' 14

בניית המודל – עמ' 14

בניית מודל עבור שתי אוכלוסיות – עמ' 15

המודל הסופי – עמ' 16

גודל המגיפה – עמ' 17

בניית מערכת המשוואות – עמ' 17

תנאים לפיתרון מערכת המשוואות עבור $n=2$ – עמ' 19

פיתרון חיובי 'נולד' – עמ' 30

סיכום – עמ' 33

דוגמה מספרית של פיתרון המודל – עמ' 37

סיכום – עמ' 41

רשימה ביבליוגרפית – עמ' 42

הקדמה

מודל של מגיפה הוא כלי באמצעותו מתארים התפשטות של מחלה מדבקת בתוך אוכלוסייה.

במטרה לפתח מודל נדון קודם לכן בהגדרת המושגים הקשורים בו :

מחלות מדבקות מקוטלגות בדרך כלל או כאקוטיות או ככרוניות

המושג אקוטי מתייחס לזיהומים המתפשטים במהירות וגם חולפים יחסית מהר כגון – שפעת ואבעבועות רוח. לעומת זאת, המושג כרוני הוא ההיפך מאקוטי, וכוונתו למחלות שמתפתחות בהדרגה, נמשכות זמן רב (חודשים או שנים) ומשתנות באיטיות במשך הזמן כגון - הרפס וכלמידיה, המודל שנדבר עליו מתאים למחלות שהן אקוטיות.

למודל של מגיפה יש שתי מטרות, חיזוי והבנה. כלומר מתן תחזית של היקף המגיפה שעומדת להתרחש והבנת תהליך התפשטות המגיפה

אפשרי למדל באופן מתמטי תהליך התפשטות של מחלות מדבקות רבות וכך לחזות את תוצאות המגיפה כדי להתמודד איתה טוב יותר. לדוגמה – לדעת כמה אחוזים מהאוכלוסייה יש לחסן ע"מ למנוע את התפרצות המגיפה, או לבודד את המגיפה ולמנוע התפשטות.

במידול המתייחס למגיפה באוכלוסייה גדולה (לדוגמה – שחפת) נשתמש במודלים מתמטיים דטרמיניסטיים.

במודל דטרמיניסטי, יחידים באוכלוסייה מיוחסים לתתי קבוצות שונות שכל אחת מהן מייצגת שלב שונה של המגיפה.

אותיות כגון M,S,T,I,R משמשות בדרך כלל לייצג את השלבים במגיפה (ואת חלקם נפגוש במאמר זה)

מעבר משלב מסוים של המגיפה לשלב אחר מתבטא מתמטית בצורת נגזרת. לכן המודל מנוסח בעזרת משוואות דיפרנציאליות.

במאמר זה נבנה שני מודלים שמתארים התפרצות של מגיפה

במודל הראשון נחלק את האוכלוסייה ל-3 קבוצות של רגישים, חולים וחסניים

נגדיר קצב זיהום וקצב החלמה ובאמצעותם נתאר הדבקה והבראה וע"י הבנת הדינמיקה של המגיפה נבנה מערכת משוואות, משוואה אחת לכל קבוצה.

במודל השני נחלק את האוכלוסייה לתתי אוכלוסיות שלה לפי מין, מוצא, גיל וכדומה.

כל תת אוכלוסייה נחלק ל-3 קבוצות של רגישים, חולים וחסניים

גם כאן נגדיר קצב זיהום וקצב החלמה ובאמצעותם נתאר הדבקה והבראה, וע"י הבנת הדינמיקה של המגיפה נבנה מערכת משוואות, וכאן נקבל מערכת בעלת 3 משוואות, 3 משוואות לכל תת אוכלוסייה.

ובשתי המודלים, בכל מודל בנפרד, ע"י ניתוח מתמטי נמצא תנאים לכך שתפרוץ או לא תפרוץ מגיפה

את הפתרונות של מערכות המשוואות נשרטט בכלים נומריים וכך נראה בצורה גרפית את מהלך המגיפה, ובנוסף נחשב את גודלה.

חלק א – מודל SIR

מודל SIR מתאר התפרצות של מגיפה באוכלוסייה סגורה בפרק זמן מסוים.

מודל המתאר מגיפה עלול להיות מורכב מאוד. ומודל שכזה קשה מאוד ואולי בלתי אפשרי לפתור אותו ולהסיק ממנו מסקנות, לכן נניח מספר הנחות ומספר הגבלות על המודל שלנו :

א.1: הנחות יסוד:

1. גודל האוכלוסייה קבוע
2. האוכלוסייה "מתערבבת היטב" (well stirred). כלומר, לכל פרט באוכלוסייה יש סיכוי זהה לפגוש כל פרט אחר.
3. אדם שחלה במחלה, או שיבריא ממנה ויהיה חסין מפניה, או שימות.

א.2: בניית המודל

נחלק את האוכלוסייה לשלושה חלקים באופן הבא :

S - מספר הרגישים

I - מספר החולים

R – מספר החסינים (גם אדם שמת, מבחינתנו הוא חסין).

גודל האוכלוסייה קבוע, ולכן $S+I+R=N=constant$ בכל רגע.

נפתח תחילה מודל ראשוני, עם משוואות בדידות (משוואות בזמן בדיד), וממודל זה נעבור ע"י תהליך גבולי למודל בזמן רציף.

א.2.א: בניית המודל הבדיד:

נניח שבהסתברות p פגישה בין חולה ורגיש תסתיים בהדבקה.

בנוסף, נניח שאדם פוגש ביום k אנשים בממוצע.

אזי, מספר האנשים שאדם חולה ידביק ביום הוא $p \cdot k$ מתוך k האנשים שהוא פגש.

נסמן: $\beta = p \cdot k$, ונקרא ל- β קצב הזיהום.

מספר הרגישים בכל רגע הוא S_t , וגודלם היחסי באוכלוסייה הוא $\frac{S_t}{N}$, ולכן, ביום t אדם חולה

ידביק $\beta \frac{S_t}{N}$ אנשים רגישים.

(ישנה חלוקה ב- N , כי לא כל האנשים שבהם נתקל החולה הם רגישים, אלא רק החלק היחסי של קבוצת הרגישים מתוך כלל האוכלוסייה).

ו I_t אנשים ידביקו בכל יום $\frac{\beta}{N} \cdot I_t \cdot S_t$ אנשים רגישים.

ולכן, קבוצת הרגישים תלך ותקטן בכל פרק זמן באורך Δt בצורה הבאה :

$$S_{t+\Delta t} = S_t - \left(\frac{\beta}{N} S_t I_t\right) \Delta t$$

נגדיר γ להיות קצב ההחלמה

נשים לב, כי כל האנשים שיוצאים מקבוצת הרגישים עוברים לקבוצת החולים, ובנוסף,

כל האנשים שמבריאים יוצאים מקבוצת החולים, לכן קבוצת החולים תתנהג כך :

$$I_{t+\Delta t} = I_t + \left(\frac{\beta}{N} S_t I_t - \gamma I_t\right) \Delta t$$

וכל האנשים שמבריאים, עוברים מקבוצה I לקבוצה R, לכן :

$$R_{t+\Delta t} = R_t + (\gamma I_t) \Delta t$$

קיבלנו את המערכת הבדידה :

$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} = S_t - \left(\frac{\beta}{N} S_t I_t\right) \Delta t \\ I_{t+\Delta t} = I_t + \left(\frac{\beta}{N} S_t I_t - \gamma I_t\right) \Delta t \\ R_{t+\Delta t} = R_t + (\gamma I_t) \Delta t \end{cases}$$

מאחר והנחנו שגודל האוכלוסייה קבוע, אז לא באמת משנה לנו מהו אותו גודל N. ולכן ננרמל המשוואה ע"י החלפת משתנים, ונניח שגודל האוכלוסייה הוא 1 (N=1).

$$\begin{cases} \tilde{S}_t = \frac{S_t}{N} \\ \tilde{I}_t = \frac{I_t}{N} \\ \tilde{R}_t = \frac{R_t}{N} \end{cases}$$

ולצורך נוחות לא נרשום את המשתנים עם גל, אלא בלעדיו.

המערכת הבדידה הסופית תיראה כך:

$$\begin{cases} S_{t+\Delta t} = S_t - (\beta S_t I_t) \Delta t \\ I_{t+\Delta t} = I_t + (\beta S_t I_t - \gamma I_t) \Delta t \\ R_{t+\Delta t} = R_t + (\gamma I_t) \Delta t \end{cases}$$

וכעת S, I, R מייצגים את השבר של האוכלוסייה בכל אחת מהקבוצות, כלומר :

$$S+I+R=1$$

א.2.ב: בניית המודל הרציף

ע"י העברת אגפים וחלוקה ב Δt נקבל מערכת כזו :

$$\begin{cases} \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{\Delta t} = -\beta S_t I_t \\ \frac{I_{t+\Delta t} - I_t}{\Delta t} = \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ \frac{R_{t+\Delta t} - R_t}{\Delta t} = \gamma I_t \end{cases}$$

כעת נשאיף את Δt ל-0. ואז בשלושת המשוואות במערכת נקבל בצד שמאל את

הנגזרת של S, של I ושל R ונקבל את המערכת הבאה :

$$\begin{cases} S' = -\beta SI & (1) \\ I' = \beta SI - \gamma I & (2) \\ R' = \gamma I & (3) \end{cases}$$

וזו מערכת SIR הסופית.

יש לציין שאת מערכת המשוואות הנ"ל לא ניתן לפתור באופן מפורש, אלא בכלים נומריים.

- נקודה מעניינת, אמרנו שגודל האוכלוסייה הוא קבוע, וניתן לראות ע"י חיבור שלושת המשוואות הדיפרנציאליות שמתקיים:

$$(S + I + R)' = -\beta SI + (\beta SI - \gamma I) + \gamma I = 0$$

כלומר, גודל האוכלוסייה הוא באמת קבוע (כי נגזרת של קבוע שווה ל-0).

א.2.ג: שירטוט פיתרון המודל (בכלים נומריים)

נניח שישנה אוכלוסייה של 6,000,000 אנשים

ואליה נכנסים 10 אנשים חולים

וכל שאר ה- 5,999,990 הם אינם חסינים, כלומר הם רגישים.

