

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

כאוס מעשי – מעגל צ'ואה

דוד דיין

Practical Chaos – Chua Circuit

David Dayan

Advisor:

Dr. Victor O.

מנחה:

ד"ר ויקטור
אוסטרובסקי

Karmiel

כרמיאל

2013

תקציר:

הפרויקט בוצע במסגרת פרויקט גמר במחלקה למתמטיקה שימושית במכללת אורט בראודה. על פי הספרות המצויה, משנת 1961 החלו לצוץ מאמרים על ניסויים פיזיקליים שהראו התנהגות כאוטית [Yoshisuke Ueda, Kyoto University, 1961].

מתנד CHUA הומצא ב-1983 במסגרת מחקרים על אופיים הכאוטי של משוואות לורנץ ויצר פופולריות רבה. מתנד זה ידוע בתור המערכת הכאוטית הפיזיקלית הראשונה שבה נצפה כאוס בתנאי מעבדה, המצבים הכאוטיים שנצפו הם ברי שחזור, הוכחו בצורה נומרית ע"י סימולציות ממוחשבות, ומגובים ע"י הוכחות מתמטיות נוקשות.

מטרת הפרויקט היא לחקור את אופיו הכאוטי של מתנד CHUA ולהכיר דרכו את תופעת הכאוס. חקירת הכאוס תתבצע נומרית באמצעות תוכנת MATLAB. בהמשך הפרויקט יובאו יישומים לתופעת הכאוס בכלל ולמתנד CHUA בפרט - זהו הרי פרויקט במתמטיקה שימושית. נדבר על מבנה של מעבדי CNN שאבני הבניין שלהם הם מתנדי CHUA ומחקים בפעולתם את מנגנון עבודת הנוירונים במוח. כמו כן נדבר על שיטות בתקשורת מוצפנת שעושות שימוש באותות כאוטיים ומאמצות את מתנד CHUA למטרה זו שכן הוא גנרטור אותות כאוטיים פיזיקלי (ופשוט למימוש).

נראה כי במקרים רבים המתמטיקה היא אכן שימושית ובמקרה זה משרתת נאמנה את תחום האלקטרוניקה שממנו, אגב, אני מגיע.

הקדשות ותודות:

רב תודות למנחה ד"ר ויקטור אוסטרובסקי על העזרה המקצועית, ההבנה והיד המכוונת.
כמו כן, תודה רבה לפרופ' מארק ילין והמחלקה למתמטיקה על העזרה בבחירת נושא קרוב
לליבי, התמיכה והדחיפה שסייעו לי בסיום הפרוייקט והתואר הכפול.

תוכן עניינים

2	תקציר
3	הקדשות ותודות
5	רשימת איורים
6	1. פרקי מבוא
6	1.1 מבוא
6	1.2 תורת הכאוס
7	1.3 המפה הלוגיסטית
8	1.4 מושך מוזר (Strange attractor)
8	1.5 מתנדים
9	2. פתרון נומרי של משוואות דיפרנציאליות לא ליניאריות
9	2.1 לפי שיטת "רונגה קוטה" (Runge-Kutta)
10	2.2 MATLAB ode45
11	3. מתנד CHUA – מסכימה חשמלית למשוואות חסרות ממדים
13	4. טבעו הכאוטי של מתנד CHUA
13	4.1 רגישות לתנאי התחלה
14	4.2 מסלולים הומוקליניים והטרקליניים
15	4.3 מסלולים שונים לכאוס
15	4.3.1 הכפלה מחזורית
17	4.3.2 "קריסת טורוס"
19	4.3.3 ערבוב
20	4.4 Intermittency & 1/f-noise
21	5. שימוש בפולינום ממעלה שלישית
24	6. שימוש בפונקציות f בעלות n מושכים
24	6.1 פונקציית sine
25	6.2 פונקציה היפרבולית - Hyperbolic
26	7. רשתות נוירונים עצביות: CNN – Cellular neural network
28	8. הצפנה וסנכרון בין מערכות כאוטיות
32	9. סיכום ודיון
33	10. ביבליוגרפיה
34	11. נספחים
34	11.1 נספח 1 – פתרון בשיטה האיטרטיבית, רונגה קוטה מסדר 4 ו-5
37	11.2 נספח 2 – המערכת הפיזיקלית
40	11.3 נספח 3 – קודי MATLAB

רשימת איורים

מספר איור	תאור	עמוד
1	המפה הלוגיסטית – ביפורקציות והפונקציה הלוגיסטית [Wikipedia – Logistic Map]	7
2	"מושך מוזר"	8
3	טבלת השוואה לפותר משוואות ב MATLAB [Matlab Help file]	10
4	מעגל Chua בסיסי	11
5	פונקציה f , דיודת CHUA	12
א6	רגישות לתנאי התחלה - מצב יציב	13
ב6	רגישות לתנאי התחלה – פיצוץ	13
א7	מסלול הומוקליני	14
ב7	מסלול הטרוקליני	15
א8	דיאגרמת ביפורקציות של הכפלה מחזורית	15
ב8	הכפלה מחזורית, התכנסות לנקודת שבת	16
ג8	הכפלה מחזורית, מעגל חסום	16
ד8	הכפלה מחזורית, כאוס	17
א9	דיאגרמת ביפורקציות של טורוס	17
ב9	טורוס, מעגל חסום	18
ג9	טורוס, מושך טבעתי	18
ד9	טורוס, כאוס	18
א10	דיאגרמת ביפורקציות של ערבוב	19
ב10	ערבוב, מעגל חסום	19
ג10	ערבוב בין כאוס למחזוריות, כאוס דומיננטי	20
ד10	ערבוב בין כאוס למחזוריות, מחזוריות דומיננטית	20
א11	ערבוב בין כאוס לכאוס	21
ב11	$V1$ במישור התדר, רעש $1/f$	21
א12	פונקציית f פולינומיאלית	22
ב12	שימוש בפונקציה פולינומיאלית, מעגל חסום	22
ג12	שימוש בפונקציה פולינומיאלית, שרשרת פיצולים	23
ד12	שימוש בפונקציה פולינומיאלית, כאוס	23
13	שימוש בפונקציית סינוס ליצירת שלושה מושכים כאוטיים	24
א14	שימוש בפונקציה היפרבולית, "מעגל חסום"	25
ב14	שימוש בפונקציה היפרבולית, חמישה מושכים כאוטיים	26
א15	מבנה רשת CNN מופשטת / תא בודד ב-CNN	26
ב15	פונקציית המוצא של תא CNN / נירון אמיתי במוח	27
א16	מערכת לסינכרון כאוס ואפנון כאוטי	28
ב16	סנכרון כאוס, משדר ומקלט זהים $R_c=10K$	29
ג16	סנכרון כאוס, $R_c=10K$, $V1(0)$ שונה, מצב לא מסונכרן	30
ד16	סנכרון כאוס, $R_c=0.1k$, תנאי ההתחלה במשדר שונה, מצב מסונכרן	30
ה16	סנכרון כאוס, $R_c=0.1k$, תנאי ההתחלה והפרמטרים במשדר שונה, מצב מסונכרן	31

1. פרקי מבוא:

1.1. מבוא:

בשלושת העשורים האחרונים תופעות כאוטיות נחקרו בתחומים רבים כמו פיזיקה, ביולוגיה, כלכלה ועוד. אחת המסקנות היא שאם נגדיר תנאים ספציפיים בתופעות רבות בטבע, נוכל להגיע למצב של כאוס.

לאון צ'ואה (Leon Chua) המציא את מעגל CHUA בשנת 1983 בעת שחקר את משוואות לורנץ (Lorenz, 1963). הוא ניסה ליצור, בתנאי מעבדה, התקן שיוכל למדל בצורה ריאלית את משוואות לורנץ. כמו כן, הוא ניסה להוכיח שמושך לורנץ, שהוצג עד אז רק בסימולציות מחשב (שלא היו מפותחות במיוחד...), הוא באמת כאוטי במובנים מתמטיים מחמירים. אין ספק שהוא הצליח ליצור תופעה כאוטית מוחשית ופיזית. כל אחד שרצה לחקור מהו כאוס יכל לבנות בקלות מעגל פשוט כזה ולראות אותו מופיע על גבי סקופ פשוט.

קיום המושך הכאוטי במעגל CHUA הוכח בצורה נומרית בשנת 1984 ע"י חוקר בשם Matsumoto, נצפה בניסויים מעבדתיים שערכו חוקרים בשם Zhong ו Ayrom בשנת 1985 והוכח בצורה מתמטית קפדנית ע"י לאון צ'ואה בעצמו ב-1986.

מתנד CHUA משמש כגנרטור מעבדתי של אותות אקראיים מדומים וכמו כן נמצא בשימוש רחב בתקשורת מוצפנת ובהדמיות של תהליכים במוח האנושי. מערכת זו יוצרת עניין רב לא רק בעולמם של מהנדסי האלקטרוניקה אלא גם בעולמם של מתמטיקאים ופיזיקאים רבים ולראיה, ניתן לראות שמגוון הכותבים והחוקרים של תחום זה אכן מגיעים מהעולמות הללו. המחקר הרחב של מתנד CHUA מכסה בצורה נרחבת את האספקטים המתמטיים, הנומריים והפיזיקליים שלו ומקנה את ההבנה הטובה ביותר בין כל המערכות הכאוטיות המוכרות לנו. מכנים את המעגל הזה בספרות בתור "המודל לכאוס" ("Paradigm for chaos").

1.2. תורת הכאוס:

כאוס הוא ענף במתמטיקה אשר נפרס על דיסציפלינות רבות כמו פיזיקה, כלכלה, אלקטרוניקה, ביולוגיה, פילוסופיה, אומנות ומזג האוויר.

כאוס עוסק בהתנהגותן של מערכות דינאמיות הרגישות לתנאי התחלה – שינויים קלים בתנאי ההתחלה גורמים לשינויים חדים בתגובת מערכות אלה, תופעה זו מכונה בלשון ציורית "אפקט הפרפר". המערכות הנחקרות הינן דטרמניסטיות, כלומר, מערכות אשר התנהגותן העתידית מאופיינת בצורה חד משמעית על ידי תנאי ההתחלה שלהן – ללא אלמנטים רנדומליים כלשהם. לכן, תחום זה נקרא גם "מערכות כאוטיות דטרמניסטיות".

בניגוד למה שהשם מרמז, התנהגות כאוטית אינה התנהגות בה יש אי סדר מוחלט. התנהגות כאוטית היא חסומה, כלומר מוגבלת לאירועים מסוימים, והמערכת שואפת למושך – למצב מסוים אחד. עד פיתוח תורת הכאוס המושכים היחידים הידועים היו התכנסות לנקודת שיווי משקל, התכנסות למסלול מחזורי, והתכנסות למסלול כמעט מחזורי. תורת הכאוס הוסיפה גם מושך מוזר, שהוא מסלול שהמערכת מתכנסת אליו, ואשר יש לו אופי פרקטלי.

מערכות שבהן מתקיימת התנהגות כאוטית חייבות להיות לא ליניאריות. עבור משוואות הפרש התנהגות כאוטית יכולה להופיע כבר במשוואה יחידה, כמו המפה הלוגיסטית. עבור משוואות דיפרנציאליות רגילות התנהגות כאוטית יכולה להופיע רק ממערכת בת לפחות שלוש משוואות אוטונומיות מסדר ראשון, כמו משוואות לורנץ, או משוואות המערכת של מתנד CHUA עליו נדון בהרחבה בהמשך.

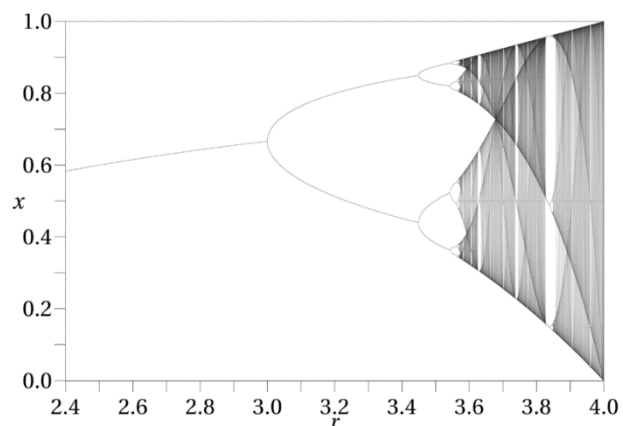
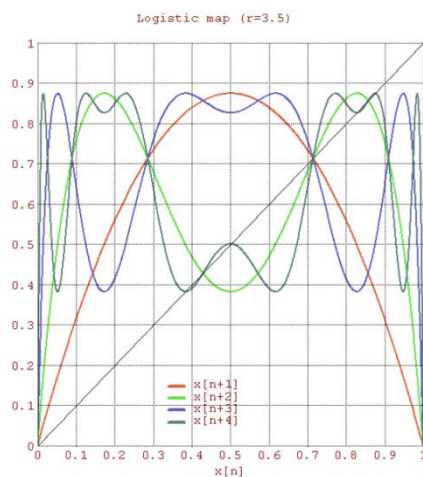
1.3. המפה הלוגיסטית (Logistic Map):

אחד המנגנונים המוכרים ביותר המציגים כאוס הוא זה המבוסס על המשוואה הלוגיסטית. משוואה לוגיסטית היא משוואה דיסקרטית רקורסיבית המאפשרת קבלת סדרת מספרים בתלות בתנאי ההתחלה, $x(0)$, ובתלות בפרמטר המאפיין את המשוואה.

$$X_{n+1} = r * X_n * (1 - X_n)$$

משוואה זו מייצגת את הדינמיקה של מערכות רבות ומפיקה סדרות של מספרים התלויים בתנאי התחלה, $x(0)$, ובגודלו של הפרמטר r .