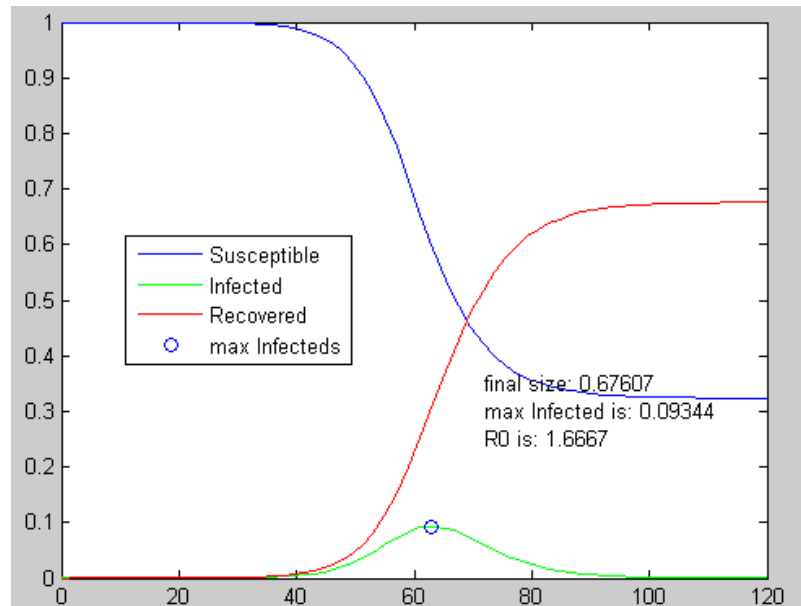
נרמל את האוכלוסייה:

$$\begin{cases} S(0) = \frac{5,999,990}{6,000,000} \\ I(0) = \frac{10}{6,000,000} \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

נניח כי הפרמטרים הם:

$$\begin{cases} \beta = 0.5 \\ \gamma = 0.3 \end{cases}$$

שירטוט הפיתרון נראה כך:



גודל המגיפה שקיבלנו:

$$Z = 0.67607$$

כלומר, מספר האנשים שחלו הוא $0.67607 \cdot 6,000,000$

כלומר 4,056,420 אנשים חלו.

```

% running example:
% enter - SIR
% enter initial values - [ti tf Si Ii Ri], for example [0 10 0.99
0.01 0]
% enter beta and gamma values - [beta gamma], for example [5 2]
function SIR
clear all; close all;clc
Q=input('enter initial values [ti tf Si Ii Ri] as vektor \n')
W=input('enter [beta gamma] as vektor \n')
R0=W(1)/W(2); %the parameter R0
ti=Q(1);tf=Q(2);Si=Q(3);Ii=Q(4);Ri=Q(5); %Si is the initial
Susceptibles
%ans so Ii,Ri, initial
values
%tf is time final,ti is time
initial
[T,Y] = ode45(@MySIR,[ti tf],[Si Ii Ri],[],W);
plot(T,Y(:,1),'b')
hold on
plot(T,Y(:,2),'g')
plot(T,Y(:,3),'r')
%calculating maximum Infecteds
Tmax=spline(Y(:,1),T,1/R0);Imax=spline(T,Y(:,2),Tmax);
plot(Tmax,Imax,'o')
legend('Susceptible','Infected','Recovered','max
Infecteds','location','best')
x=num2str(R0);y='R0 is: ';z=[y x];
text(ti+(tf-ti)*6/10,0.25,z)
x=num2str(Imax);y='max Infected is: ';z=[y x];
text(ti+(tf-ti)*6/10,0.30,z)
x=num2str(Y(1,1)-Y(end,1));y='final size: ';z=[y x];
text(ti+(tf-ti)*6/10,0.35,z)
axis([ti tf 0 1])

function dy = MySIR(t,y,W)
beta=W(1);
gamma=W(2);
dy = zeros(3,1);
dy(1) = -beta*y(1)*y(2);
dy(2) = beta*y(1)*y(2)-gamma*y(2);
dy(3) = gamma*y(2);

```


א.3: תנאי התחלה:

טבעי להניח שקודם להתפרצות מגיפה האוכלוסייה מורכבת בעיקר מאנשים רגישים, ושאינן אנשים החסינים לה. וע"מ שתתפרץ מגיפה חייבים להיות באוכלוסייה גם אנשים חולים (למרות שמספרם יכול להיות קטן מאוד).

$$\begin{cases} S(0) > 0 \\ I(0) > 0 \\ R(0) = 0 \end{cases}$$

נרמלנו את גודל האוכלוסייה, ולכן:

$$S(0) + I(0) = 1$$

א.4: תנאי למגיפה:

נאמר שישנה מגיפה, אם מספר החולים יגדל בתחילת התקופה. כלומר, אם $I'(0) > 0$. מהמשוואה (2) נקבל:

$$I'(0) > 0 \Leftrightarrow I(0)(\beta S(0) - \gamma) > 0 \Leftrightarrow S(0) > \frac{\gamma}{\beta}$$

וזה התנאי למגיפה שלנו.

הגדרת R_0 :

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

ל R_0 ישנה משמעות רבה שנראה בהמשך.

כרגע נאמר שזהו ממוצע האנשים שחולה אחד ידביק במשך תקופת המחלה שלו.

מכיוון ש- β הוא מספר האנשים שחולה מדביק ביום, ו- $\frac{1}{\gamma}$ הוא פרק הזמן הממוצע עד שאדם חולה יבריא.

נשים לב כי התנאי למגיפה הוא $S(0) > \frac{1}{R_0}$

ותנאי זה חשוב מאוד, כי הוא אומר לנו כמה אנשים עלינו לחסן ע"מ למנוע את המגיפה.

כי כשנחסן אנשים נקטין את $S(0)$. ואם נדע את R_0 אז נוכל להקטין את $S(0)$ מספיק ע"מ שאי השוויון של התנאי למגיפה פשוט לא יתקיים.

ונראה דוגמא לכך בהמשך המאמר

5.א: מספר החולים המקסימלי

אומנם לא ניתן לפתור את מערכת המשוואות בצורה אנליטית אך בעזרת פעולות מתמטיות נוכל לקבל ביטוי של אחת הפונקציות ממערכת המשוואות שלנו כתלות בפונקציה אחרת, ומביטוי זה למצוא מה יהיה מספר החולים בשיא המגיפה. כעת נמצא קשר בין הפונקציה I והפונקציה S :

$$\begin{cases} S' = -\beta SI \\ I' = \beta SI - \gamma I \end{cases}$$

מחלוקת משוואה ראשונה במשוואה שנייה נקבל $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}$

פתרון של משוואה זו הינו $I(S) = \frac{1}{R_0} \ln(S) - S + c$

c קבוע שהתקבל מפעולת האינטגרציה, ואפשר לקבל אותו מתנאי ההתחלה $t=0$:

$$c = -\frac{1}{R_0} \ln(S(0)) + S(0) + I(0)$$

ואז נקבל את הביטוי: $I(S) = \frac{1}{R_0} \ln\left(\frac{S}{S(0)}\right) - S + S(0) + I(0)$

משוואה זו נכונה לכל t , ונוכל לכתוב אותה כך:

$$I(t) = \frac{1}{R_0} \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) - S(t) + S(0) + I(0)$$

לצורך בדיקה האם המשוואה נכונה לכל t נגזור את שני האגפים:

$$I'(t) = \frac{1}{R_0} \frac{S'(t)}{S(t)} - S'(t)$$

נציב את $S'(t)$ ממשוואה (1) ונקבל:

$$I'(t) = \frac{\gamma}{\beta} \frac{(-\beta SI)}{S} + \beta SI = \beta SI - \gamma I$$

וקיבלנו את משוואה (2), כלומר קיבלנו פסוק אמת.

נרצה למצוא את שיא המגיפה, כלומר את הערך המקסימלי לפונקציה $I(t)$, לכן נשווה את הנגזרת לאפס:

$$I'(t) = 0 \Leftrightarrow \beta SI - \gamma I = 0 \Leftrightarrow S = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{R_0}$$

כלומר, מספר החולים המקסימלי יתקבל ברגע בו מספר הרגישים יהיה $\frac{1}{R_0}$.

$$\max(I) = \frac{1}{R_0} \ln\left(\frac{1}{R_0 S(0)}\right) - \frac{1}{R_0} + S(0) + I(0)$$

ואם נניח כי $S(0) = 1$ ו- $I(0) = 0$ נקבל:

$$\max(I) = \frac{1}{R_0} \ln\left(\frac{1}{R_0}\right) - \frac{1}{R_0} + 1$$

א.6: מספר החולים לאחר זמן רב:

כעת נוכיח, כי לאחר זמן גדול מספיק, מספר החולים יהיה 0. כלומר נוכיח כי הגבול הבא קיים ושווה ל-0:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

הוכחה:

תחילה נבחין כי הגדלים S, I, R הם ערכים חיוביים וקטנים מאחד. $0 \leq S, I, R \leq 1$. נשים לב כי $S' = -\beta SI$. כלומר, S היא פונקציה מונוטונית יורדת, והיא כמובן רציפה. ולפונקציה רציפה מונוטונית וחסומה יש גבול.

לכן $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$ קיים.

כמו כן מהמשוואה $R' = \gamma I$ נסיק כי R היא פונקציה מונוטונית עולה, וגם היא רציפה, ולפונקציה רציפה מונוטונית וחסומה יש גבול.

לכן גם $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$ קיים.

ואם הגבול ל- S וגם ל- R קיים, אז מהמשוואה $S+I+R=1$ נוכל להסיק שגם ל- I יש גבול באינסוף, כלומר גם $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ קיים. נכתוב מסקנה זו:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = L$$

כאשר L סופי, חיובי (כי I חיובי) וקטן מ-1 (כי I קטן מ-1).

נוכיח ש- $L=0$

נניח כי $L > 0$:

נכתוב את המשוואה השלישית:

$$R' = \gamma I$$

נשאיף לאינסוף את שני האגפים

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R' = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma I$$

הגבול של I הוא $c > 0$, נציב זאת:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R' = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma c = \gamma c > 0$$

ומכאן נקבל כי

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$$

וזה בסתירה לכך ש- $0 \leq R \leq 1$

ולכן הגבול L אינו גדול מאפס, אלא $L=0$. כלומר

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$$

מ.ש.ל.

א.7: גודל המגיפה - Z

יעניין אותנו לחזות מה יהיה גודל המגיפה, כלומר כמה אנשים יחלו כתלות בפרמטרים β, γ . מאחר שלמערכת המשוואות אין פיתרון אנליטי, בכלל לא מובן מאליו שנצליח לפתח משוואה שהפיתרון שלה ייתן לנו את גודל המגיפה, ומעניין להיווכח שזה אפשרי.

דיברנו על כך שלפונקציה S יש גבול, מפני שהיא מונוטונית יורדת וחסומה.

הוכחנו כי גם ל-I ישנו גבול - 0.

ואם ל-S ול-I יש גבול, אז מהשוויון $S+I+R=1$ נוכל להסיק שגם ל-R יש גבול.

את גודל המגיפה נסמן ב-Z, והוא שווה לגבול הבא:

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) - R(0)$$

וזאת מכיוון שכל האנשים שהתווספו לקבוצת החסינים מרגע 0 ועד אינסוף הם כל האנשים שחלו.

אם נניח ש-I(0) היה קטן מאוד, אז נוכל גם לומר כי:

$$Z = \lim_{t \rightarrow \infty} S(0) - S(t)$$

וזאת מכיוון שהאנשים שחלו היו בקבוצת הרגישים בהתחלה, והם חלו ויצאו ממנה.

לצורך נוחות נסמן:

$$\begin{cases} R(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) \\ I(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \\ S(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \end{cases}$$

נראה כי שני הביטויים עבור Z הם זהים:

נניח כי מספר החולים בתחילת המגיפה היה קטן מאוד, כלומר - $I(0)=0$

ואנו יודעים כי $I(\infty) = 0$. (ראה א.6: מספר החולים לאחר זמן רב)

נרמלנו את גודל האוכלוסייה ולכן -

$$\begin{cases} S(0) + R(0) = 1 \\ S(\infty) + R(\infty) = 1 \end{cases} \rightarrow \{R(\infty) - R(0) = S(0) - S(\infty)\}$$

ורואים ששני הביטויים עבור Z הם זהים.