הצגת ערכי הסדרה מייצגת את צורת ה"גל" המתקבלת במערכת. עבור ערכים קטנים של הפרמטר, הקטנים מ-2, למשל, ערכי הסדרה מתייצבים סביב ערך קבוע. עבור ערכי הפרמטר הגדולים מספיק מ-2, ערכי הסדרה המתקבלים לאחר תופעות המעבר, "קופצים" בין שני ערכים קבועים. תופעה זו ידועה כתופעת הכפלת המחזור, או מחזור 2. אם נמשיך להעלות את ערך הפרמטר r , "יקפצו" ערכי הסדרה בין ארבע הערכים לאחר תופעת המעבר. התפצלויות אלה נקראות ביפורקציות וממשיכות ככה עד אשר מגיעים למצב של כאוס.



איור 1 - המפה הלוגיסטית – ביפורקציות והפונקציה הלוגיסטית

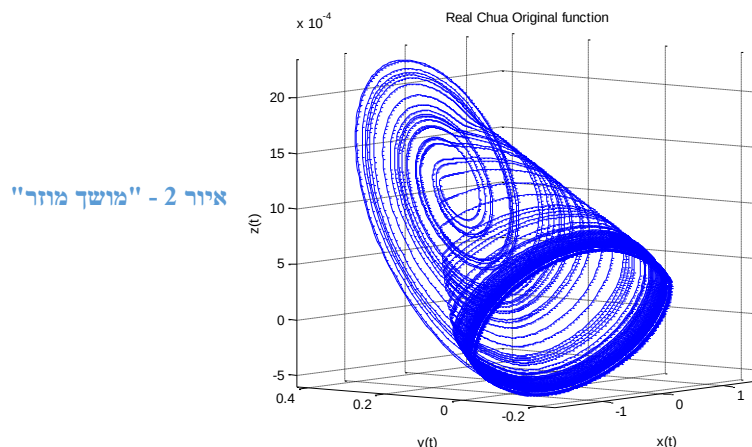
1.4. מושך מוזר (Strange attractor):

דרך מקובלת בתורת הכאוס לתיאור התנועה הכאוטית היא על ידי דיאגרמת פאזה של התנועה. בדיאגרמה כזו, כל אחד מצירי גרף הפונקציה מייצג ממד אחד של המצב, והזמן אינו מיוצג בו. לעתים קרובות, דיאגרמות פאזה מראות כי רוב המצבים מתקרבים לגבול מסוים. המערכת בסופו של דבר נעה באותה צורה עבור כל התנאים ההתחלתיים בתחום מסוים, כמעט כאילו המערכת נמשכת לתנועה הזו. תנועה "מושכת" כזו קרויה המושך של המערכת, והיא נפוצה מאד. במערכות פשוטות לניתוח, המושך הוא לרוב נקודתי. אבל לא כל המושכים הם כאלה. ישנן גם לולאות פשוטות, או לולאות כפולות מורכבות יותר. ויש כאלה שהם למעשה פרקטלים: ה"מושכים המוזרים". מושכים לולאתיים מציגים תנועה מחזורית ו"מושכים מוזרים" מציגים התנהגות כאוטית.

מושך נקרא מוזר אם הוא מקיים את המאפיינים הבאים:

- הוא מושך, כלומר תחום חסום במרחב פאזה שאליו נמשכים מסלולים השייכים לתחום המשיכה, ובעל מימד Hausdorff השונה מאפס.
- רגיש לתנאי ההתחלה.
- תלוי בפרמטרים של מערכת באופן רציף (כלומר, בעל מבנה יציב).

התנהגות כאוטית אינה ניתנת לחיזוי ואם נתבונן במושך מוזר (מושך כאוטי), ניווכח לדעת שהמסלולים לא חוזרים על עצמם אלא חולפים זה ליד זה. החוקיות היחידה היא שהמסלולים ימשיכו לנוע סביב המושך.



1.5. מתנדבים:

כשאומרים מתנדבים, אין הכוונה למעגלי תהודה שמעוררים ע"י מקור סינוס אלא מדובר במעגלים אלקטרוניים שבעזרתם הופכים אנרגיית זרם ישר, המתקבל מספקי-כוח, להספק זרם חילופין, ללא עזרת אות מבוא חיצוני. מעגלי מתנדבים מאפשרים היווצרות אותות בעלי צורות שונות ותדרים שונים על ידי בחירת המעגל המתאים לכל צורך.

ניתן לסווג את מעגלי המתנדבים, לפי צורת הגל שהם יוצרים, ישנם מתנדבים לאות הרמוני ומחזורי - היוצרים גלים שצורתם קרובה מאוד לאות סינוסואידלי מחזורי וישנם מתנדבים שמייצרים צורות גלים אחרות כגון גל מרובע או "שן מסור".

מתנד CHUA, שנעסוק בו בהמשך, הינו מתנד שפרט להיותו מתנד הרמוני, בתנאים מסויימים יכול להיות גם מתנד כלאוטי ונראה כי תכונה זאת שימושית ביותר.

2. פתרון נומרי של משוואות דיפרנציאליות לא ליניאריות:

מערכות של משוואות דיפרנציאליות מופיעות בתחומים רבים במדע, הנדסה ומתמטיקה. ברוב המקרים, המערכת אינה ליניארית ופתרונה מחייב גישה נומרית כיוון שאין לה פתרון אנליטי. פתרון נומרי מתאפשר בשני אופנים. האחד, הוא היכרות עם אלגוריתם מסויים הנותן פתרון איטרטיבי וכתובתו בשפת תוכנה כלשהי, נניח בתוכנת MATLAB. פתרון נוסף הוא שימוש בכלים מוכנים לפתרון משוואות כאלה (גם בצורה נומרית). לתוכנת MATLAB, כלים רבים כאלה והפופולרי שבהם הוא MATLAB ode45 עליו נפרט בהמשך. כמובן שנטיית ליבנו לבחור באופן השני בכדי לחסוך זמן יקר אך עדיין חשוב להבין את אלגוריתם הפתרון על מנת לשלוט בכלים המוכנים בצורה טובה יותר. להלן מוצגות שתי השיטות. אגב, MATLAB ode45 מבוססת על שיטת "רונגה קוטה".

2.1. לפי שיטת "רונגה קוטה" (Runge-Kutta):

שיטת "רונגה קוטה" פותחה בסביבות שנת 1900 ע"י שני מתמטיקאים גרמניים Carl Runge & M. W. Kutta. שיטה זו משיגה התכנסות מסדרים גבוהים, אינה כרוכה בחישוב נגזרות ומבוססת על ערכי הפונקציה בלבד. נתבונן במערכת:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2 \dots y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2 \dots y_n, t) \\ &\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(y_1, y_2 \dots y_n, t)\end{aligned}$$

במערכת זאת, אם הפונקציה f אינה ליניארית אנו נאלץ לפנות לשיטות נומריות – במקרה זה רונגה קוטה כמובן. להלן מוצגות נוסחאות לחישוב נומרי עבור שיטת רונגה קוטה מסדרים 4 ו-5.

Runge kutta Order 4

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t_i, y_i) \\k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= hf(t_i + h, y_i + k_3) \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

Runge kutta Order 5

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(t_i, y_i) \\k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{3k_1 + k_2}{16}\right) \\k_4 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_3}{2}\right) \\k_5 &= hf\left(t_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{-3k_2 + 6k_3 + 9k_4}{16}\right) \\k_6 &= hf\left(t_i + h, y_i + \frac{k_1 + 4k_2 + 6k_3 - 12k_4 + 8k_5}{7}\right) \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)\end{aligned}$$

עקרון העבודה הוא לחשב ממוצע משוקלל (בצורה איטרטיבית) של שיפוע מנקודה, או במילים אחרות לחשב את כל ה-k-ים. ברגע שיהיה בידינו ממוצע משוקלל של התוספות נוסיף אותו לערך הנוכחי של y.

חישוב נומרי זה מומש ב-MATLAB ומימושו מופיע יחד עם תוצאותיו בנספח 1 – "פתרון בשיטה האיטרטיבית, רונגה קוטה מסדר 4 ו-5".

2.2 MATLAB ode45:

לתוכנת MATLAB פותרי משוואות דיפרנציאליות רבים. הסוגים השונים נבדלים בסופו של דבר בהתאמתם למערכת המשוואות – במהירות ודיוק הפתרון. הסוגים השונים מובאים בטבלה הבאה, איור 3, שמופיעה בקובץ העזרה של MATLAB:

Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode23	Nonstiff	Low	For problems with crude error tolerances or for solving moderately stiff problems.
ode113	Nonstiff	Low to high	For problems with stringent error tolerances or for solving computationally intensive problems.
ode15s	Stiff	Low to medium	If ode45 is slow because the problem is stiff.
ode23s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode23t	Moderately Stiff	Low	For moderately stiff problems if you need a solution without numerical damping.
ode23tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

איור 3 - טבלת השוואה לפותרי משוואות ב-MATLAB

MATLAB ode45 מבוססת על שיטת "רונגה קוטה" (Runge-Kutta) מסדר 4 ו-5 שמוסברת לעיל. הפונקציה יכולה לקבל את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות יחד עם הפרמטרים המופיעים להלן ולפתור אותן. הפונקציה בנויה ב-MATLAB בצורה הבאה:

$$[t, v] = \text{ode45}(@dvdt, Tspan, v0, options);$$

- $@dvd t$ – מצביע לפונקציה מהצורה: $dydt = odefun(t,y)$.
- $Tspan$ – ווקטור המציין את אינטרוול האינטגרציה. הפותר מציב את תנאי ההתחלה ב $tspan(1)$ ומבצע אינטגרציה מ $tspan(1)$ ל $tspan(end)$.
- $v0$ – ווקטור תנאי ההתחלה.
- $options$ – מבנה אשר יכול לשנות את מאפייני אינטגרציית ברירת המחדל של הפותר.
- להלן ערכי אינטגרציית ברירת מחדל חשובים להמשך:

RelTol - Relative error tolerance=1e-3

AbsTol- Absoluteerror tolerance=1e-6

MaxStep - $0.1 * \text{abs}(t0 - tf)$

פותר המשוואות מייצר מטריצת ערכים שבה העמודה הראשונה היא ווקטור הזמן ועמודות 2,3,4 הן ווקטורי הפתרונות $v1$, $v2$ ו- $i3$.

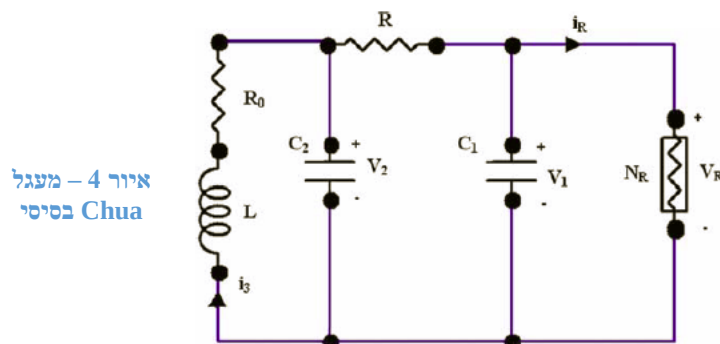
קוד ה MATLAB שנבנה ומבוסס על פונקציה זו מחולק לשני חלקים (גם הוא מצורף בנספח 1). האחד, פותר את מערכת המשוואות הדיפרנציאליות בעזרת ode45. החלק השני "מכין" את המשוואה הדיפרנציאלית עצמה (על פי התנאים שיוצרים שלל הפרמטרים) והוא הקלט לפונקציה ode45.

3. מתנד CHUA – מסכימה חשמלית למשוואות חסרות ממדים:

מתנד זה בנוי ממעגל לא ליניארי עבורו שינוי פרמטרים מסויימים גורר התנהגות כאוטית היוצרת משפחה גדולה של מושכים "מוזרים" (Strange Attractors). מעגל זה פשוט למימוש ונלמד רבות בעשורים האחרונים. כמו כן קיימות וריאציות שונות למימוש אותו מעגל בסיסי.

מתנד CHUA מופיע בספרות המקצועית כמודל אוניברסלי ללמידה של כאוס ומתואר כ"מערכת הפיזית הראשונה בה נראה כאוס במעבדה והוכח מתמטית ע"י שתי שיטות בלתי תלויות" [Matsumoto et al. 1988]. באיור 4 מוצג מעגל CHUA בסיסי המורכב מרכיבים ליניאריים –

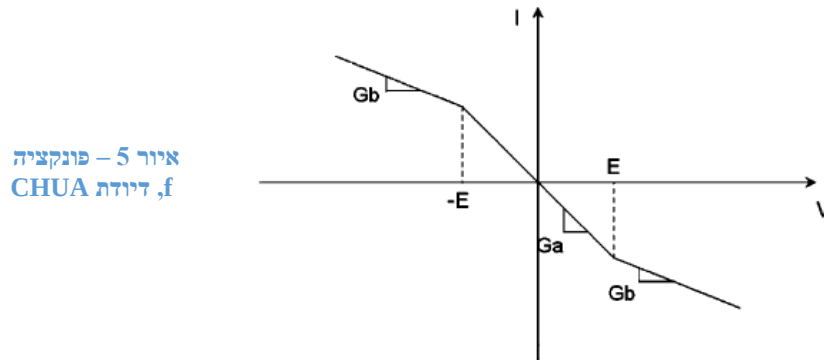
נגדים, קבלים וסליל ומרכיב לא ליניארי – דיודת CHUA - N_R .



בכדי להפיק שלוש משוואות דיפרנציאליות למערכת נבחר בשלושה משתנים התלויים בזמן. $-V_1$ המתח על הקבל C_1 , $-V_2$ המתח על הקבל C_2 . ו- i_3 זרם הסלול. נעזר בחוק הזרמים של קירכהוף – סכום הזרמים הנכנסים לצומת שווים לסכום הזרמים היוצאים ממנה. ובחוק המתחים של קירכהוף – סכום המתחים בלופ שווה לאפס. כך נרכיב את שלושת משוואות המערכת:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1} [(V_2 - V_1)G - f(V_1)] \\ \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} [(V_1 - V_2)G + i_3] \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L} (V_2 + R_0 i_3) \end{cases}$$

כאשר $G = \frac{1}{R}$ ו- $f(V)$ הינה הפונקציה המתארת את דיודת CHUA והיא הרכיב הלא ליניארי שהודות לו ניתן ליצור מצבים כאוטיים. באיור 5 ניתן לראות את אופיין הזרם – מתח של NR.



$$I = f(V) = G_b V + 0.5(G_a - G_b)(|V + E| - |V - E|)$$

ע"י החלפת המשתנים הבאה עוברים לצורה מקובלת יותר של המערכת שהיא צורה חסרת מימדים ומנורמלת:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_1}{E}; & y &= \frac{V_2}{E}; & z &= \frac{Ri_3}{E}; \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}; & \beta &= \frac{R^2 C_2}{L}; & \gamma &= \frac{R_0 R C_2}{L}; \\ a &= R G_a; & b &= R G_b; & \tau &= \frac{t}{R C_2}; & k &= \text{sgn}(R C_2); \end{aligned}$$

ולהלן מוצגת הצורה המנורמלת חסרת המימדים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = k\alpha(y - x - f(x)); \\ \frac{dy}{d\tau} = k(x - y + z); \\ \frac{dz}{d\tau} = -k(\beta y - \gamma z); \end{cases} \quad f(x) = bx + 0.5(a - b)\{|x + 1| - |x - 1|\}$$

משוואות המצב של מעגל זה מושפעות משבעה פרמטרים שיוצרים מגוון רחב של דפוסי התנהגות למערכת.

4. טבעו הכאוטי של מתנד CHUA:

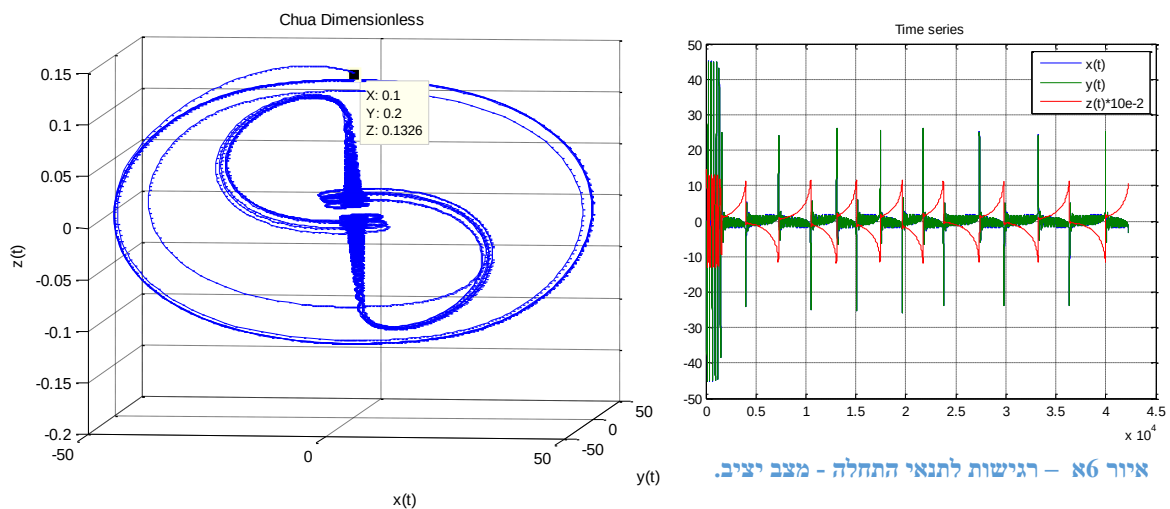
4.1. רגישות לתנאי התחלה:

כמוכר במערכות כאוטיות, שינוי מזערי של תנאי ההתחלה מוביל לשינוי ניכר של למסלול המערכת. לעיתים, המסלולים הללו מתכנסים לאזורים מוגבלים. במצבים אלה נוכל למצוא צורות של מעגלים חסומים ומושכים מוזרים. נתבונן בסט הערכים הבא:

$$\alpha = -1.0837792952, \beta = 0.0000969088, \gamma = 0.0073276247;$$

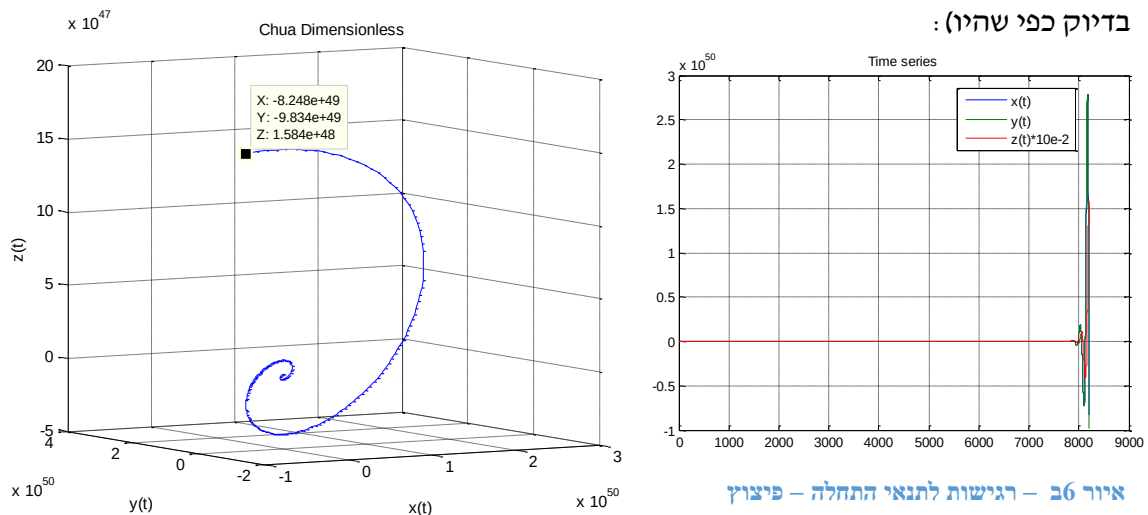
$$a = -0.0941189549, b = 0.001, k = -1;$$

$$x(0) = 0.1, y(0) = 0.2, z(0) = 0.13264604$$



איור 4א – רגישות לתנאי התחלה - מצב יציב.

כאשר נשנה במעט את תנאי ההתחלה $z(0) = 0.13264605$ נקבל "פיצוץ" עצום עם ערכים שמגיעים ל $10e47$ כפי שניתן לראות להלן (יש לציין כי כל הפרמטרים והגדרות הפתרון נותרו בדיוק כפי שהיו):



איור 4ב – רגישות לתנאי התחלה – פיצוץ

זוהי גדולתו של הכאוס, המערכת הכאוטית היא לא צפויה ולא מסודרת אך היא חסומה ויציבה. שינוי קל במערכת הזאת יכול לגרום לפיצוץ ולכן מאוד קשה לייצר כאוס מלאכותי במערכת פיזיקלית.

ניתן לאפיין רגישות לתנאי התחלה באמצעות מקדם ליפונב אשר נותן הערכה איכותית וכמותית עבור התנהגותן של מערכות דינאמיות. על ידי תנאים מוגדרים (אותם מתנד CHUA מקיים) ניתן למצוא מקדמים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ אשר ערכיהם מאפשרים לנו לאפיין את התנהגות המערכת. כיוון שמתנד CHUA הוא מערכת מסדר שלישי, ניתן למצוא שלוש קונפיגורציות אופייניות:

LIMIT CYCLE – מצב של מעגל חסום $(0, -, -)$, $\lambda_1 = 0 > \lambda_2 > \lambda_3$

TORUS – מצב של טורוס $(0, 0, -)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 > \lambda_3$

$(+, 0, -)$, $\lambda_1 > 0 = \lambda_2 > \lambda_3$ ובנוסף $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ יוצר מצב של מושך כאוטי.

4.2. מסלולים הומוקליניים והטרקליניים – Homoclinic & Heteroclinic Orbits

מושג נפוץ מאוד במערכות דינאמיות וכאוטיות הוא מסלול הומוטרקליני. מסלול הומוקליני זהו מסלול שבו גם כיוון הלך וגם חזור עוברים דרך אותה נקודת שיווי משקל מסוג אוכף. לעומת זאת במצב שיש שתי נקודות שיווי משקל שונות, אחת לכיוון הלך והשנייה לחזור המצב מתאר מסלול הטרקליני.

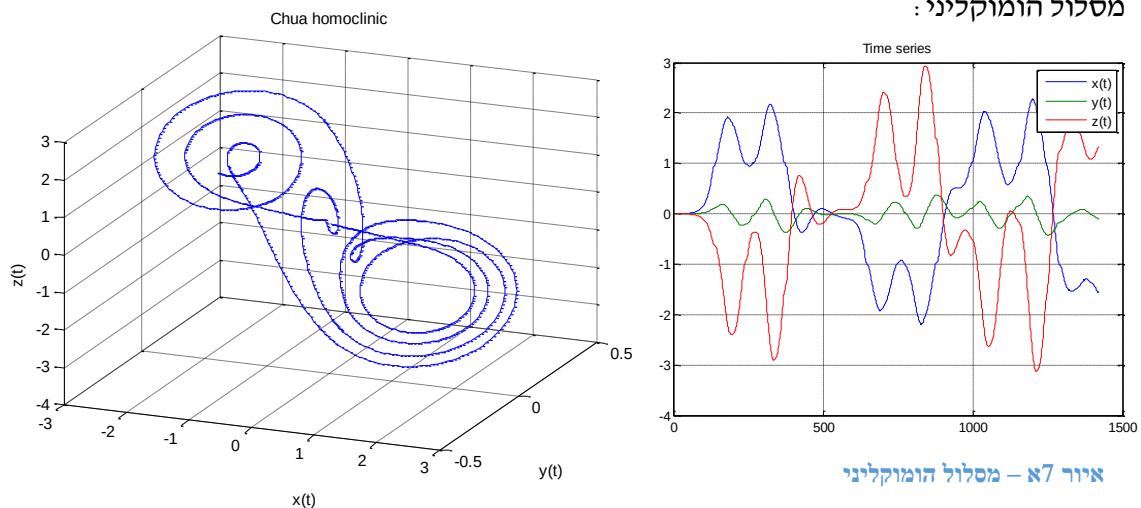
נתבונן בסט הערכים למערכת חסרת המימדים הבאה:

$$\alpha = 8.29203, \beta = 12.061126, \gamma = 0$$

$$a = -1.1428571, b = -0.7142857, k = 1$$

$$x(0) = 0.00083672759, y(0) = 0.000095112528, z(0) = -0.00053929635$$

מסלול הומוקליני:

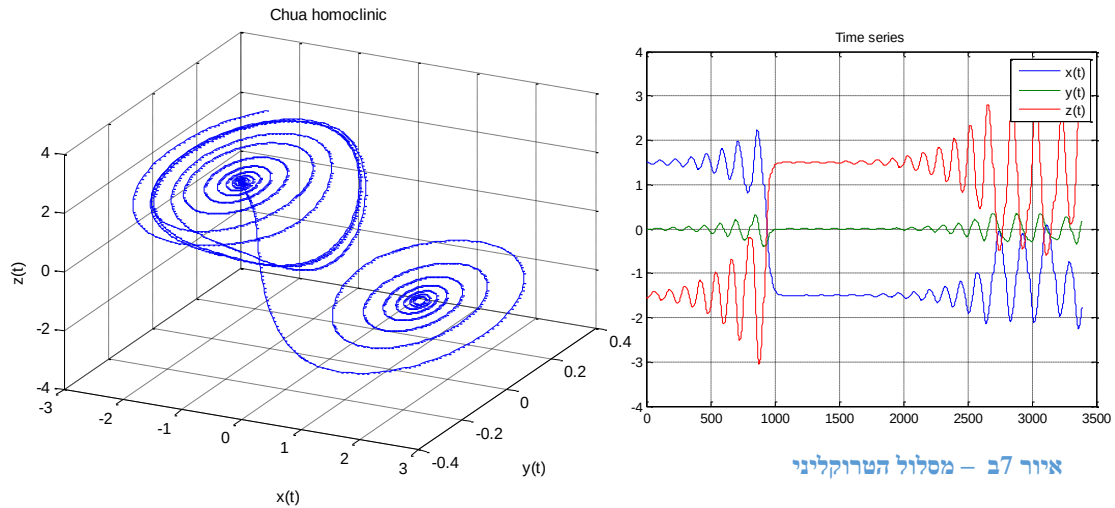


איור 7א – מסלול הומוקליני

ועבור הערכים הללו נקבל מסלול הטרקליני:

$$x(0) = 1.51900979838814, y(0) = -0.004298524877956949,$$

$$z(0) = -1.567578825979665$$



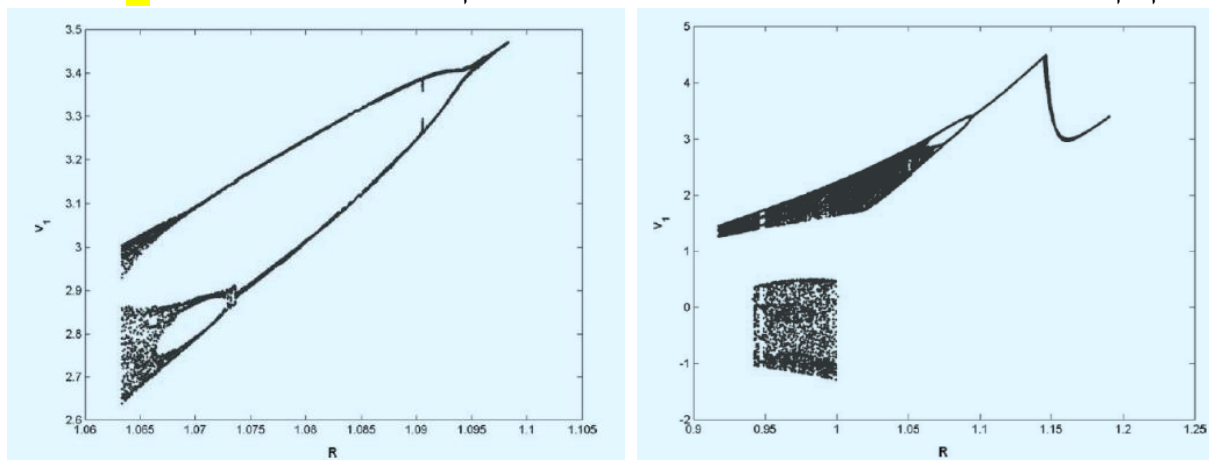
4.3. מסלולים שונים לכאוס:

4.3.1. הכפלה מחזורית - (Period-doubling route)

בהקשר לדוגמה שמופיעה מטה, כאשר משנים את פרמטר α , נקודת שיווי המשקל מאבדת את יציבותה ונוצר מסלול מעגלי חסום – תהליך זה נקרא ביפורקציית אנדרונוב הופף (Andronov-Hopf). ככל שממשיכים לשנות את פרמטר זה אותו מעגל חסום מאבד את יציבותו ונוצר מעגל חסום במחזור כפול - מעגל חסום מחזור 2. בהמשך, עם השתנות פרמטר α , יוצר מעגל חסום מחזור 4 עם איבוד היציבות של מעגל חסום מחזור 2. ביפורקציה זאת מתרחשת אינסוף פעמים עם הקטנת אינטרוול השינוי של אותו פרמטר. שינוי האינטרוולים מתכנס לסידרה הנדסית המאופיינת ע"י קבוע פייגנבאום עד לגבול שבו מגיעים לכאוס. נבחן את קבוצת הפרמטרים הבאה:

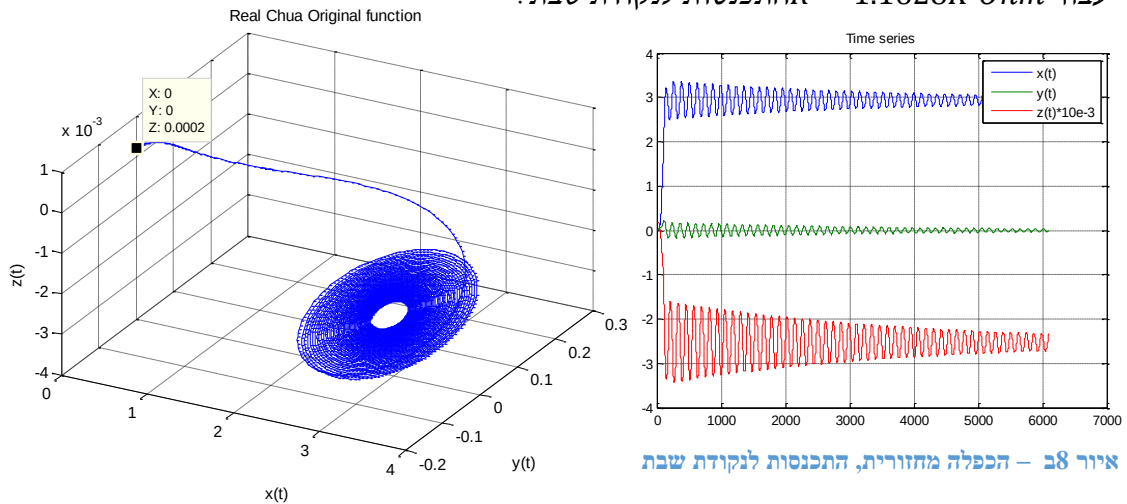
$$C_1 = 0.10443nF, C_2 = 1nF, R = 1K\ Ohm, R_0 = 0\ Ohm, \\ L = 0.0625mH, G_a = -1.143\ mS, G_b = -0.714\ mS, E = 1 \\ V_1(0) = 0V, V_2(0) = 0V, i_3(0) = 0.2\ mA.$$

נקטין את ערכו של R בהדרגה מ $0.95\ k\Omega$ ל $1.1905\ k\Omega$ ב 500 קפיצות. כפי שמתואר באיור X:

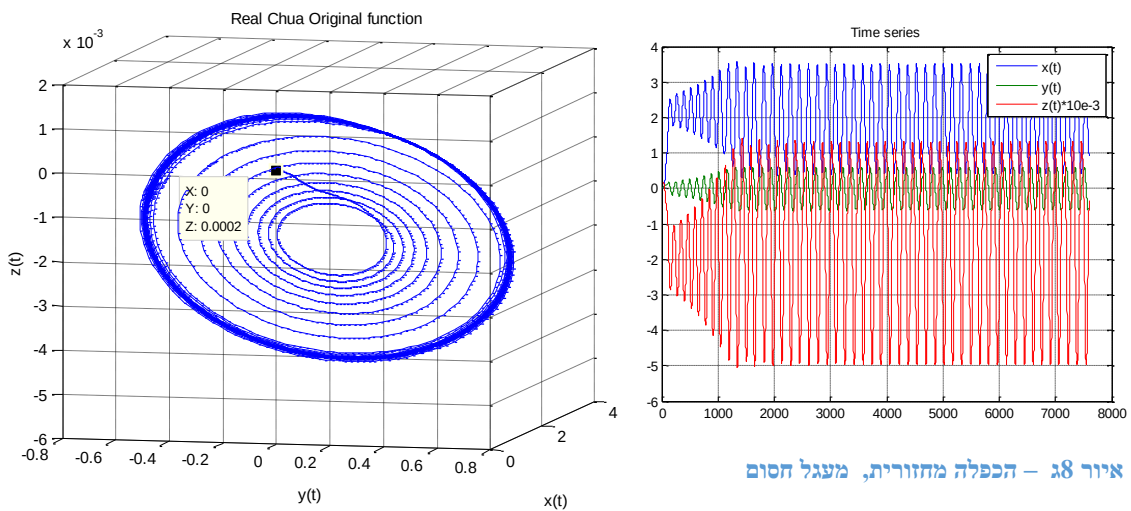


ניתן לראות (מימין לשמאל) כי מתחילים מנקודה בודדת וכאשר מגיעים לערך $R = 1.1628 \text{ k}\Omega$ המערכת מגיעה לפיצול הראשון המופיע בצורת מעגל חסום. $R = 1.0941 \text{ k}\Omega$ המערכת מגיעה לשרשרת פיצולים. אחרי i פיצולים המעגל החסום הופך למעגל לא יציב. הקטנה נוספת של R מובילה לכאוס. $R = 1.0633 \text{ k}\Omega$ נגיע לספירלת CHUA וב $R = 1.0005 \text{ k}\Omega$ המערכת תגיע לשני מושכים-DOUBLE SCROLL.

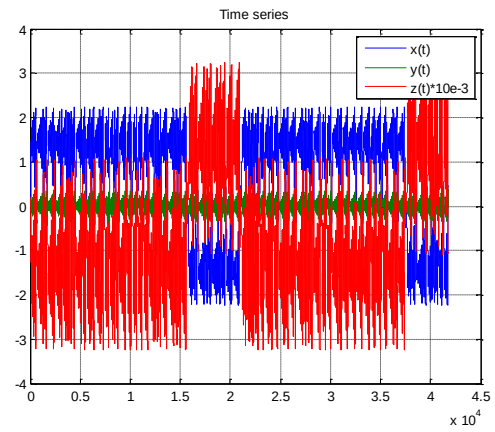
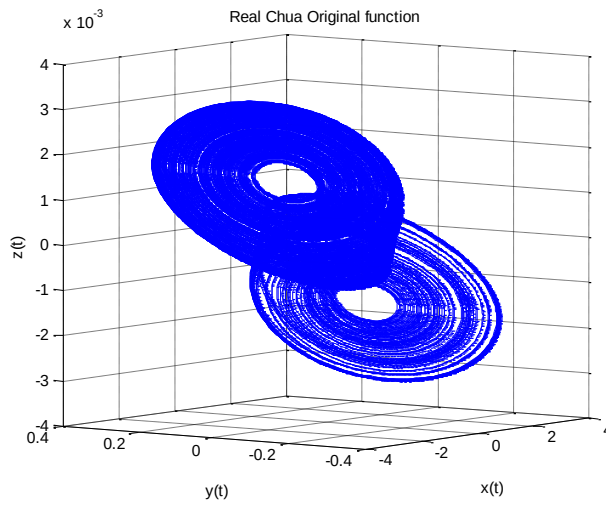
עבור $R = 1.1628 \text{ K Ohm}$ התכנסות לנקודת שבת :



עבור $R = 1.0941 \text{ K Ohm}$ מסלול מעגלי חסום :



עבור $R = 1.0004 \text{ K Ohm}$ המערכת תגיע לשני מושכים-DOUBLE SCROLL.



איור 8 – הכפלה מחזורית, כאוס

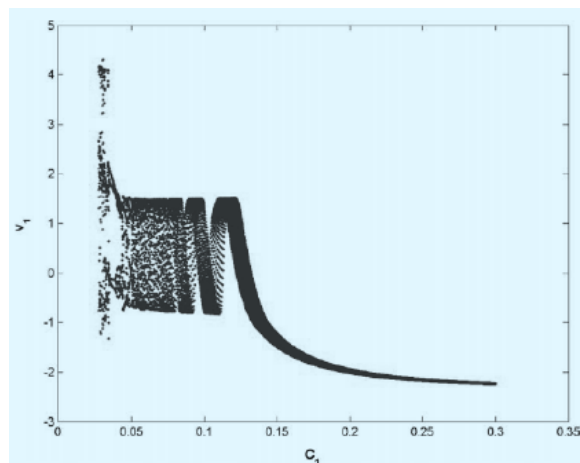
4.3.2. "קריסת טורוס" (Torus breakdown)

דרך זו מגיעה לכאוס דרך מספר ביפרקציות מסוג אנדרונוב הופף בהן נקודת שיווי המשקל מאבדת את יציבותה ונוצר מסלול מעגלי חסום. לאחר שתי ביפרקציות מסוג זה אנו מקבלים מושך טבעתי. בביפרקציה השלישית נראה כי המערכת הגיעה למצב כאוטי.

נבחן את קבוצת הפרמטרים הבאה:

$$\begin{aligned} C_2 &= 10 \text{ nF}, R = -1 \text{ K Ohm}, L = 0.00667 \text{ mH}, \\ R_0 &= 0.7014 \text{ Ohm}, G_a = 0.856 \text{ mS}, G_b = 1.1 \text{ mS}, E = 1 \text{ V} \\ V_1(0) &= -2.161 \text{ V}, V_2(0) = 0.14 \text{ V}, i_3(0) = -11.4 \text{ mA}. \end{aligned}$$

נשנה את C_1 כך ש $C_1 \in [0.0265 \text{ nF}; 0.3 \text{ nF}]$ ונקבל את ההשתלשלות המופיעה באיור 9א. נתבונן בסיגנל $V_1(t)$ עבור $C_1 < 0.0265 \text{ nF}$ הפתרון הופך ללא יציב.