מהמשוואה הדיפרנציאלית עבור S נקבל:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = -\beta SI &\rightarrow \frac{dS}{S(t)dt} = -\beta I \rightarrow \int_0^\infty \frac{dS}{S(t)dt} dt = -\beta \int_0^\infty I(t)dt \\ \int_0^\infty \frac{dS}{S(t)} &= -\beta \int_0^\infty I(t)dt \rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(S(b)) - \ln(S(0)) = -\beta \int_0^\infty I(t)dt \end{aligned}$$

נשתמש ב-

$$S(\infty) = S(0) - Z$$

ונקבל:

$$\ln(S(0) - Z) - \ln(S(0)) = -\beta \int_0^\infty I(t) dt$$

בנוסף: $\dot{R} = \gamma I$

$$\gamma \int_0^\infty I(t) dt = \int_0^\infty \frac{dR}{dt} = \lim_{b \rightarrow \infty} R(b) - R(0) = Z$$

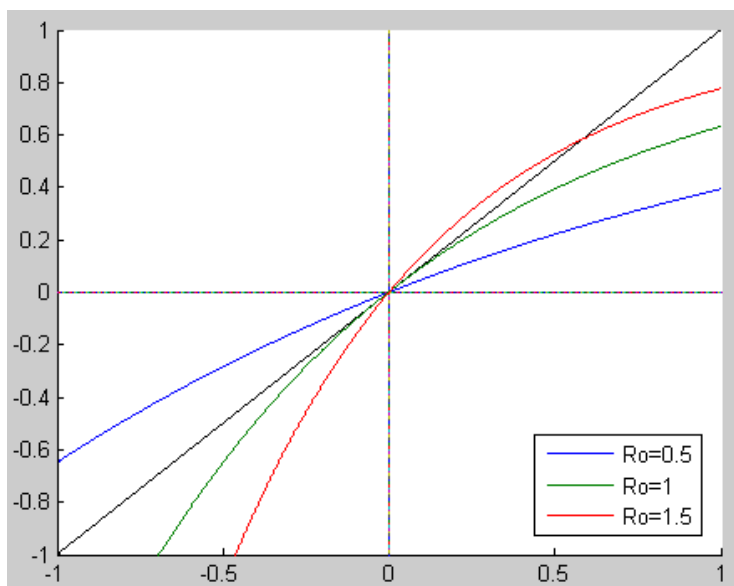
ולכן מקבלים:

$$\ln\left(\frac{S(0) - Z}{S(0)}\right) = -\frac{\beta}{\gamma} Z$$

נפעיל פונקציית אקספוננט על כל אגף ונקבל משוואה סופית:

$$Z = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z})$$

זו משוואה לא ליניארית, ואי אפשר לפתור אותה בצורה אנליטית אלא בשיטות נומריות. ועכשיו נמצא את התנאים לקיום פיתרון למשוואה.



בגרף –

הישר $y=z$ (בשחור)

והעקומות $y=1-e^{-R_0 Z}$

עבור ערכים שונים של R_0 .

ניתן לראות שרק עבור $R_0 = 1.5$ יש פיתרון חיובי.

תנאים לקיום פיתרון חיובי למשוואה:

פיתרון טריוויאלי מתקבל בנקודה $Z=0$.

אנו רוצים פיתרון נוסף עבור Z חיובי

פיתרון נוסף יתקבל אם שיפוע גרף הפונקציה $f(Z) = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z})$ בנקודה $Z=0$ יהיה

גדול מהשיפוע של גרף הפונקציה $g(Z)=Z$

נגזור ונקבל:

$$f'(Z) = S(0)R_0 e^{-R_0 Z}$$

$$\begin{cases} f'(0) = S(0)R_0 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$$

לכן נדרוש:

$$f'(0) > g'(0) \rightarrow S(0) > \frac{1}{R_0}$$

וזהו התנאי לקיום פיתרון חיובי למשוואה.
ומעניין לראות שהתנאי שקיבלנו כאן זהה לתנאי למגיפה שקיבלנו בסעיף 4.א.

דוגמא :

נניח שבעיר מסוימת היתה מגיפה שבה חלו 40% מתושבי העיר.

כלומר $Z=0.4$.

נניח שהמגיפה מתפשטת לעיר סמוכה, אזי נרצה לדעת כמה מתושבי העיר עלינו לחסן ע"מ למנוע את התפרצות המגיפה בעיר הסמוכה.

כעת, מהמשוואה :

$$Z = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z})$$

נוכל לקבל את R_0 וכך לדעת כמה אנשים עלינו לחסן.

נניח כי $S(0) = 1$, כלומר בעיר הראשונה, כל אנשי העיר היו רגישים לפני שפרצה המגיפה.
עלינו לפתור את המשוואה :

$$0.4 = (1 - e^{-0.4 R_0})$$

הפיתרון הוא

$$R_0 = 1.277$$

כלומר, המגיפה שמתפשטת לעיר הסמוכה היא בעלת R_0 ששווה ל- 1.277.
המגיפה באמת תתפרץ בעיר הסמוכה אם יתקיים התנאי למגיפה, כלומר אם

$$S(0) > \frac{1}{R_0}$$

ובהצבת $R_0 = 1.27$ נקבל שהתנאי למגיפה הוא

$$S(0) > 0.78$$

כלומר, מספיק שנחסן 23% מתושבי העיר השנייה ע"מ למנוע את המגיפה!

א.8: שירות גודל המגיפה כתלות ב- R_0

במשוואה

$$Z = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z})$$

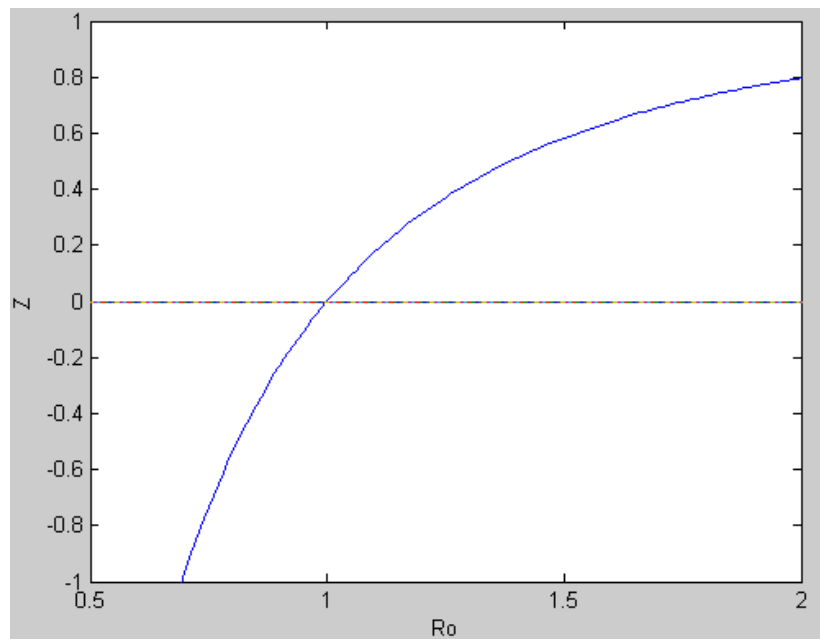
נבחר $S(0)=1$, ונשרטט את גודל המגיפה Z כפונקציה של R_0 .
התנאי למגיפה הוא

$$S(0) > \frac{1}{R_0}$$

כלומר

$$R_0 > \frac{1}{S(0)}$$

ולכן נצפה לקבל מגיפה עבור R_0 שגדול מ-1:



ציר X מייצג את R_0

ציר Y הוא גודל המגיפה (כלומר Z)

רואים שגודל המגיפה אסימפטוטי ל-1
זוהי מכיוון שנרמלנו את גודל
האוכלוסייה, וכעת גודל האוכלוסייה
הוא 1.

הגרף הוא מונוטוני עולה, כלומר ככל
ש R_0 גדל, גם גודל המגיפה גדל.

הערה: הבחירה $S(0)=1$ היא סבירה מאוד.

כי מספר החולים בתחילת המגיפה הוא שבר קטן מאוד באוכלוסייה.

נקודה נוספת, במשוואה:

$$Z = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z})$$

מתקיים כי

$$(1 - e^{-R_0 Z}) < 1$$

ולכן:

$$S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z}) < S(0)$$

ולכן מתקיים:

$$Z = S(0) \cdot (1 - e^{-R_0 Z}) < S(0)$$

כלומר, מתקיים:

$$Z < S(0)$$

והמשמעות היא שלא כל האנשים הרגישים יחלו.

חלק ב – SIR^n

מודל זה הוא כללי יותר מהמודל הקודם.

לא נניח יותר שהאוכלוסייה "מתערבבת היטב" (*well stirred*), אלא נניח הנחה מתקבלת יותר על הדעת, שהאוכלוסייה היא מגוונת ולכן ייתכן שקבוצות שונות באוכלוסייה באות במגע בין לבין עצמן ועם אוכלוסיות שונות בתדירות שונה. ולכן קצת ההדבקה $\square$ כבר לא יהיה אחיד, אלא לכל קבוצה יהיה את קצב ההדבקה שלה בינה לבין עצמה, ואת קצב ההדבקה בו היא מדביקה קבוצות אחרות באוכלוסייה.

ומעבר לקצב המגע של כל קבוצה בינה לבין עצמה ועם קבוצות אחרות – ייתכן גם שחלק מהקבוצות הן רגישות יותר, כלומר לאנשים בקבוצות הללו יש סיכוי גבוה יותר להידבק כאשר הם באים במגע עם חולה, ואז שחלק מהקבוצות הן מדבקות יותר.

אך נמשיך ונניח שקצב ההחלמה הוא אחיד, מכיוון שהוא תלוי במגיפה עצמה, ופחות תלוי בחולים. (למרות שיש עניין להניח שקצב ההחלמה שונה מקבוצה לקבוצה, במודל שלנו לא ניכנס לזה)

1.ב: הנחות המודל:

1. גודל האוכלוסייה קבוע
2. אדם שחלה במחלה, או שיבריא ממנה ויהיה חסין מפניה, או שימות.

2.ב: בניית המודל:

גודל האוכלוסייה קבוע – N .

נחלק את האוכלוסייה ל- n תתי אוכלוסיות שגודלן $N_1, N_2, \dots, N_n$ כך ש- $\sum_{i=1}^n N_i = N$

כל תת אוכלוסייה i , $1 \leq i \leq n$ נחלק לשלושה חלקים S_i, I_i, R_i

ולכל תת אוכלוסייה i , גודל האוכלוסייה נשאר קבוע, כלומר:

$$S_i + I_i + R_i = N_i$$

את קצב ההדבקה של קבוצה j את קבוצה i נסמן ב- β_{ij}

גודלו של β_{ij} תלוי בכמה פרמטרים:

- א. בפרמטר הביולוגי, כלומר כמה מדבקת אותה קבוצה.
- ב. בכמות המפגשים שישנן בין שתי הקבוצות הללו.
- ג. בגודלה של הקבוצה המדביקה ובגודלה של הקבוצה הנדבקת.

דוגמאות לקבוצות שונות יכולות להיות קבוצות גיל, גברים ונשים, קבוצות שונות לאנשים ממוצא שונה, קבוצות שונות לאנשים מאזורי מגורים שונים וכדומה.

ב.2.א: בניית מודל עבור שתי אוכלוסיות

נחלק את האוכלוסייה לשתי קבוצות, לדוגמה - ילדים ומבוגרים.
קבוצת הילדים תהיה קבוצה מספר 1, קבוצת המבוגרים תהיה קבוצה מספר 2.
האוכלוסייה היא בגודל N , והקבוצות הן בגודל N_1, N_2 בהתאמה, כלומר -

$$S_1(t) + I_1(t) + R_1(t) = N_1$$

$$S_2(t) + I_2(t) + R_2(t) = N_2$$

ננרמל את גדלי האוכלוסיות, כך שמעטת הגדלים S, I, R של כל קבוצה לא יתארו את גודל הקבוצה, אלא את אחוז האנשים בקבוצה ששיכים לאותה קטגוריה (S, I, R) .

$$N_1 = N_2 = 1$$

נניח שקצב הזיהום של המגיפה נתון במטריצה הבאה :

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

כאשר המקדמים הללו טומנים בחובם הן את גדלי הקבוצות, הן את הפרמטר הביולוגי של רמת ההדבקה של כל קבוצה, והן את כמויות המפגשים של כל קבוצה.

נכתוב את משוואות ההפרש לקבוצה מספר 1 :

משוואה ראשונה :

$$S_{1,(t+\Delta t)} = S_{1,(t)} - S_{1,(t)}(\beta_{11} \cdot I_{1,(t)} + \beta_{12} \cdot I_{2,(t)})\Delta t$$

הסבר :

הרגישים באוכלוסיית הילדים בעוד זמן Δt , הם הרגישים שישנם עכשיו, פחות אלו שחלו, ואלו שחלו - חלקם חלו כי נדבקו מילדים, וחלקם חלו כי נדבקו ממבוגרים.
משוואה שנייה :

$$I_{1,(t+\Delta t)} = I_{1,(t)} + (S_{1,(t)}(\beta_{11} \cdot I_{1,(t)} + \beta_{12} \cdot I_{2,(t)}) - \gamma I_{1,(t)})\Delta t$$

הסבר :

החולים באוכלוסיית הילדים בעוד Δt זמן הם אלו שחולים עכשיו, פלוס אלו שיחלו בזמן Δt הקרוב, מינוס הילדים שהחלימו ומשוואה אחרונה :

$$R_{1,(t+\Delta t)} = R_{1,(t)} + \gamma I_{1,(t)} \Delta t$$

ובהתאמה נוכל לכתוב את משוואות ההפרש לקבוצה השנייה וממשוואות ההפרש נוכל לקבל משוואות דיפרנציאליות בתהליך דומה לתהליך שעשינו במודל SIR (בסעיף ב.2.א) :

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -S_1(\beta_{11}I_1 + \beta_{12}I_2) \\ \dot{I}_1 = S_1(\beta_{11}I_1 + \beta_{12}I_2) - \gamma I_1 \\ \dot{R}_1 = \gamma I_1 \\ \dot{S}_2 = -S_2(\beta_{21}I_1 + \beta_{22}I_2) \\ \dot{I}_2 = S_2(\beta_{21}I_1 + \beta_{22}I_2) - \gamma I_2 \\ \dot{R}_2 = \gamma I_2 \end{cases}$$

ולאחר שהבנו זאת עבור שתי אוכלוסיות נעבור למקרה הכללי :

ב.2.ב: המודל הסופי:

$$\dot{S}_i = -S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j$$

הסבר: במשוואה זו, מספר הרגישים באוכלוסיה i הולך וקטן, כאשר חולים משאר האוכלוסייה (מקבוצות $1 \leq j \leq n$) מדביקים את הרגישים מקבוצה i בקצב β_{ij}

$$\dot{I}_i = S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j - \gamma I_i$$

הסבר: כל הרגישים מאוכלוסיה i שנדבקו, יגדילו את קבוצת החולים באוכלוסיה i . ומזה מחסרים את החולים מקבוצה i שהחלימו.

והמשוואה השלישית - כל האנשים מאוכלוסיה i שהחלימו יצטרפו לקבוצת החסינים:

$$\dot{R}_i = \gamma I_i$$

המערכת הסופית נראית כך:

$$\begin{cases} \dot{S}_i = -S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j, & 1 \leq i \leq n \\ \dot{I}_i = S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j - \gamma I_i, & 1 \leq i \leq n \\ \dot{R}_i = \gamma I_i, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

כלומר, לכל i נקבל שלוש משוואות דיפרנציאליות, ובסך הכל $3n$ משוואות דיפרנציאליות.

ב.3: גודל המגיפה:

במודל הראשון דיברנו על גודל המגיפה, ועל התנאי לכך שתתרחש מגיפה. במודל זה נרצה לחקור את גודל המגיפה של כל אחת מ- n האוכלוסיות. את גודל המגיפה של האוכלוסייה ה- i , כאשר $1 \leq i \leq n$ נסמן ב- Z_i .

ב.3.א: בניית מערכת המשוואות:

נבנה את מערכת המשוואות לגודל המגיפה: מהמשוואה

$$\dot{S}_i = -S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j$$

נוכל להסיק כי S_i היא מונוטונית יורדת לכל $1 \leq i \leq n$, וחסומה בין 0 ל-1, ולכן הגבול הבא קיים וסופי:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

ומהמשוואה

$$\dot{R}_i = \gamma I_i$$

נוכל להסיק כי R_i היא מונוטונית יורדת לכל $1 \leq i \leq n$, וחסומה בין 0 ל-1, ולכן הגבול הבא קיים וסופי:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t), \quad 1 \leq i \leq n$$

ואז מהשוויון $S_i + I_i + R_i = 1$ (לאחר הנרמול) נקבל כי גם הגבול - $\lim_{t \rightarrow \infty} I_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, קיים וסופי.

(אפשר להוכיח בדיוק כמו במודל SIR שהגבול של I באינסוף הוא 0) סימונים:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} S_i(t) = S_i(\infty) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} I_i(t) = I_i(\infty) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} R_i(t) = R_i(\infty) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq n$$

גודל המגיפה של אוכלוסייה i , כמו במודל הקודם: $Z_i = R_i(\infty) - R_i(0)$

ואם נניח כי מספר החולים בתחילת המגיפה היה קטן מאוד (כלומר $I_i(0)$, $1 \leq i \leq n$ הוא קטן מאוד)

אז נוכל לומר כי: $Z_i = S_i(0) - S_i(\infty)$ ממשוואה ראשונה:

$$\dot{S}_i = -S_i \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j$$

נחלק כל אגף ב- S_i ונקבל:

$$\frac{\dot{S}_i}{S_i} = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j$$

נבצע אינטגרל על כל אגף, מ-0 עד אינסוף:

$$\int_0^{\infty} \frac{\dot{S}_i}{S_i} dt = \int_0^{\infty} - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j dt$$

נבחין כי

$$\int_0^{\infty} \frac{\dot{S}_i}{S_i} dt = \int_0^{\infty} \ln(S_i(t))' dt$$

ומכאן -

$$\int_0^{\infty} \ln(S_i(t))' dt = \int_0^{\infty} - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} I_j dt$$

נחשב את האינטגרל ונפתח את הסכום :

$$\ln(S_i(\infty)) - \ln(S_i(0)) = -(\beta_{i1} \int_0^{\infty} I_1 dt + \dots + \beta_{in} \int_0^{\infty} I_n dt)$$

נניח $S_i(0) = 1$ ואז נקבל:

$$\ln(S_i(\infty)) = -(\beta_{i1} \int_0^{\infty} I_1 dt + \dots + \beta_{in} \int_0^{\infty} I_n dt)$$

נבחין כי :

$$S_i(\infty) = 1 - Z_i$$

ואז נקבל :

$$1 - Z_i = -(\beta_{i1} \int_0^{\infty} I_1 dt + \dots + \beta_{in} \int_0^{\infty} I_n dt)$$

מהמשוואה השלישית :

$$\dot{R}_i = \gamma I_i$$

נבצע אינטגרל מס ועד אינסוף ונקבל באגף שמאל את גודל המגיפה :

$$Z_i = R_i(\infty) - R_i(0) = \gamma \int_0^{\infty} I_i dt$$

$$\frac{Z_i}{\gamma} = \int_0^{\infty} I_i dt$$

נציב שוויון אחרון ונקבל:

$$\ln(1 - Z_i) = -(\beta_{i1} \frac{Z_1}{\gamma} + \dots + \beta_{in} \frac{Z_n}{\gamma})$$

ונקבל מערכת משוואות סופית:

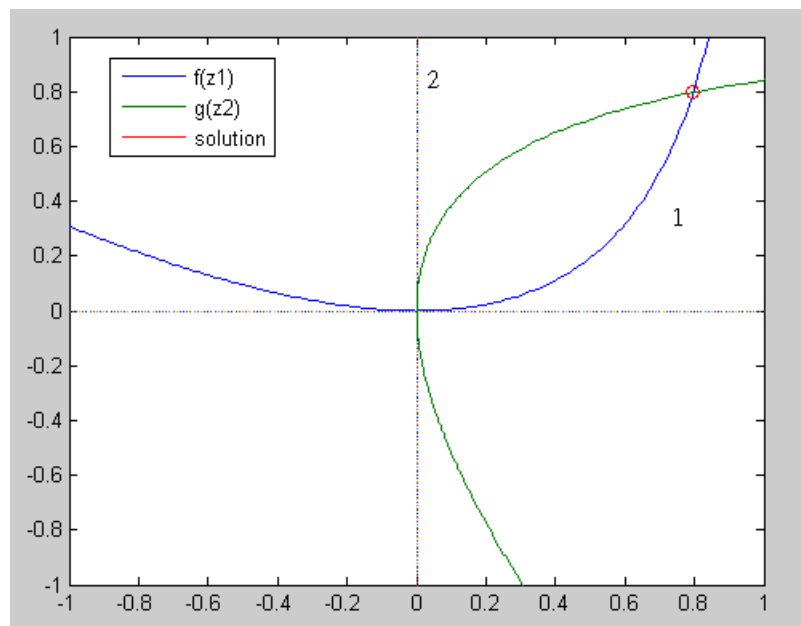
$$\ln(1 - Z_i) = -\frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^n \beta_{ij} Z_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

מערכת של n משוואות לא לינאריות.

ב.3.ב: תנאים לפיתרון מערכת המשוואות עבור $n=2$

$$\begin{cases} \ln(1 - Z_1) = -\frac{1}{\gamma}(\beta_{11}Z_1 + \beta_{12}Z_2) & 1. \\ \ln(1 - Z_2) = -\frac{1}{\gamma}(\beta_{21}Z_1 + \beta_{22}Z_2) & 2. \end{cases}$$

מראה כללי (כשכל המקדמים שווים ל-1)



בשירטוט:

בירוק – אוסף הנקודות במישור שמקיים את המשוואה הראשונה

בכחול – אוסף הנקודות במישור שמקיים את המשוואה השנייה.

בנקודה האדומה - שתי העקומות נפגשות.

שתי העקומות עוברות בנקודה (0,0)

לא יהיה פיתרון למערכת אם שיפוע (1) יהיה גדול משיפוע (2) ב-(0,0).

והפיתרון "נולד" כאשר השיפועים ב-(0,0) יהיו שווים

מהמשוואות שקיבלנו, נבודד את Z_2, Z_1 , ונגדיר פונקציות:

$$\begin{cases} Z_2 = f(Z_1) = -\frac{\gamma}{\beta_{12}} \ln(1 - Z_1) - \frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} Z_1 \\ Z_1 = g(Z_2) = -\frac{\gamma}{\beta_{21}} \ln(1 - Z_2) - \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} Z_2 \end{cases}$$

תחום הגדרה של הפונקציות:

$f(Z_1)$ מוגדרת עבור $Z_1 < 1$, $g(Z_2)$ מוגדרת עבור $Z_2 < 1$.

במערכת ישנם חמישה פרמטרים, שלערכים שונים שלהם יהיה פיתרון ולערכים אחרים לא יהיה.