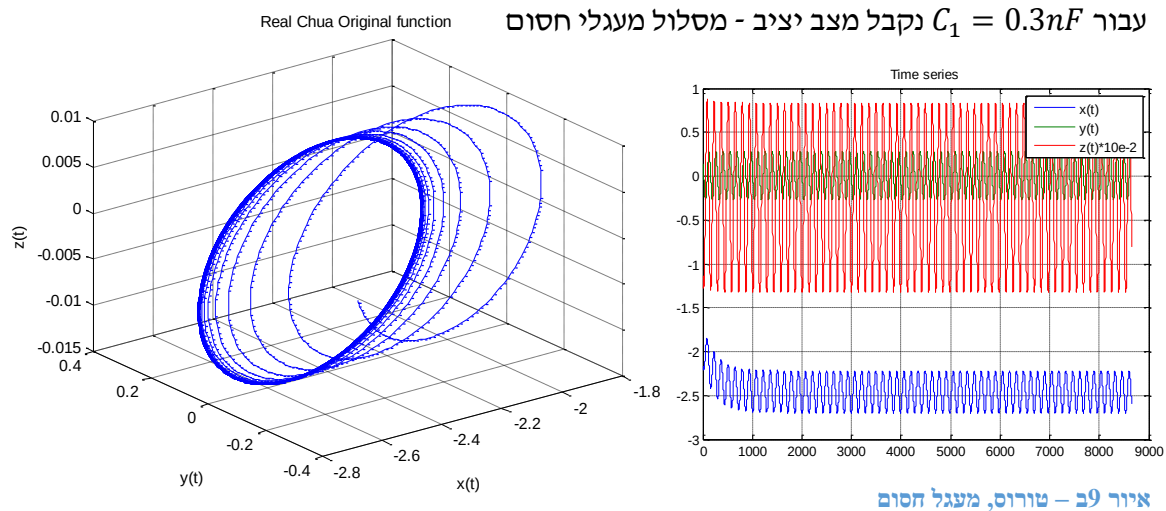


איור 9א – דיאגרמת ביפרקציות של טורוס.

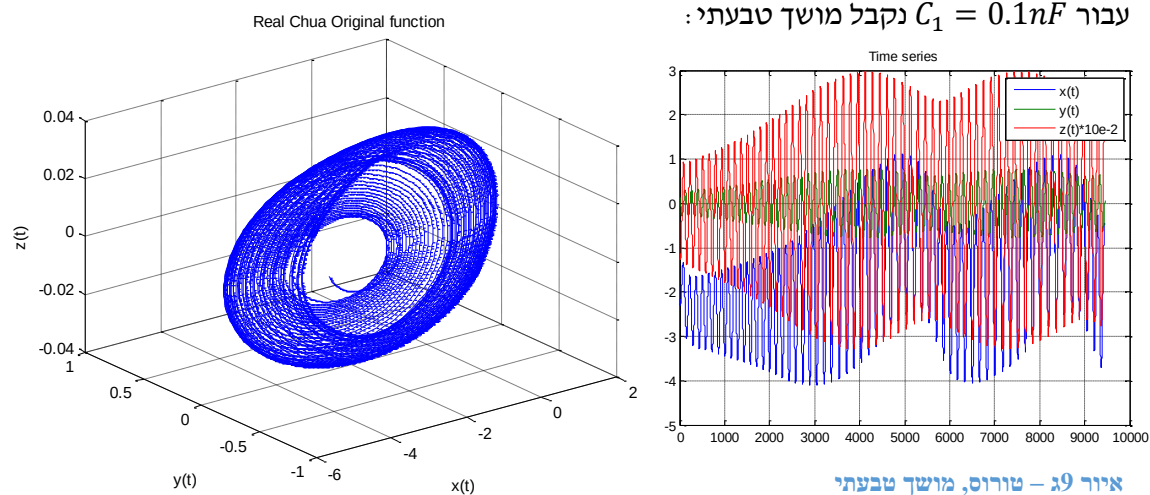
עבור ערכים גדולים יותר, המסלולים הופכים לכאוטיים. לדוגמא, עבור $C_1 = 0.0266 \text{ nF}$ נקבל מושך המופיע באיור 9ב. $V_1(t)$ הוא כאוטי, אך בתנאים מסוימים הוא יכול להיות לא כאוטי אלא להתכנס למעגל חסום.

התפלגות ההרמוניות של $V_1(t)$ לאורך ציר התדר אינה אחידה. הספקטרום כולל הרמוניות בתדר נמוך המשויות למעבר בין מעגל חסום אחד למשנהו ותדרים גבוהים המשויות לתנועה של DOUBLE SCROLL.

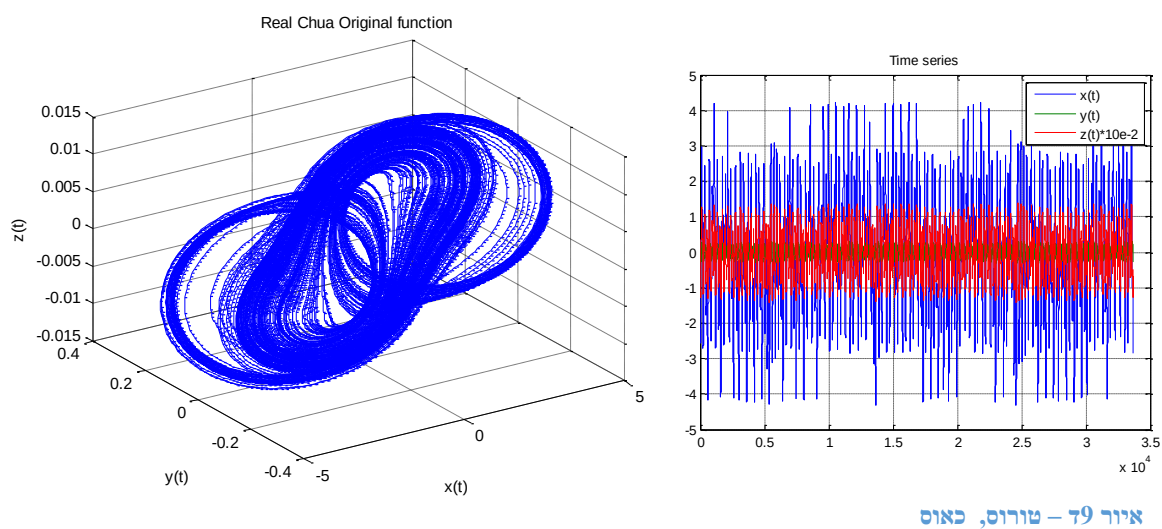
עבור $C_1 = 0.3nF$ נקבל מצב יציב - מסלול מעגלי חסום



עבור $C_1 = 0.1nF$ נקבל מושך טבעתי:



עבור $C_1 = 0.0266nF$ נקבל מצב כאוטי יציב:



עבור $C_1 < 0.0265nF$ נקבל צורות לא יציבות והתבדרות לערכים גדולים מאוד (פיצוץ).

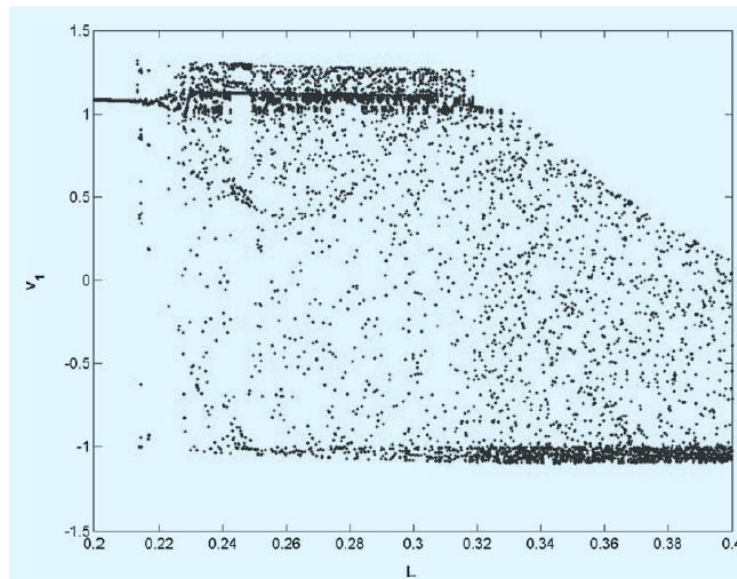
4.3.3. ערבוב (Intermittency)

במצב זה הסינגל הוא כמעט מחזורי פרט לקפיצות לא צפויות. במילים אחרות, במצב זה מעורבבים יחד התנהגות מחזורית נורמלית וקפיצות לא מחזוריות. במצב זה מתחילים ממצב מחזורי ולאחר מכן שכתוספות הקפיצות הלא מחזוריות המצב הופך לכאוטי.

נבחן את קבוצת הפרמטרים הבאה :

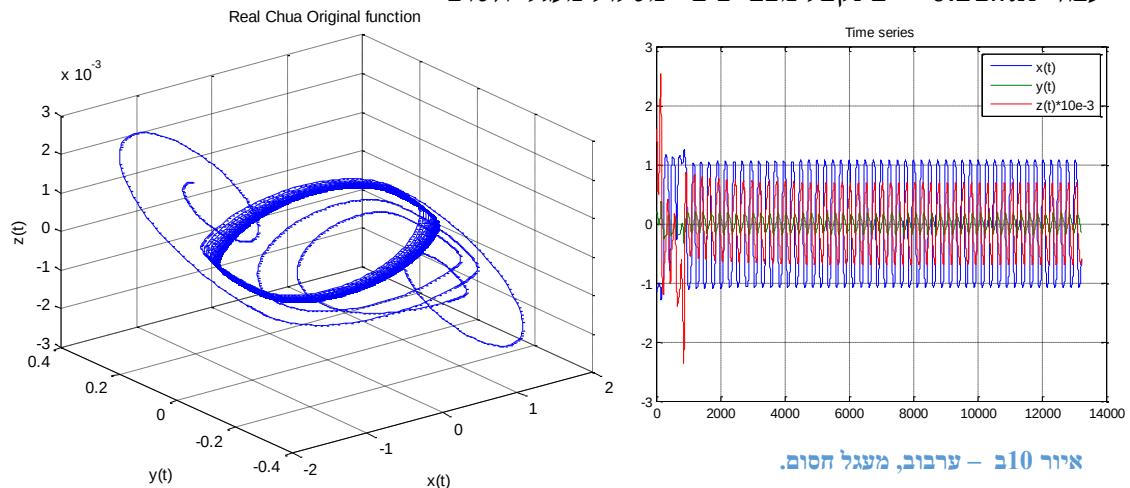
$$C_1 = -0.1333 \text{ nF}, C_2 = 10 \text{ nF}, R = 1 \text{ K Ohm}, \\ R_0 = -100 \text{ Ohm}, G_a = -0.98 \text{ mS}, G_b = -2.4 \text{ mS}, E = 1 \text{ V} \\ V_1(0) = -1.1337901 \text{ V}, V_2(0) = 0.17026396 \text{ V}, i_3(0) = 1.6076974 \text{ mA}.$$

נגדיל בהדרגה את L כך ש $L \in [0.2 \text{ mH}; 0.4 \text{ mH}]$ ונראה את הביפורקציות באיור 10א. עבור ערכי L הקטנים מ 0.2128 mH המערכת מתכנסת למעגל חסום. מנקודה זו המערכת מתחילה להראות ערבוב בין איזורים כיאוטיים קצרים ה"מפריעים" לאזור היציב. עבור ערכי L הגדולים מ 0.3208 mH , נקבל התעצמות של האזור המחזורי.



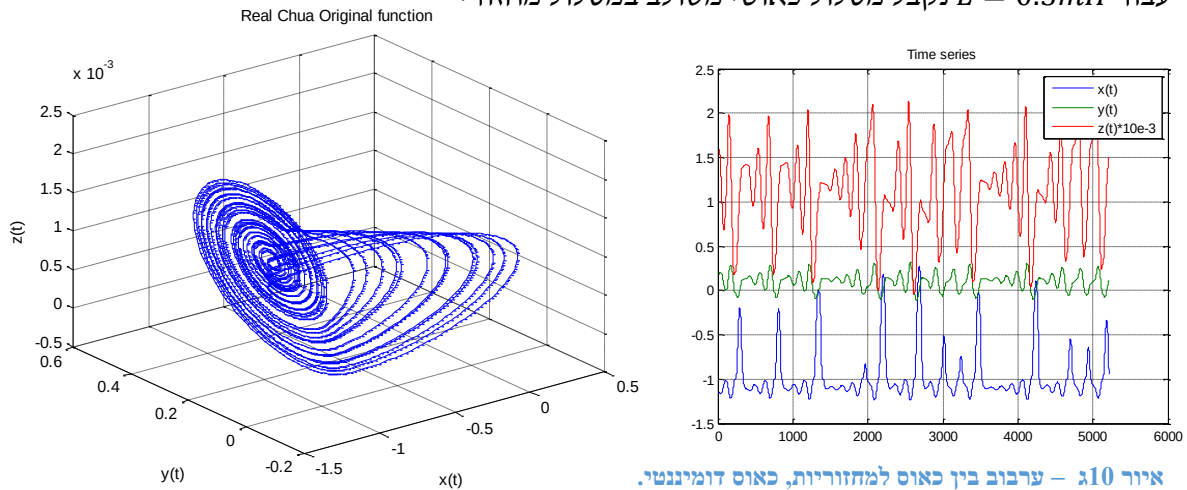
איור 10א – דיאגרמת ביפורקציות של ערבוב.