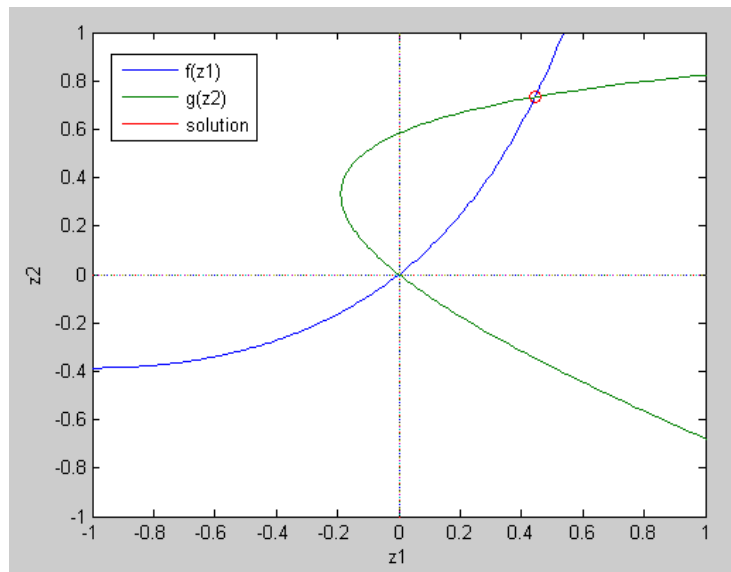
לכן נחלק למקרים שונים ונבדוק בכל מקרה האם ישנו פיתרון או שאין.

$$\beta_{22} > \gamma$$

הגרף התקבל עבור $\gamma = 2$

$$\beta_{22} = 3$$

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = 1$$



נגזור את $g(Z_2)$:

$$g'(Z_2) = \frac{1}{\beta_{21}} \left(\frac{\gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22}}{1 - Z_2} \right)$$

$$g'(0) = \frac{1}{\beta_{21}} (\gamma - \beta_{22}) < 0$$

זו הסיבה שבחרנו $\beta_{22} > \gamma$, כי במקרה זה $g(Z_2)$ יורדת ב-0. וגם ניתן לראות זאת בגרף)

נמצא קטע בו $g(Z_2)$ הפיכה, כלומר נמצא קטע בו $g(Z_2)$ מונוטונית ממש:

$$g'(Z_2) > 0 \Leftrightarrow \gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22} > 0 \Leftrightarrow Z_2 > \frac{\beta_{22} - \gamma}{\beta_{22}}$$

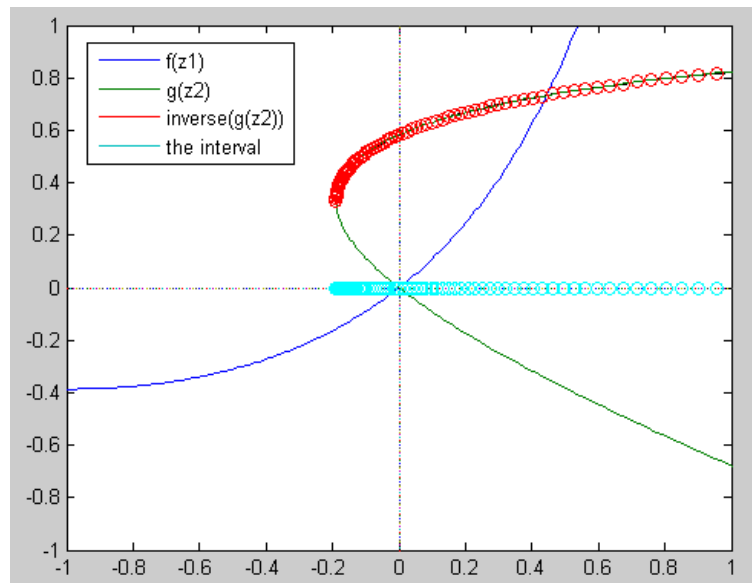
כלומר, בקטע $\frac{\beta_{22} - \gamma}{\beta_{22}} < Z_2 < 1$ $g(Z_2)$ היא מונוטונית עולה ורציפה, ולכן היא הפיכה בו.

אז קיימת $g^{-1}(Z_1)$.

$g^{-1}(Z_1)$ מוגדרת בקטע: $\left(g\left(\frac{\beta_{22} - \gamma}{\beta_{22}}\right), 1 \right)$

ניתן לראות זאת בגרף :

הקו האדום הוא $g^{-1}(Z_1)$
והקו התכלת הוא האינטרוול בו
מוגדרת $g^{-1}(Z_1)$.



וכעת יש לנו שתי פונקציות, $f(Z_1)$, $g^{-1}(Z_1)$, ואנו רוצים לדעת האם יש פיתרון למשוואה

$$f(Z_1) = g^{-1}(Z_1)$$

נשים לב ש :

$$f(0) = 0$$

נחשב את $g^{-1}(0)$:

$$g^{-1}(0) = Z_2 \rightarrow \ln(1 - Z_2) = -\frac{1}{\gamma}(\beta_{22}Z_2)$$

וזו בדיוק המשוואה שקיבלנו לגודל המשוואה במודל SIR , והתנאי לפיתרון שלה הוא $\beta_{22} > \gamma$, ותנאי זה מתקיים ע"פ ההנחה שעשינו בתת-סעיף זה

אפשר בעצם לומר שכאשר $\beta_{22} > \gamma$ אז כביכול המגיפה באוכלוסיה 2 היא "עצמאית", כלומר, גם ללא אוכלוסיה 1 היתה מתרחשת מגיפה.

והפיתרון Z_2 הוא חיובי, כלומר $g^{-1}(0) > 0 = f(0)$.

בנוסף, כאשר $Z_1 \rightarrow 1$ נקבל :

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 1} f(Z_1) = \infty$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 1} g^{-1}(Z_1) = g^{-1}(Z_1) = L \text{ סופי}$$

ואם נגדיר פונקציה

$$h(Z_1) = f(Z_1) - g^{-1}(Z_1)$$

אז קיבלנו ש :

$$h(0) < 0$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 1} h(Z_1) > 0$$

ולפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה Z_1^* : $0 < Z_1^* < 1$ כזו ש -

$$h(Z_1^*) = 0$$

מסקנה – קיים פיתרון למערכת במקרה זה.

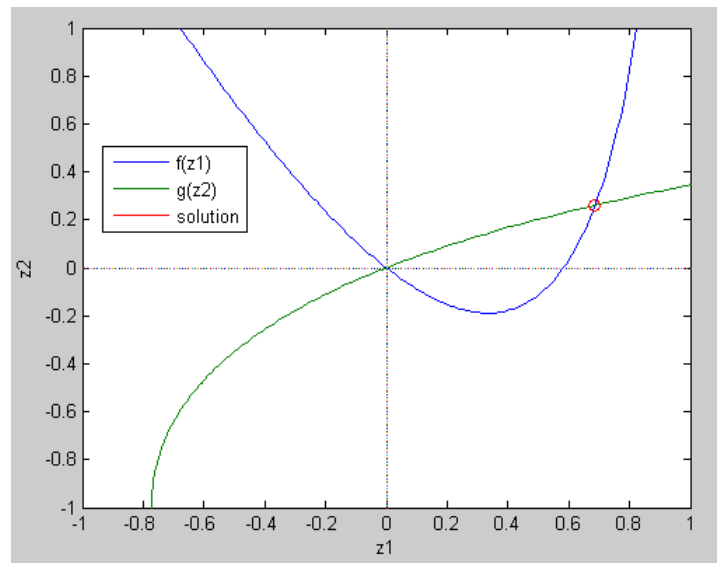
$$\beta_{11} > \gamma: \mathbf{b}$$

הגרף התקבל עבור $\gamma = 2$

$$\beta_{11} = 3$$

$$\beta_{21} = 2$$

$$\beta_{12} = \beta_{22} = 1$$



המקרה הזה סימטרי למקרה הקודם,

כעת ניתן להראות כי $f(Z_1)$ הפיכה בקטע $\frac{\beta_{11}-\gamma}{\beta_{11}} < Z_1 < 1$

ובדומה, כאשר $\beta_{11} > \gamma$ אז כביכול המגיפה באוכלוסיה 1 היא "עצמאית".

ולהגיע לאותה מסקנה, שישנו פיתרון.

$$\beta_{22} \leq \gamma, \beta_{11} \leq \gamma$$

במקרה הזה אף אחת מהפונקציות $f(Z_1)$, $g^{-1}(Z_1)$ לא יורדת ב-0 ולכן לא טריוויאלי שיהיה פיתרון.

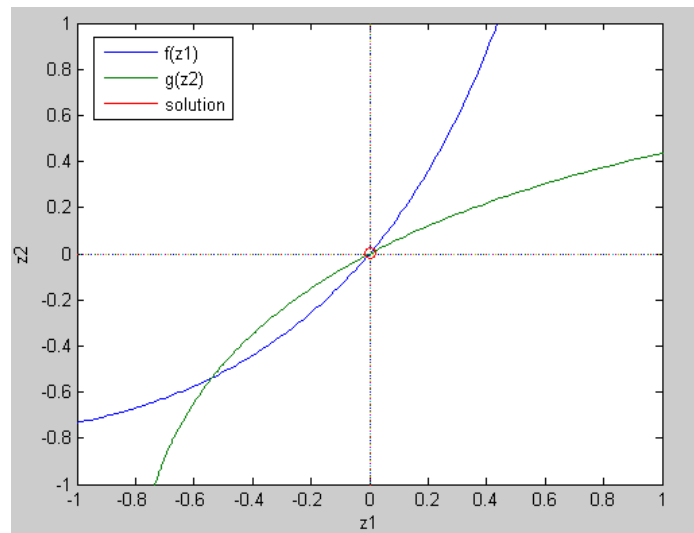
יתכנו שני מקרים:

1.

בגרף זה אפשר לראות ש –

$$f'(0) > (g^{-1})'(0)$$

ובמקרה זה לא יהיה פיתרון.

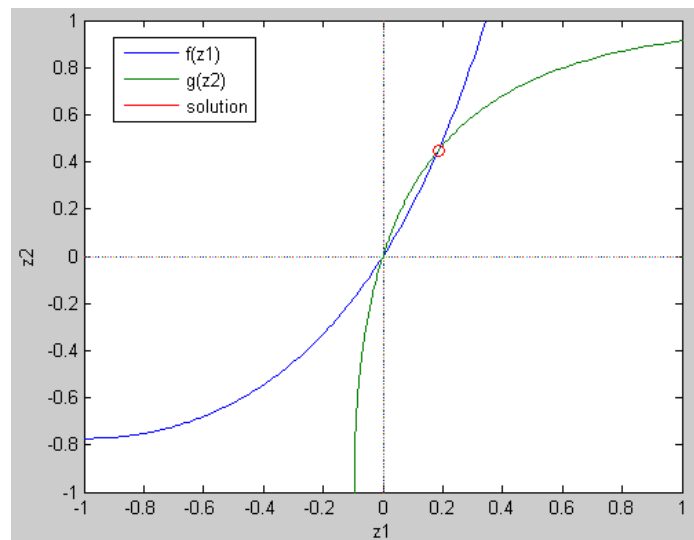


2.

בגרף זה אפשר לראות ש –

$$f'(0) < (g^{-1})'(0)$$

ובמקרה זה יש פיתרון.



נוכיח כעת שבמקרה הזה $g^{-1}(Z_1)$ קיימת לכל $Z_1 > 0$ ואז נוכל למצוא מתי יש פיתרון ומתי אין. (לפי יחס הנגזרות של $g^{-1}(Z_1)$ ושל $f(Z_1)$)

נגזור את $g(Z_2)$ ונקבל:

$$g'(Z_2) = \frac{1}{\beta_{21}} \left(\frac{\gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22}}{1 - Z_2} \right)$$

ולכן :

$$g'(Z_2) > 0 \Leftrightarrow \gamma - \beta_{22} + Z_2\beta_{22} > 0 \Leftrightarrow Z_2 > \frac{\beta_{22} - \gamma}{\beta_{22}}$$

ובמקרה שלנו $\beta_{22} - \gamma \leq 0$, ואילו $0 < Z_2 < 1$

ולכן, לכל $0 < Z_2 < 1$ מתקיים $g'(Z_2) > 0$

כלומר, $g(Z_2)$ הפיכה בקטע $0 < Z_2 < 1$.

מסקנה, במקרה זה קיימת $g^{-1}(Z_1)$, והיא מוגדרת לכל $Z_1 > 0$

תנאים לפיתרון –

יהיה פיתרון כאשר

$$f'(0) < (g^{-1})'(0)$$

הוכחה :

אנו יודעים כי :

$$f(0) = g^{-1}(0) = 0$$

ואם מתקיים :

$$f'(0) < (g^{-1})'(0)$$

אז קיימת נקודה c שהיא קרובה למדי ל-0. ובה מתקיים :

$$f(c) < g^{-1}(c)$$

שוב נגדיר את פונקציית ההפרש –

$$h(x) = f(x) - g^{-1}(x)$$

ואז בנקודה c :

$$h(c) = f(c) - g^{-1}(c) < 0$$

וכאשר Z_1 שואף ל-1 אז f תשאף לאינסוף, ו g^{-1} תקבל ערך סופי כלשהו, כלומר :

$$\begin{cases} \lim_{Z_1 \rightarrow 1} f(Z_1) = \infty \\ g^{-1}(1) < \infty \end{cases}$$

$$\lim_{Z_1 \rightarrow 1} h(Z_1) = \infty$$

ולפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה b בקטע $(0,1)$ בה $h(b) = 0$. כלומר – יש פיתרון חיובי למערכת המשוואות.

ולא יהיה פיתרון במקרה ההפוך, כלומר כאשר

$$f'(0) > (g^{-1})'(0)$$

נוכיח זאת :

סכימת ההוכחה :

נראה כי פונקצית ההפרש $h(Z_1) = f(Z_1) - g^{-1}(Z_1)$ היא פונקציה קמורה, ונראה שבמקרה זה $h'(0) > 0$, ומאחר ו $h(Z_1)$ היא קמורה אז הנגזרת שלה היא פונקציה עולה.

נוכיח כי במקרה זה $h'(Z_1) > 0$ לכל $Z_1 > 0$, ו $h(0) = 0$.

אם $h(Z_1)$ מונוטונית עולה אז היא מתאפסת רק פעם אחת! בנקודה $Z_1 = 0$, ואין פיתרון חיובי.

הוכחה :

נגדיר פונקצית הפרש :

$$h(Z_1) = f(Z_1) - g^{-1}(Z_1)$$

אנו יודעים כי $h(0) = 0$. אם נראה כי $h(Z_1)$ היא פונקציה מונוטונית עולה אז הוכחנו שאין פיתרון למערכת במקרה זה.

תחילה נוכיח כי $h(Z_1)$ היא פונקציה קמורה :

$$f(Z_1) = -\frac{\gamma}{\beta_{12}} \ln(1 - Z_1) - \frac{\beta_{11}}{\beta_{12}} Z_1$$

נגזור :

$$f'(Z_1) = \frac{1}{\beta_{12}} \left(\frac{\gamma - \beta_{11} + Z_1 \beta_{11}}{1 - Z_1} \right)$$

נגזור פעם שנייה :

$$f''(Z_1) = \frac{\gamma}{\beta_{12}(1 - Z_1)^2} > 0$$

מסקנה : f היא פונקציה קמורה.

כעת נוכיח כי $g^{-1}(Z_1)$ היא פונקציה קעורה, ואז $(-g^{-1}(Z_1))$ היא פונקציה קמורה.

עלינו לגזור פעמיים את $g^{-1}(Z_1)$, והיא אינה נתונה בצורה מפורשת, נעשה זאת בעזרת נגזרת של פונקציה הפוכה :

נגזרת ראשונה :

$$(g^{-1})'(Z_1) = \frac{1}{g'(Z_2)}$$

נגזור את שני האגפים כדי לקבל ביטוי לנגזרת השנייה :

$$(g^{-1})''(Z_1) = -\frac{g''(Z_2)}{g'(Z_2)^2} * (Z_2)'$$

נבחין כי :

$$Z_2 = g^{-1}(Z_1)$$

ולכן

$$Z_2' = (g^{-1})'(Z_1)$$

נציב זאת ונקבל

$$(g^{-1})''(Z_1) = -\frac{g''(Z_2)}{g'(Z_2)^2} * (g^{-1})'(Z_1)$$

נראה שהביטוי שקיבלנו הוא שלילי :

נבדוק את הסימן של $(g^{-1})'(Z_1)$

$$(g^{-1})'(Z_1) = \frac{1}{g'(Z_2)} = \frac{\beta_{21}}{1} \left(\frac{1 - Z_2}{\gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22}} \right)$$

נבחין כי $Z_2 < 1$ ולכן $1 - Z_2 > 0$

ובמכנה :

$$\gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22} \geq 0 \Leftrightarrow Z_2 > \frac{\beta_{22} - \gamma}{\beta_{22}}$$

ניזכר כי אני מדברים על המצב בו $\beta_{22} \leq \gamma$.

כלומר האגף הימני באי השוויון הוא שלילי, והאגף השמאלי הוא חיובי ($Z_2 > 0$) ולכן באמת גם המכנה של $(g^{-1})'(Z_1)$ הוא חיובי.

מסקנה - $(g^{-1})'(Z_1) > 0$ לכל $Z_2 > 0$.

נבחין כי $g'(Z_2)^2 > 0$ בגלל שהוא ביטוי ריבועי.

נבדוק את הסימן של $g''(Z_2)$:

נגזרת ראשונה :

$$g'(Z_2) = \frac{1}{\beta_{21}} \left(\frac{\gamma - \beta_{22} + Z_2 \beta_{22}}{1 - Z_2} \right)$$

ונגזרת שנייה :

$$g''(Z_2) = \frac{\gamma}{\beta_{21}(1 - Z_2)^2} > 0$$

קיבלנו כי כל הביטויים חיוביים, וישנו סימן מינוס לפנייהם, ולכן $(g^{-1})''(Z_1)$ היא פונקציה קעורה.

מסקנה, הפונקציה

$$h(Z_1) = f(Z_1) - g^{-1}(Z_1)$$

היא פונקציה קמורה.

נחשב $h'(0)$:

$$h'(0) = f'(0) - (g^{-1}(0))'$$

ניזכר כי אנו דנים כעת במקרה בו

$$f'(0) > (g^{-1})'(0)$$

ולכן במקרה זה

$$h'(0) > 0$$

סיכום:

קיבלנו כי - $h'(0) > 0$, ובנוסף - $h'(Z_1)$ היא פונקציה עולה (כי הנגזרת השנייה חיובית)

ולכן $h'(Z_1) > 0$ לכל $Z_1 > 0$, היינו $h(Z_1)$ היא פונקציה מונוטונית עולה.

ובנוסף - $h(0) = 0$.

ולכן, לכל $Z_1 > 0$, $h(Z_1) \neq 0$.

כלומר אין פיתרון חיובי למשוואה במקרה זה.

קיבלנו תנאים הבאים:

תנאי לפיתרון:

$$f'(0) < (g^{-1})'(0) \Leftrightarrow \frac{\gamma - \beta_{11}}{\beta_{12}} < \frac{\beta_{21}}{\gamma - \beta_{22}}$$

אין פיתרון:

$$f'(0) > (g^{-1})'(0) \Leftrightarrow \frac{\gamma - \beta_{11}}{\beta_{12}} > \frac{\beta_{21}}{\gamma - \beta_{22}}$$

ב.3.ג: פיתרון חיובי 'נולד':

כעת כשאנו יודעים מהו התנאי לפיתרון, ננסה להבין מתי פיתרון "נולד" זו מערכת המשוואות שלנו

$$\begin{cases} F_1 = \ln(1 - Z_1) + \frac{1}{\gamma}(\beta_{11}Z_1 + \beta_{12}Z_2) & 1. \\ F_2 = \ln(1 - Z_2) + \frac{1}{\gamma}(\beta_{21}Z_1 + \beta_{22}Z_2) & 2. \end{cases}$$

פיתרון נולד כאשר ב- (0,0) הגרדיאנטים יהיו פרופורציונליים כי אז ישנה השקה בין שתי העקומות.

$$\begin{cases} \nabla F_1 = \left(\frac{-1}{1 - Z_1} + \frac{\beta_{11}}{\gamma}, \frac{\beta_{12}}{\gamma} \right) \\ \nabla F_2 = \left(\frac{\beta_{21}}{\gamma}, \frac{-1}{1 - Z_2} + \frac{\beta_{22}}{\gamma} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla F_1(0,0) = \left(\frac{\beta_{11}}{\gamma} - 1, \frac{\beta_{12}}{\gamma} \right) \\ \nabla F_2(0,0) = \left(\frac{\beta_{21}}{\gamma}, \frac{\beta_{22}}{\gamma} - 1 \right) \end{cases}$$

גרדיאנטים פרופורציונליים כאשר:

$$\left(\frac{\beta_{11} - \gamma}{\gamma}, \frac{\beta_{12}}{\gamma} \right) = \alpha \left(\frac{\beta_{21}}{\gamma}, \frac{\beta_{22} - \gamma}{\gamma} \right)$$

מקואורדינאטה ראשונה נקבל:

$$\alpha = \frac{\beta_{11} - \gamma}{\beta_{21}}$$

נציב בקואורדינאטה שנייה ונקבל:

$$\frac{\beta_{11} - \gamma}{\beta_{21}}(\beta_{22} - \gamma) = \beta_{12}$$

$$\gamma^2 + \gamma(-\beta_{11} - \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12} = 0$$

וזהו הפולינום האופייני של המטריצה

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לומר שלמערכת יהיה פיתרון, אם γ יהיה ערך עצמי של המטריצה.

אצלינו γ הוא חיובי, ולפי משפט פרוק, מטריצה שכל איבריה חיוביים יש לה לפחות ערך עצמי חיובי אחד.

$$\gamma = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

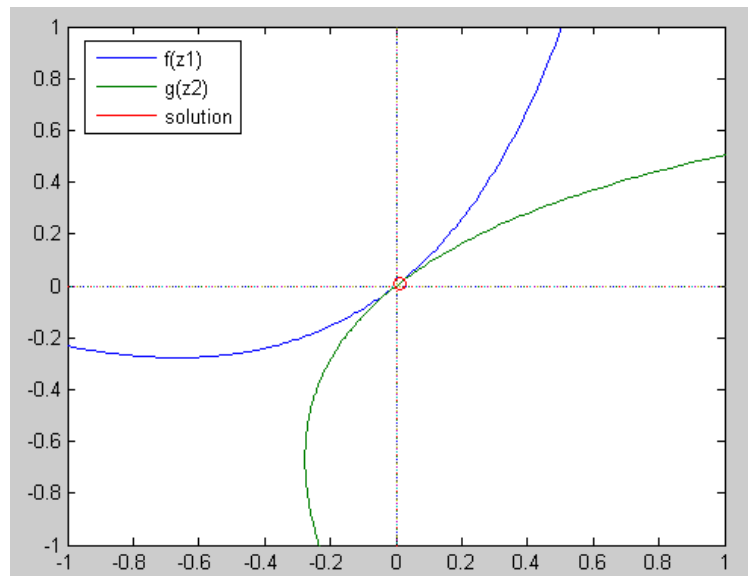
ולכן, התנאי להשקה הוא

בשרטוט נבחרו הערכים:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} - 1$$

$$\gamma = \max\{1, 5\} = 5 \text{ כלומר}$$



אסביר כעת מדוע התנאי להשקה הוא דווקא מקסימום הערכים העצמיים ולא סתם שוויון לערך עצמי.