עבור $L = 0.21 \text{ mH}$ נקבל מצב יציב - מסלול מעגלי חסום

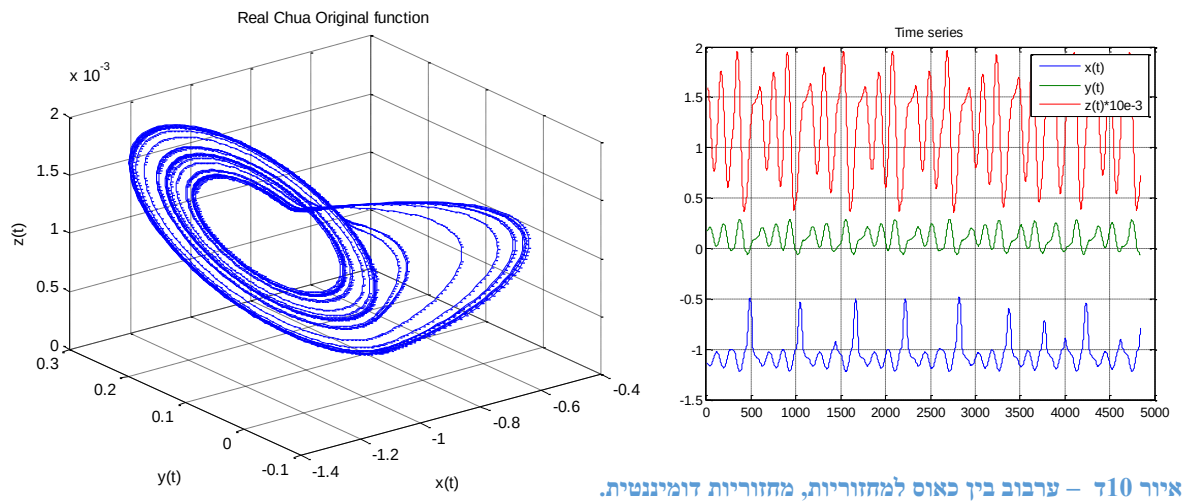


איור 10ב – ערבוב, מעגל חסום.

עבור $L = 0.3mH$ נקבל מסלול כאוטי משולב במסלול מחזורי



עבור $L = 0.38mH$ נראה התחזקות של האזור המחזורי והחלשות האזור הכאוטי.



4.4 Intermittency & 1/f-noise:

התגלה מחקרית כי ספקטרום העוצמה S_f של מערכות פיזיקליות רבות מתפלג בתדר נמוך לפי החוקיות $1/f^\delta$ ($0.8 < \delta < 1.4$). התופעה הזאת קרויה רעש $1/f$.

תופעת הערבוב (Intermittency) יכולה לבוא בצורה של מצב מחזורי לכאוטי כפי שראינו בסעיף הקודם, אך ישנו גם סוג של ערבוב בין שני מושכים כאוטיים. מאפיין סטטיסטי מעניין של מצב זה הוא שהתפלגות עוצמת התדרים הנמוכים בספקטרום היא מהצורה $1/f^\delta$.

תופעה כזאת אובחנה בסמוך לתולדת שני מושכים, DOUBLE-SCROLL, במתנד CHUA. נמצא בצורה נומרית כי ספקטרום העוצמה מתנהג בצורה $S_x(\omega) = \omega^{-\delta}$ כאשר $\delta = 1.1 \pm 0.1$.

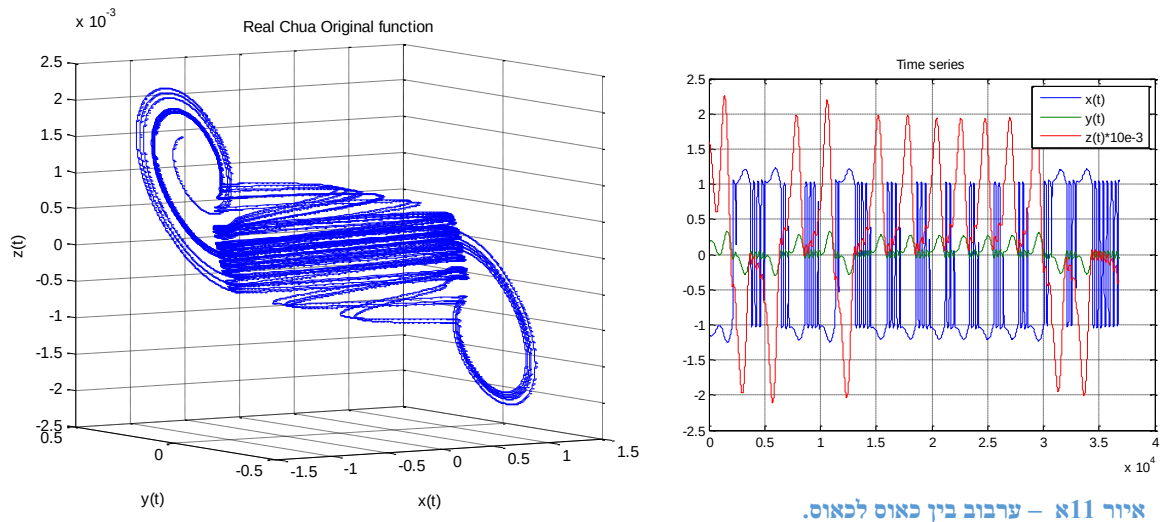
כלומר הגרף על הסקלה הלוגריתמית מתנהג כמו קו $1/f^\delta$ המתאים ל- $\delta=1$. ספקטרום $1/f$ זהו מושג המשמש תחומים רבים כמו תנודות זרם במכשיר אלקטרוני, תנודות בתדירות הסיבוב של

כדור הארץ ותנודות בקצב פעימות הלב האנושי. מתנד CHUA יכול להשתמש בתופעת ה Intermittency ולשמש כגנרטור של רעש $1/f$, ולהביא להבנה מעמיקה יותר של תופעות רעש $1/f$. נתבונן במערכת הבאה שיוצרת ערבוב.

$$C_1 = -0.0143 \text{ nF}, C_2 = 10 \text{ nF}, R = 1 \text{ K Ohm},$$

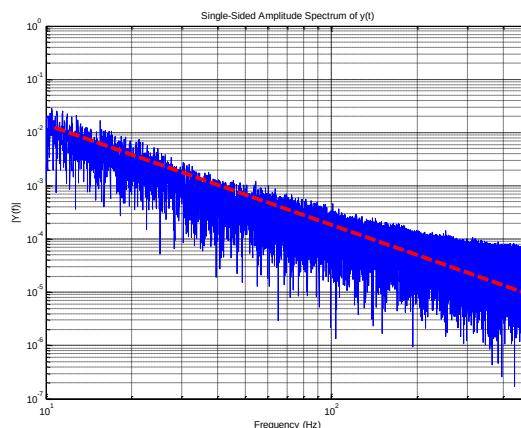
$$R_0 = -100 \text{ Ohm}, G_a = -0.98 \text{ mS}, G_b = -2.4 \text{ mS}, E = 1 \text{ V}$$

$$V_1(0) = -1.1337901 \text{ V}, V_2(0) = 0.17026396 \text{ V}, i_3(0) = 1.6076974 \text{ mA}.$$



באיור להלן ניתן לראות את תוצאת התמרת FFT של V_1 . התוצאה מוצגת ע"י הפונקציה loglog של MATLAB אשר מציגה את התוצאות בסקאלה לוגריתמית עבור שני הצירים. קו המגמה (הקו האדום) מתנהג כמו קו $1/f^\delta$ המתאים ל- $\delta=1$.

איור 11 – V_1 במישור
התדר, רעש $1/f$



5. שימוש בפולינום ממעלה שלישית – CUBIC FUNCTION:

מתנד CHUA עשיר בתופעות מעניינות בין היתר הודות לייחודיות החלק הלא ליניארי, הפונקציה f . פונקציה אי זוגית זו הינה פונקציה רציפה אך לא חלקה ושתי נקודות השבר (עבור $x=\pm 1$ בצורה חסרת המימדים) יצרו עניין רב בעבר, בקרב החוקרים, בשל היותן האחראיות, לכאורה,

לתופעות הכאוטיות. בהמשך התברר שגם פונקציות חלקות יכולות להחליף את הפונקציה הנ"ל וליצור את אותן תופעות כאוטיות.

מספר מאמרים פורסמו על הדיון בשימוש פולינום ממעלה שלישית בתור הרכיב הלא ליניארי במתנד CHUA. בשימוש פונקציות אלה קיים קושי רב יותר בהגדרת מצבים כאוטיים ובניתוחם

ולכן נעסוק בפונקציה בעלת חוסר ליניאריות קלה: $f(x) = h_1x + h_3x^3$

כעת, המערכת הכוללת מאופיינת עדיין ע"י שישה משתנים אך כעת, h_1 ו- h_3 מחליפות את a, b . ע"י שינוי תנאי ההתחלה וששת הפרמטרים הנ"ל ניתן להגיע למספר גדול של מושכים מוזרים. אמנם ניתן להתייחס לצורה חסרת המימדים בלבד לצורך ניתוח פונקציות חדשות אך בגלל ישימותו של מעגל CHUA יש חשיבות רבה לממש את את הפונקציות הללו בצורה פיזיקלית ואכן, מספר מאמרים הוצגו על יצירת רכיב לא ליניארי (דיודת CHUA) כזה שייצג פונקציה ממעלה שלישית מהצורה הנ"ל.

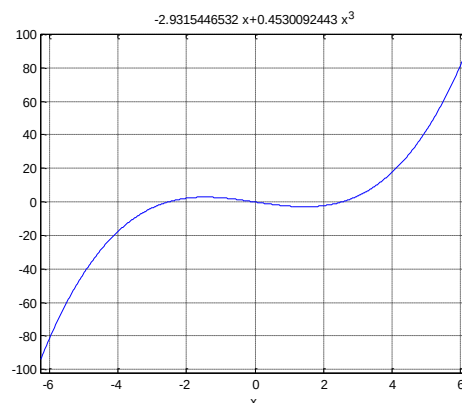
נתבונן בקבוצת הפרמטרים עבור המערכת חסרת הממדים הבאה:

$$\alpha = 1.9, \beta = 24.07997058, \gamma = -0.859255678$$

$$h_1 = -2.9315446532, h_3 = 0.4530092443, k = 1$$

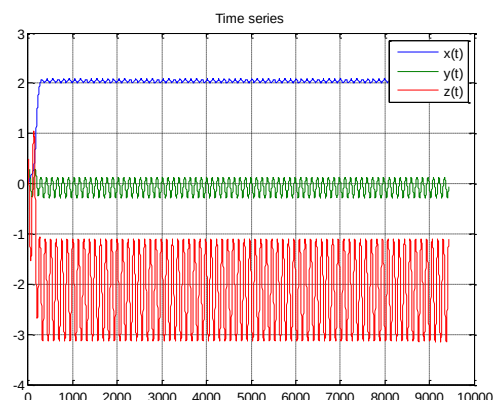
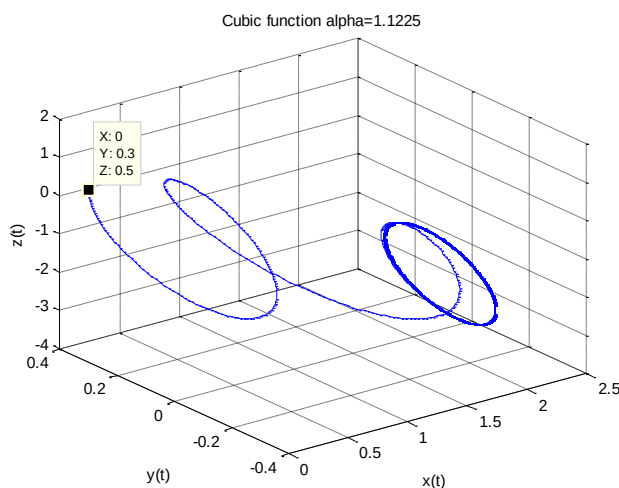
כעת הפונקציה f מיוצגת ע"י הפונקציה החלקה המופיעה באיור הבא

איור 12 – פונקציית f פולינומיאלית



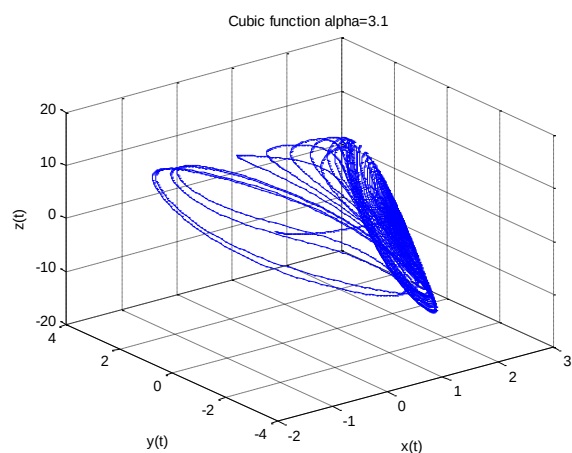
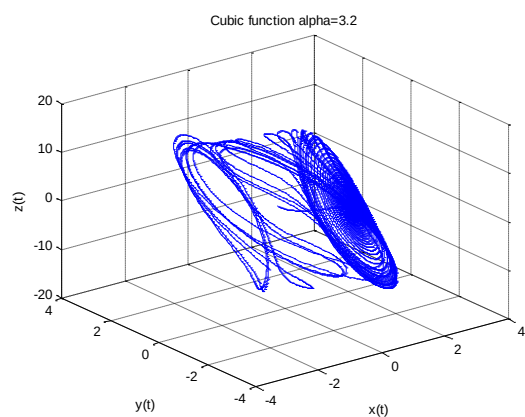
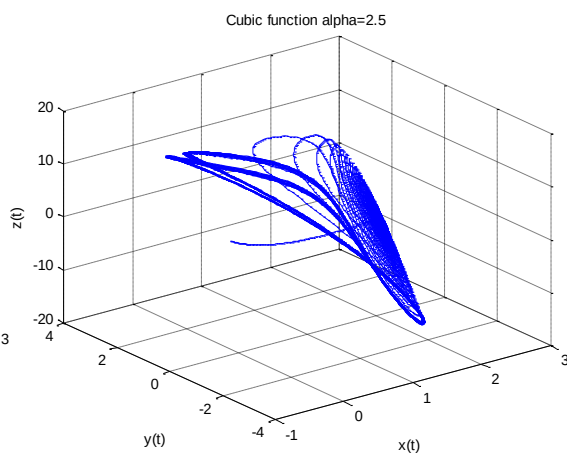
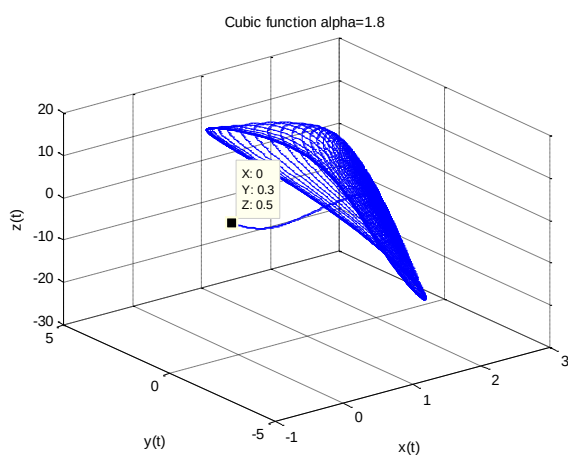
ע"י שינוי הפרמטר α קבוצת הפרמטרים הנ"ל תוביל אותנו לכאוס ע"י הכפלה מחזורית.