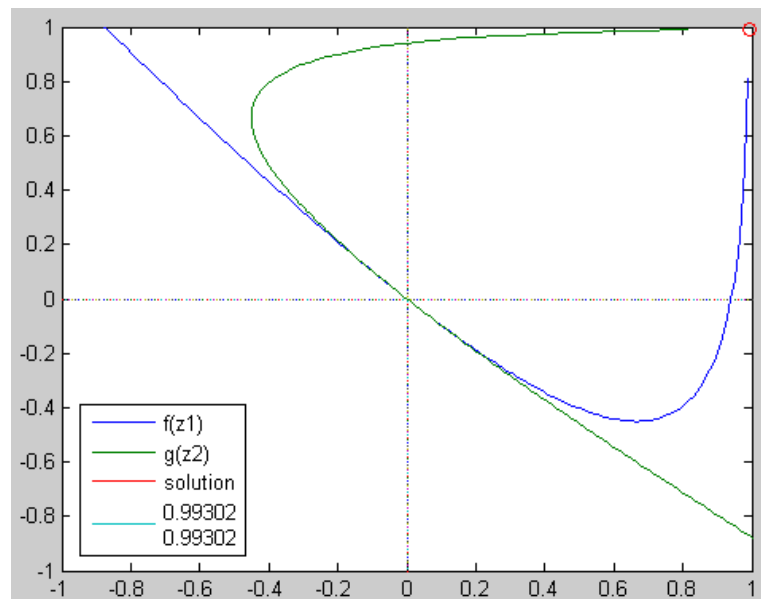
כמובן שאם אחד הערכים העצמיים שלילי, אז נבחר ב γ ששווה לערך העצמי המקסימלי כתנאי להשקה.

אך במקרה שישנם שני ערכים עצמיים חיוביים, כמו למשל במקרה:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם 1 ו- 5. שניהם חיוביים.

נשרטט את שתי העקומות עבור מטריצת β זו ועבור $\gamma = 1$:



רואים כי ב- $(0,0)$ העקומות משיקות, אך זה אינו מצב בו פיתרון נולד, כי יש פיתרון במצב זה.

נראה כעת כי אם

$$\gamma = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$$

אזי בהכרח $U(1) \cup U(2) \cup U(3)$ יתקיים.

$$\min\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - \sqrt{(\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{21}\beta_{12}}}{2} < \frac{\beta_{11} + \beta_{22} - (\beta_{11} - \beta_{22})}{2} = \beta_{22}$$

$$\gamma = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} < \beta_{22}$$

$$\gamma < \beta_{22}$$

ובמצב בו $\gamma < \beta_{22}$ ראינו שיש פיתרון.

כלומר, במצב בו $\gamma = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$, ישנה השקה בין העקומות וגם ישנו פיתרון חיובי.

ב.3.ד: סיכום:

נסכם את התוצאות שקיבלנו לגבי קיום פיתרון למערכת המשוואות ונוכיח שהתנאי לפיתרון מערכת המשוואות הוא התנאי הבא:

$$\gamma < \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

כאשר λ_1, λ_2 הם ערכים עצמיים של $\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$

ובדומה למודל SIR נוכל להגדיר כאן את R_0 בצורה הבאה:

$$R_0 = \frac{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}{\gamma}$$

ואז התנאי לקיום הפיתרון יהיה:

$$R_0 > 1$$

ראינו שיש פיתרון אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים

$$\begin{cases} \beta_{11} > \gamma & (1) \\ \beta_{22} > \gamma & (2) \\ \frac{\gamma - \beta_{11}}{\beta_{12}} < \frac{\beta_{21}}{\gamma - \beta_{22}}, \gamma \geq \max\{\beta_{22}, \beta_{11}\} & (3) \end{cases}$$

נוכיח כעת כי שלושת התנאים הללו שקולים לתנאי:

$$\gamma < \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \quad (4)$$

כאשר λ_1, λ_2 הם ערכים עצמיים של $\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$

הפולינום האופייני של מטריצה זו הוא:

$$\lambda^2 - \lambda(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12}$$

ולכן:

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{(\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12})}}{2}$$

ע"מ להוכיח את הטענה עלינו להוכיח שני דברים

1. יש להראות כי אם $(1) \cup (2) \cup (3)$ מתקיים אז גם (4)
2. יש להראות שאם (4) מתקיים אז גם $(1) \cup (2) \cup (3)$

: 1

א. נניח כי (1) מתקיים: $\beta_{11} > \gamma$

נתבונן בערך העצמי המקסימלי:

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{(\beta_{11} + \beta_{22})^2 - 4(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12})}}{2}$$

מפתיחת סוגריים נקבל :

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{(\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{21}\beta_{12}}}{2} > \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_{22}}{2} = \beta_{11}$$

קיבלנו כי :

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \beta_{11} > \gamma$$

כלומר הוכחנו ש

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \gamma$$

מסקנה : אם (1) מתקיים אז גם (4) מתקיים

$$\beta_{22} > \gamma \quad \text{ב. נניח כי (1) מתקיים :}$$

שוב, נתבונן בערך העצמי המקסימלי :

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{(\beta_{11} - \beta_{22})^2 + 4\beta_{21}\beta_{12}}}{2}$$

נבחין כי :

$$(\beta_{11} - \beta_{22})^2 = (\beta_{22} - \beta_{11})^2$$

כלומר :

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \sqrt{(\beta_{22} - \beta_{11})^2 + 4\beta_{21}\beta_{12}}}{2} > \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{22} - \beta_{11}}{2} = \beta_{11}$$

וקיבלנו כי

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \beta_{22} > \gamma$$

כלומר הוכחנו ש

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \gamma$$

מסקנה : אם (2) מתקיים אז גם (4) מתקיים

$$g. \quad \text{נניח כי 3 מתקיים: } \frac{\gamma - \beta_{11}}{\beta_{12}} < \frac{\beta_{21}}{\gamma - \beta_{22}}, \gamma \geq \max\{\beta_{22}, \beta_{11}\}$$

נשרטט את התחום שמקיים אי שוויון זה:

מכיוון ש- $\gamma \geq \max\{\beta_{22}, \beta_{11}\}$ אז המכנה בשני צידי אי השוויון הוא חיובי. ולכן נוכל להכפיל בו ולהעביר אגפים, ולאחר שנפתח סוגריים נגיע לאי השוויון הבא:

$$\gamma^2 - \gamma(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12} < 0$$

נשרטט את התחום שמקיים אי שוויון זה:

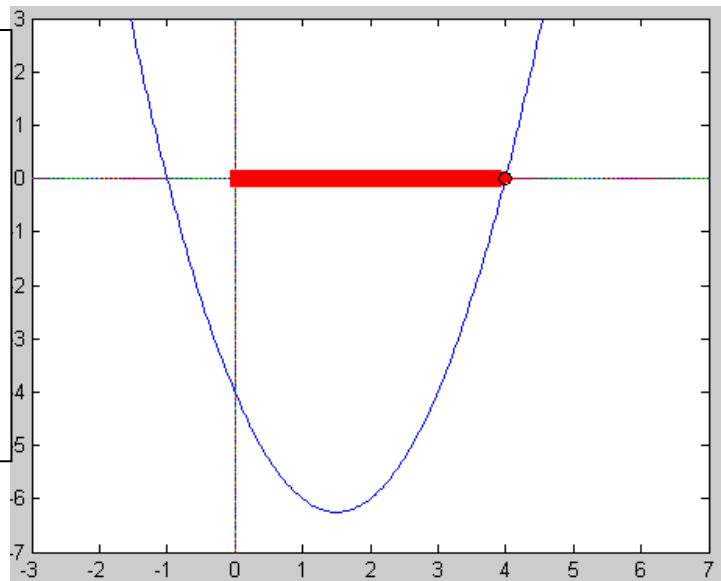
התחום האדום הוא התחום שמגדיר אי השוויון:

$$\gamma^2 - \gamma(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12} < 0$$

עבור $\gamma > 0$.

נקודת החיתוך הימנית עם הציר האופקי (מסומנת בעיגול שחור) היא הערך העצמי המקסימלי של

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$



רואים לפי השירטוט, שבתחום זה $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \gamma$.

: 2

נניח ש - (4) מתקיים :

$$\max\{\lambda_1, \lambda_2\} > \gamma$$

אזי מהשירטוט הבא :

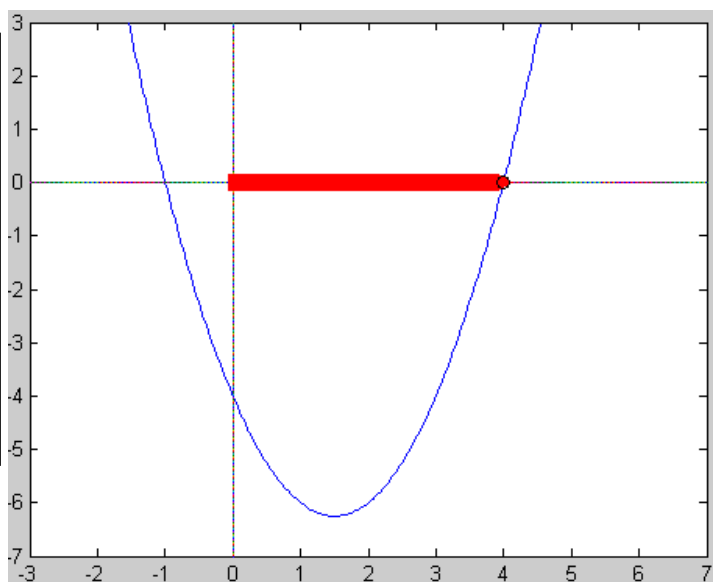
התחום האדום הוא התחום שמגדיר אי השוויון :

$$\gamma^2 - \gamma(\beta_{11} + \beta_{22}) + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{21}\beta_{12} < 0$$

עבור $\gamma > 0$.

נקודת החיתוך הימנית עם הציר האופקי (מסומנת בעיגול שחור) היא הערך העצמי המקסימלי של

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$



ניתן להסיק שגם (3) מתקיים.

מ.ש.ל.

ב.4: שירטוט פיתרון מערכת SIR^n

דוגמה מספרית:

אוכלוסייה ראשונה בגודל 10,000,000

ונניח כי 100 אנשים באוכלוסייה זו חלו, וכל השאר רגישים.

אוכלוסייה שנייה בגודל 5,000,000

ונניח כי 40 אנשים באוכלוסייה זו חלו וכל השאר רגישים

$$\begin{cases} S_1(0) = 9,999,900 \\ I_1(0) = 100 \\ R_1(0) = 0 \end{cases}$$

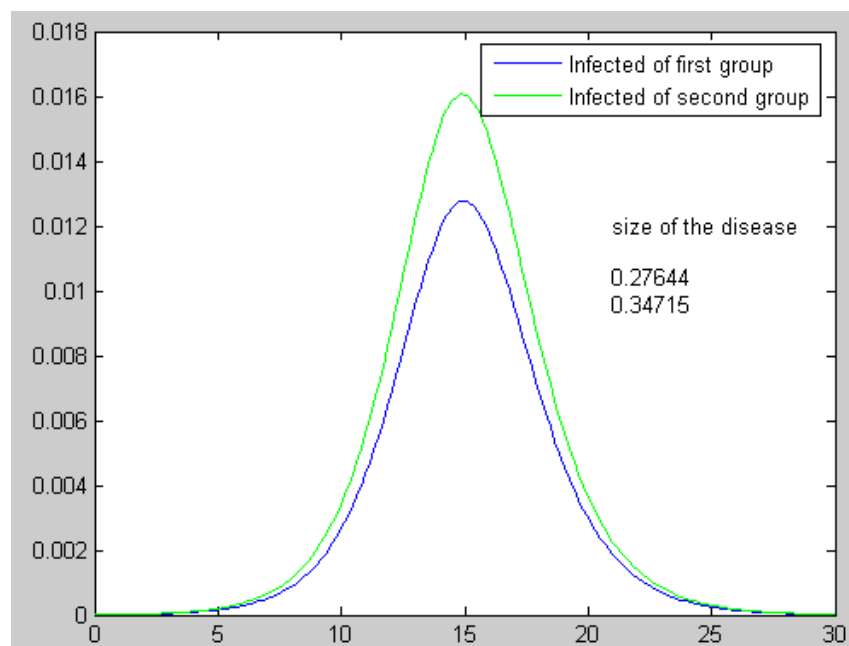
$$\begin{cases} S_2(0) = 4,999,960 \\ I_2(0) = 40 \\ R_2(0) = 0 \end{cases}$$

ניקח את הפרמטרים הבאים:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0.5 \end{pmatrix} \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

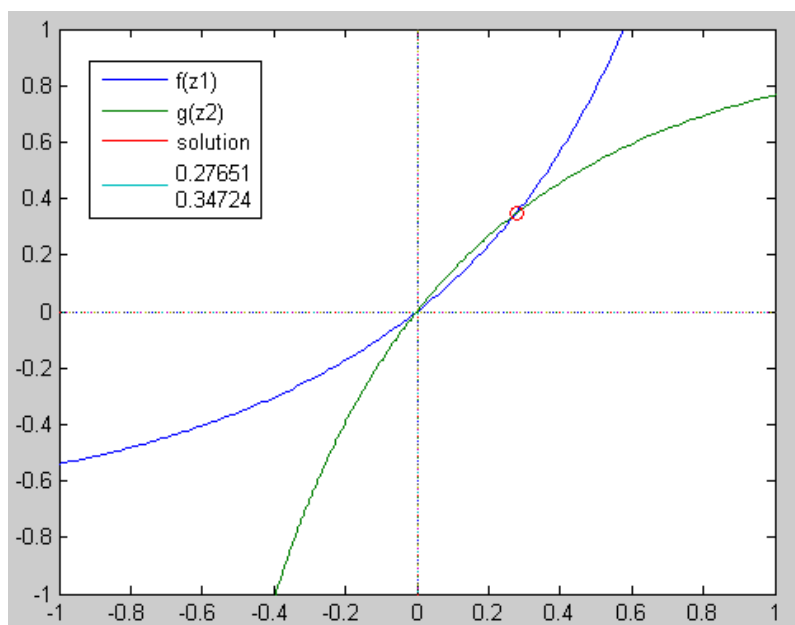
- מכיוון ששירטוט של שש עקומות בגרף הוא מאוד מסורבל, נשרטט רק את הפתרונות של קבוצת הרגישים (I) בשתי האוכלוסיות

פתרון המשוואות של קבוצות הרגישים בשתי האוכלוסיות:



כאן החישוב של גודל המגיפה התבצע לפי $Z_i = R_i(\infty) - R_i(0)$

פיתרון מערכת המשוואות של גודל המגיפה בדוגמה שלנו :



כאן החישוב של גודל המגיפה נעשה בפיתרון מערכת המשוואות

ניתן לראות שבשתי הדרכים הפיתרון קרוב מאוד.

הפתרונות אינם זהים מכיוון שבפיתוח מערכת המשוואות הנחנו כי $S(0) = 1$

וכאן $S(0)$ די קרוב ל-1 אבל לא ממש 1.

קיבלנו –

$$\begin{cases} Z_1 = 0.27644 \\ Z_2 = 0.34715 \end{cases}$$

גדלי המגיפה באמת :

$$\begin{cases} Z_1 = 0.27644 * 10,000,000 = 2,764,400 \\ Z_2 = 0.34715 * 5,000,000 = 1,735,750 \end{cases}$$


```

function SIRn
clear all; close all;clc
Q([1 2])=input('enter initial values [time_initial time_final] as
vektor \n');
Q([3 4 5])=input('enter initial values [S1i(0) I1i(0) R1i(0)] as
vektor \n');
Q([6 7 8])=input('enter initial values [S2i(0) I2i(0) R2i(0)] as
vektor \n');
gamma=input('enter gamma \n');
beta=input('enter beta as vector: [b11 b12 b21 b22] \n');
ti=Q(1);tf=Q(2);S1i=Q(3);I1i=Q(4);R1i=Q(5);S2i=Q(6);I2i=Q(7);R2i=Q
(8);
[T,Y] = ode45(@MySIR2,[ti tf],[S1i I1i R1i S2i I2i
R2i],[],gamma,beta);
plot(T,Y(:,2),'b')
hold on
plot(T,Y(:,5),'g')
Z1=Y(end,3)-Y(1,3)
Z2=Y(end,6)-Y(1,6)
Z=[Z1 Z2]';
W='size of the disease'
text(ti+(tf-ti)*7/10,0.012,W)
Z=num2str(Z)
text(ti+(tf-ti)*7/10,0.01,Z)
legend('Infected of first group','Infected of second
group','location','best')
Z1Z2([gamma beta]) %solver the equation system of disease

function dy = MySIR2(t,y,gamma,beta)
dy = zeros(6,1);
dy(1) = -y(1)*(beta(1)*y(2)+beta(2)*y(5));
dy(2) = y(1)*(beta(1)*y(2)+beta(2)*y(5))-gamma*y(2);
dy(3) = gamma*y(2);
dy(4) = -y(4)*(beta(3)*y(2)+beta(4)*y(5));
dy(5) = y(4)*(beta(3)*y(2)+beta(4)*y(5))-gamma*y(5);
dy(6) =gamma*y(5);

```

המשך הקוד :

בחלק זה מתבצע פיתרון מערכת המשוואות לגודל המגיפה והשרטוט

```
function Z1Z2(A) %solver the equation system of disease
syms b11 b12 b21 b22 z1 z2 gama
F2 = log(1-z2)+1/gama*(b21*z1+b22*z2);
F1 = log(1-z1)+1/gama*(b11*z1+b12*z2);
B=[b11 b12;b21 b22];
%A=[5 4 4 4 4]; [gama b11 b12 b21 b22]
B1=subs(B,[gama b11 b12 b21 b22],A);
f1=subs(F1,[gama b11 b12 b21 b22],A);
f2=subs(F2,[gama b11 b12 b21 b22],A);

options = optimset('Display','off');
x0=[0.999999;0.999999];
x=fsolve(@myfunsolve,x0,options,A)
figure
%plotting the equation stsyem:
Z2=-gama/b12*log(1-z1)-b11/b12*z1; %f(z1)
Z1=-gama/b21*log(1-z2)-b22/b21*z2; %g(z2)
Z2=subs(Z2,[gama b11 b12 b21 b22],A);
Z1=subs(Z1,[gama b11 b12 b21 b22],A);
X=[-2:0.01:2];
plot(0,X)
hold on
plot(X,0)
plot(X,subs(Z2,[z1],X),subs(Z1,[z2],X),X,x(1),x(2),'o')
legend('f(z1)','g(z2)','solution',num2str([x]),'location','best')
axis([-1 1 -1 1])
```

פונקצית עזר:

(פונקציה שפותרת משוואות לא לינאריות)

```
function F = myfunsolve(x,A)
F =[log(1-x(1))+1/A(1)*(A(2)*x(1)+A(3)*x(2))
    log(1-x(2))+1/A(1)*(A(4)*x(1)+A(5)*x(2))];
```

סיכום

חקרנו את מודל SIR ותיארנו איך מתפשטת מגיפה בתוך אוכלוסייה הומוגנית
חקרנו את מודל SIR^n ותיארנו איך מתפשטת מגיפה בתוך אוכלוסייה שאינה הומוגנית
ומצאנו תנאים לכך שתפרוץ או לא תפרוץ מגיפה בשני המודלים הללו

היתרונות של המודלים הללו הינם שהם פשוטים יחסית, ולמרות זאת הם נותנים תשובה לשאלות
חשובות כמו גודל המגיפה, או כמה אנשים יש לחסן ע"מ למנוע התפרצות של מגיפה, והם נותנים
תיאור כללי די טוב של מגיפה.

אבל הפשטות של המודלים הללו היא גם החיסרון שלהם, כיוון שזה מגביל אותם.
לדוגמא, לא נוכל למדל עם המודלים הללו מגיפה ארוכה יותר, מכיוון שלא נוכל להזניח לאורך
זמן לידות ומיתות.
ובנוסף, ההנחה שהאוכלוסייה מתערבבת היטב היא לעיתים רחוקה מהמציאות, כי היא מתעלמת
מהגורם הגיאוגרפי ומזה שאנשים פוגשים יותר את קרוביהם.

לגבי עבודה בעתיד, את המודלים הללו ניתן לשכלל ולהכניס לתוכם אלמנטים נוספים שישפרו את
יכולות החיזוי שלהם.
לדוגמא – אלמנטים של אקראיות ע"י שימוש במודלים סטוכסטיים, אי הזנחה של לידות ומיתות,
התייחסות למבנה הגיאוגרפי, למשל באמצעות שימוש במשוואות דיפרנציאליות חלקיות,
ולרשתות החברתיות למשל ע"י שימוש במודלים של התפשטות מגיפה על גרף (רשת)

לגבי מימוש – המודלים הללו משמשים את ארגוני הבריאות.
במסגרת מוכנות לאפשרויות של מגיפה קשה (פנדמיה, לדוגמה שפעת החזירים, שפעת העופות)
משתמשים במודלים מהסוג שהוצג בעבודה זו כדי להכין תוכניות חירום להתמודדות בצורה
מיטבית עם המגיפה, למשל חיסון חלקים של האוכלוסייה (כשחיסון של כל האוכלוסייה אינו בר
ביצוע) ע"מ להקטין את מספר הרגישים באוכלוסייה.

רשימה ביבליוגרפית

1. Matt J. Keeling and Pejman Rohani; *Modeling Infectious Diseases In humans and animals*, Princeton University press, 2008.
2. Harbert W. Hethcote; *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review 42.pp. 599-653, 2000
3. Junling Ma and David J.D. Earn; *Generality of Final Size Formula for an Epidemic of a Newly Invading Infectious Disease*. *Bulletin of Mathematical Biology* 68, pp.679-702, 2006
4. Miklos Farkas; *Dynamical Models in Biology*, chapter 3, *Epidemics*. Academic press, 2001