עבור $\alpha = 1.1225$ נקבל מעגל חסום



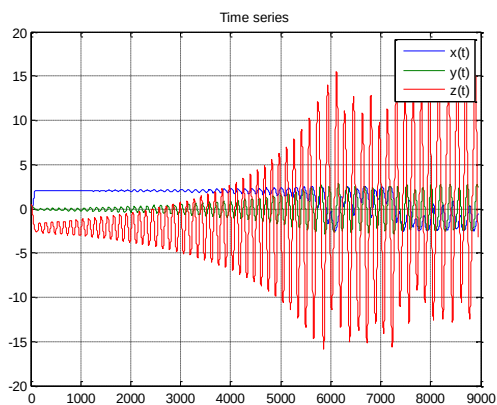
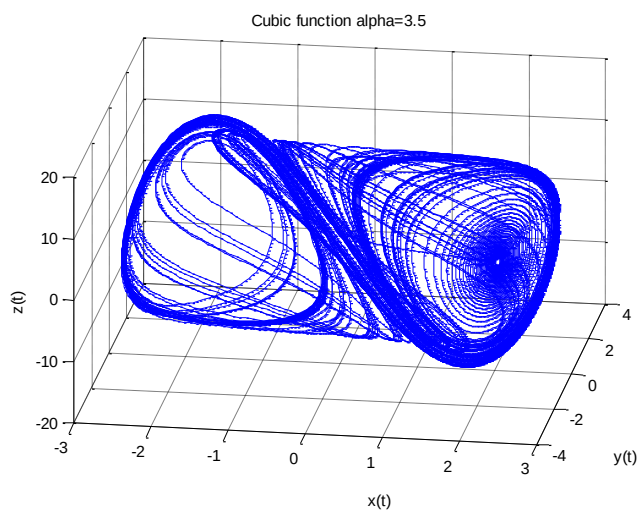
איור 12 – שימוש בפונקציה פולינומיאלית, מעגל חסום.

עבור $1.8 < \alpha < 3.2$ נקבל שרשרת פיצולים וב $\alpha = 3.2$ נקבל שני מושכים Double-Scroll:



איור 12ג – שימוש בפוקציה פולינומיאלית, שרשרת פיצולים

עבור $\alpha = 3.5$ נקבל מסלול כאוטי יציב



איור 12ד – שימוש בפוקציה פולינומיאלית, כאוס

6. שימוש בפונקציות f בעלות n מושכים:

בשימוש הפונקציה f הלינארית למקוטעין

כיוון שקיים בידנו מודל חסר מימדים של מתנד CHUA שהוא מתמטי לחלוטין, נוכל לחקור שימוש בפונקציות לא ליניאריות נוספות, ללא צורך בהקשר החשמלי שלהן.

6.1 פונקציית sine:

בשימוש פונקציית sine, פותח הרכיב הלא ליניארי הבא [Tang et al., 2001] שמציג מערכת בעלת n מושכים.

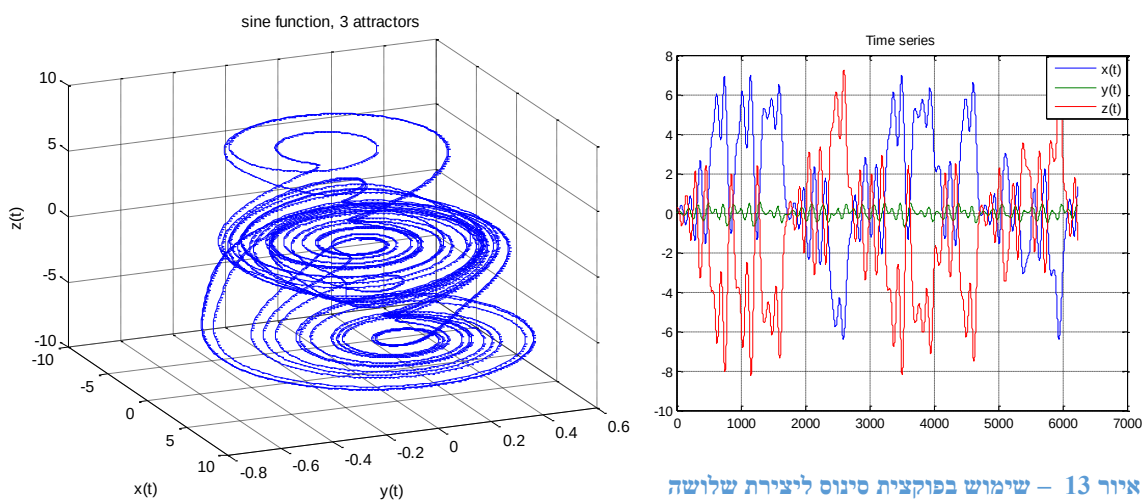
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - f(x)); \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z; \\ \frac{dz}{d\tau} = \beta y - \gamma z; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{b\pi}{2a}(x - 2ac); & \text{if } x \geq 2ac \\ -b\sin\left(\frac{\pi x}{2a} + d\right); & \text{if } -2ac \leq x \leq 2ac \\ \frac{b\pi}{2a}(x + 2ac); & \text{if } x \leq -2ac \end{cases}$$

כאמור, מערכת זאת מייצרת n מושכים שנקבעים ע"י $n = c + 1$. הפרמטר d נקבע לפי n – אם n אי זוגי אז ערכו יהיה π , אחרת ערכו 0.

נתייחס למערכת בעלת הפרמטרים הבאים:

$$\begin{aligned} \alpha &= 10.814, \beta = 14, \gamma = 0 \\ a &= 1.3, b = 0.11, c = 2 \\ n &= 3, d = \pi \\ x(0) &= 0, y(0) = 0, z(0) = 0.28695 \end{aligned}$$

המערכת תייצר לנו שלושה מושכים כאוטיים כפי שניתן לראות באיור X המציג $7e3$ איטרציות:



איור 13 – שימוש בפונקציית סינוס ליצירת שלושה מושכים כאוטיים

6.2. פונקציה היפרבולית - Hyperbolic :

מחקרים נוספים מציגים את השימוש בפונקציה ההיפרבולית [Salamaet al.2003].
מחקר מציע את המערכת הבאה :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y; \\ \frac{dy}{d\tau} = z; \\ \frac{dz}{d\tau} = -a(y + z - f(x)); \end{cases} \quad f(x) = \sum_{j=-N}^M (-1)^{j-1} \tanh[k(x - 2j)]$$

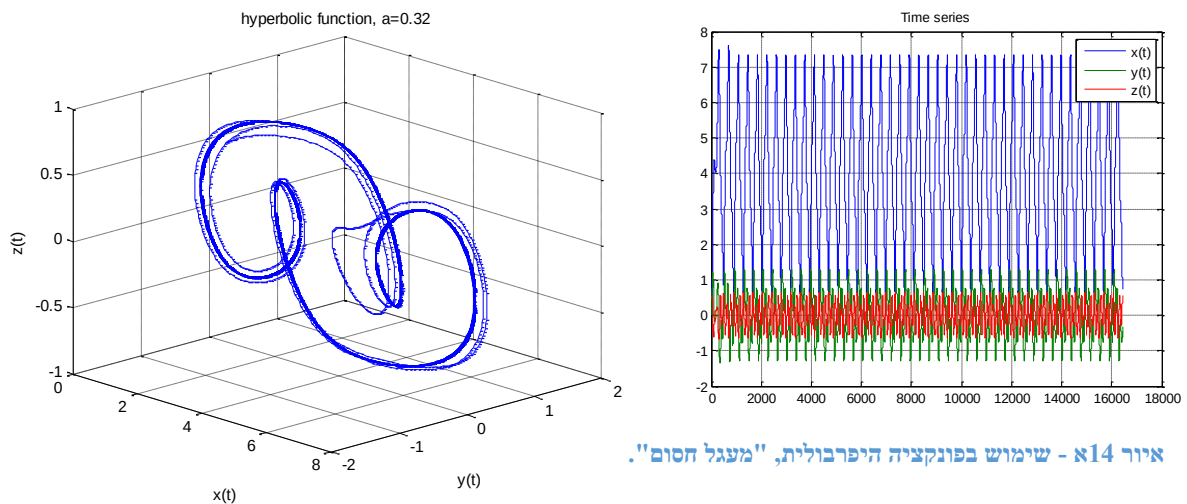
M ו-N הינם מספרים אי זוגיים. k הוא קבוע. $n = \frac{M+N+2}{2}$. שינוי N ו-M משנה את מספר המושכים המקסימלי. כאן, שינוי הפרמטר a ישנה את מספר המושכים בין אחד למספר המושכים המקסימלי.

התנהגות המערכת כאן, התהוות הכאוס, היא בצורת ערבוב - Intermittency. בשינוי הפרמטר a מתרחשים מעברים חדים ולא חלקים בין כאוטיים ולא כאוטיים.

נתייחס למערכת בעלת הפרמטרים הבאים :

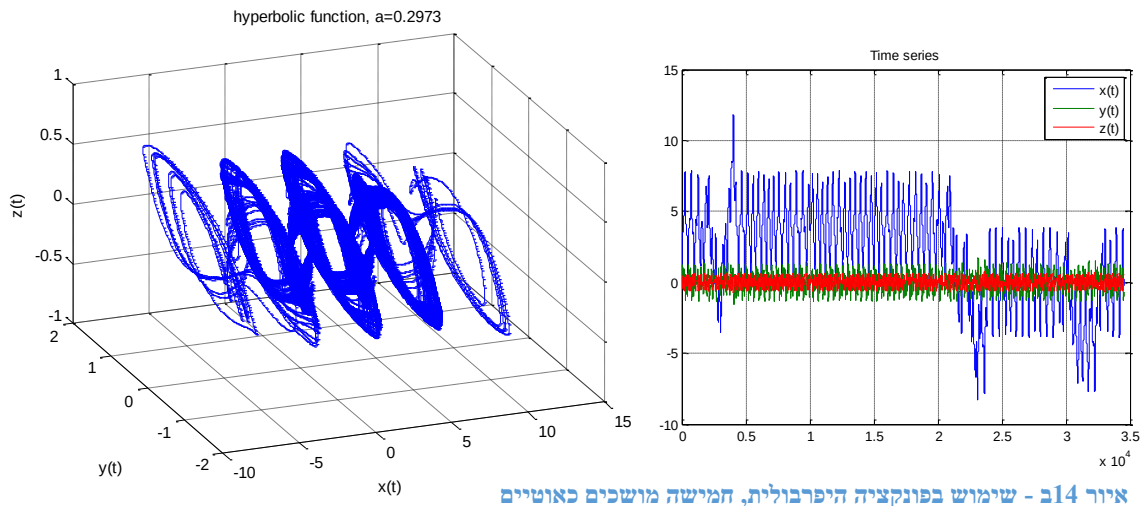
$$\begin{aligned} a &= 0.32, M = 5, N = 3, k = 2 \\ n &= 5 \\ x(0) &= 0.5, y(0) = 0, z(0) = 0.5 \end{aligned}$$

במצב יציב, עבור $a=0.32$ ניתן לראות את התוצה באיור X המציג תוצאה של $16e3$ איטרציות :



איור 14 - שימוש בפונקציה היפרבולית, "מעגל חסום".

אם נשנה מעט את ערכו של a, לערך 0.2973 נקבל חמישה מושכים כפי שניתן לראות באיור X המציג תוצאה של $35e3$ איטרציות :



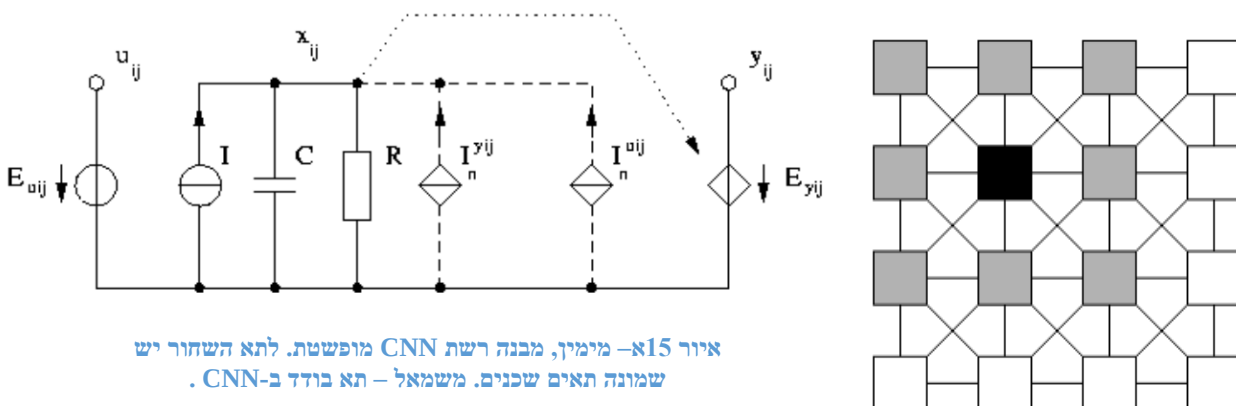
איור 14 - שימוש בפונקציה היפרבולית, חמישה מושכים כאוטיים

7. רשתות נוירונים עצביות: CNN – Cellular neural network

התחום של רשתות נוירונים מלאכותיות הינו תחום עשיר ורחב, ולכן כמובן לא יפורט כאן במלואו. עם זאת, CNN הוא אחד מכיווני ההתפתחות המשמעותיים והמעניינים של מעגל CHUA ולכן נציג מושגים בסיסיים בנושא.

CNN הינה מודל מתמטי לרשתות הנוירונים במוח. במוח אנושי ישנם במקור 10^{10} נוירונים, בעלי 10^4 - 10^5 חיבורים לכל נוירון. זמן המיתוג לכל נוירון הינו בערך 0.001 שניות. בזמן עיבוד סצנה ספציפית במוח מתבצעים עיבודים רבים במקביל. שיטה זו יעילה מאוד לעיבוד פעולות בזמן אמת ולכן יש נסיונות רבים לחקות את המערכות הללו בצורה מלאכותית. ואכן, ישנם שימושים רבים לרשתות אלו בעיבוד אותות ותמונה.

CNN הוצגה לראשונה ע"י אותו Leon Chua בשנת 1988 בתור מערך גדול של תאים אנלוגיים לא ליניאריים. כל תא כזה מתקשר עם השכנים שצמודים לו. כל תא מתקשר עם שכניו הצמודים אך יכול להשפיע בעקיפין על שכנים מרוחקים. תיאורטית, אין הגבלה למספר השכנים הצמודים. כל תא מכיל כל הפרמטרים במתנד CHUA רגיל פרט לסליל (קבלים ונגדים – רכיבים לינאריים, ורכיב לא לינארי – דיודת CHUA).

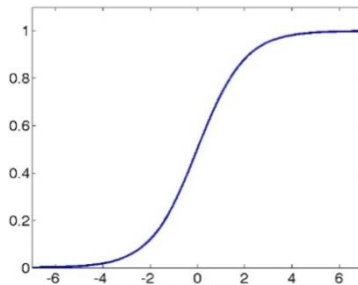


איור 15 – מימין, מבנה רשת CNN מופשטת. לתא השחור יש שמונה תאים שכנים. משמאל – תא בודד ב-CNN.

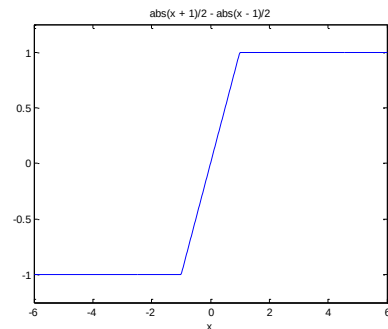
העברת המידע מתבצעת באופן הבא: לכל תא יש מקור מתח וזרם בלתי תלויים I ו- E_u . כמה מקורות זרם מבוקרים מתח I_n -ים. ומקור מתח מבוקר מתח E_y הנמצא במוצא התא. מקורות הזרם והמתח המבוקרים מקושרים לתאים הסמוכים, מזינים אותם ומוזנים מהם במידע אנלוגי.

הסימונים u_{ij}, y_{ij}, x_{ij} הם משתני כניסה ויציאה ומצב של תא, בהתאמה. מקור מתח המוצא מבוקר מתח לפי המשוואה הלינארית למקוטעין:

$$y_{ij} = 0.5(|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|)$$



איור 15-ב – מימין,
פונקציית המוצא של
תא CNN מלאכותי.
משמאל – פונקציית
המוצא של נוירון
אמיתי במוח.



התא $C(i,j)$ מחובר לשכניו ע"י בשני סוגי אותות: משוב ושליטה, a ו- b , בהתאמה. המקדם $a(k,l;i,j)$ מציין את אופן המשוב בין $C(i,j)$ לבין $C(k,l)$.

בכל אינטרוול זמן שהרשת הזו חיה יש סכום (משוקלל) של אותות שנכנס לכל תא (האותות הללו מופיעים בצורת זרם). האותות הם אותות משוב ושליטה שמגיעים מתאים אחרים ונוסף על כך ישנם גם אותות פנימיים שמגיעים מזרמים פנימיים ומושפעים מהקיבול C וההתנגדות R (שמצויים בתא). כל אלה משפיעים על משתנה המצב x_{ij} שמשוואתו הדיפרנציאלית מובאת להלן:

$$C \frac{dx_{ij}}{dt} = -\frac{1}{R} x_{ij} + \sum_k (a_k y_k + b_k u_k) + 1$$

k מציין את השכנים של תא מסויים.

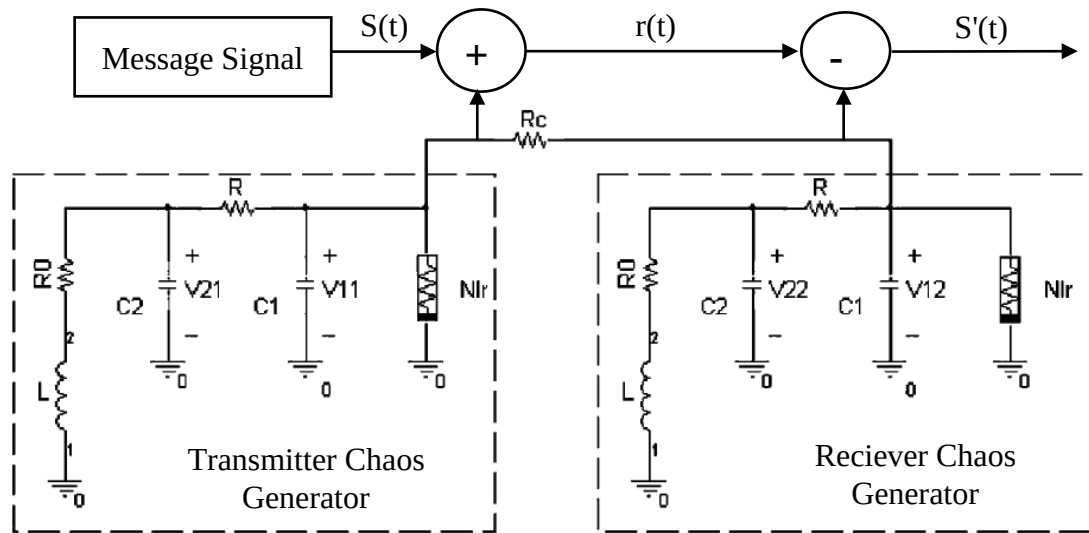
CNN נמצאים כיום בשימוש רחב בחומרה בפתוח מעבדי CNN בטכנולוגיות VLSI. גם תחום התוכנה כיום עשיר במודלים שמסמלצים מערכות כאלה ובונים איתם אפליקציות של בינה מלאכותית ועיבוד אותות. כמו כן, בשימוש שלושה תאים כאלה ניתן לבנות מתנד CHUA – כל תא הוא מערכת דינמית מסדר ראשון. יחד הם בונים מערכת דינמית מסדר שלישי – ממש כמו זאת עם הסליל שזנחנו כעת...

8. הצפנה וסנכרון בין מערכות כאוטיות:

אחד השימושים המשמעותיים של מתנד CHUA וכאוס בכלל הוא סנכרון בין מערכות כיאוטיות בעיקר לצרכי הצפנה. בשימוש זה מאפננים אות מידע ידוע בתוך גל נושא כאוטי. במצב זה אות המידע אינו ניתן לגילוי כיוון שאת האות הכאוטי אי אפשר "לנחש" או לחזות ללא ידע מוקדם לגבי המערכת הכאוטית שיצרה אותו. כאוס הוא ללא ספק המצב האידיאלי להצפנה כיוון שאי אפשר למצוא חוקיות בסיגנל המעוות ועדיין הסיגנל חסום ואינו מתבדר.

בהמשך לאותו אות מידע מאופנן כאוטית יש מקלט אשר יוכל לפענח את האות המקורי. המקלט יוכל לשחזר את האות המקורי אם ורק אם הוא בעצמו מערכת כאוטית זהה לזאת שבמשדר ומתואמת לה.

באיור הבא $S(t)$ זהו אות המקור, $r(t)$ הוא גל הנושא הכאוטי ו- $S'(t)$ זהו האות שנקלט ביעד.



איור 16א – מערכת לסינכרון כאוס ואפנון כאוטי

לצורך הבנת המערכת יש לדמיין שתי מערכות כאוטיות זהות שיכולות לעבוד בנפרד אם הנגד R_c גדול מאוד, ואז הקשר ביניהם שואף לנתק. או בסנכרון אם ערכו נמוך יותר. נפעיל את חוקי כירכהוף למציאת ששת המשוואות המשותפות.

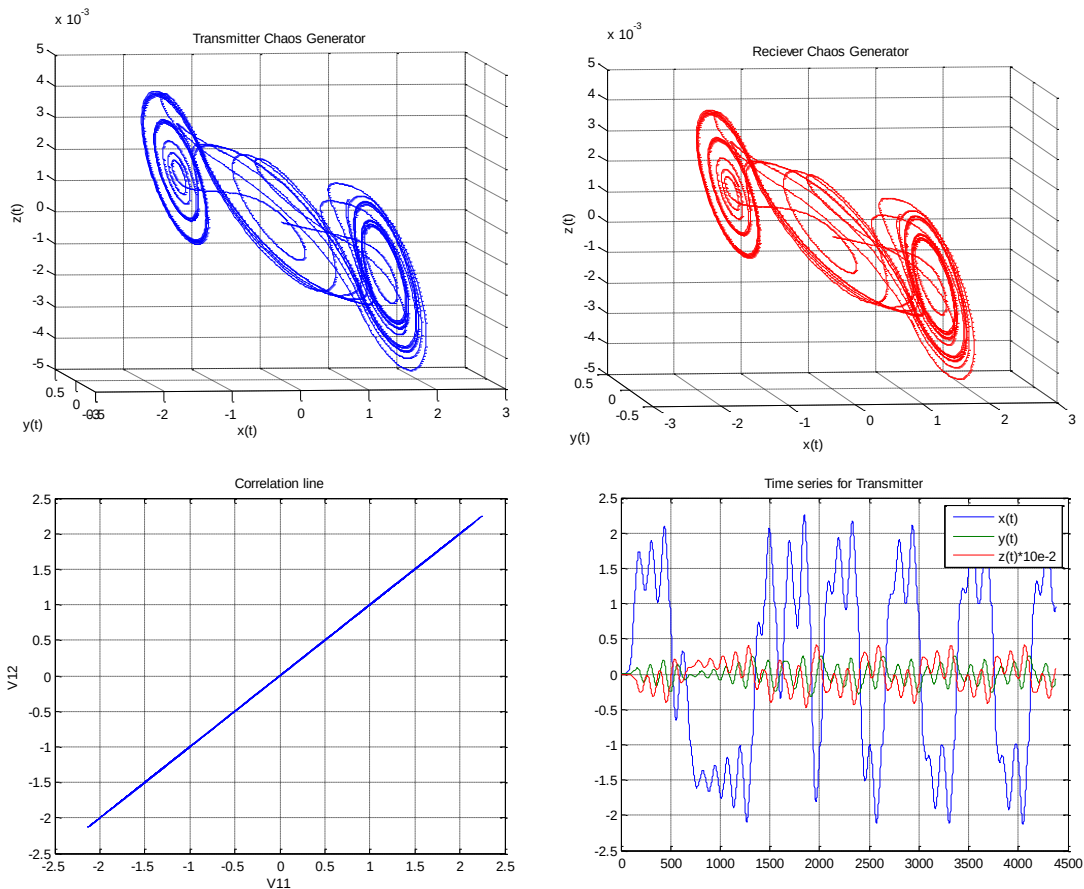
$$\begin{cases} \frac{dV_{11}}{dt} = \frac{1}{C_{11}} \left[(V_{21} - V_{11})G - f(V_{11}) + \frac{1}{R_c} (V_{12} - V_{11}) \right] \\ \frac{dV_{21}}{dt} = \frac{1}{C_{21}} [(V_{11} - V_{21})G + i_{31}] \\ \frac{di_{31}}{dt} = -\frac{1}{L} (V_{21} + R_0 i_{31}) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dV_{12}}{dt} = \frac{1}{C_{11}} \left[(V_{22} - V_{12})G - f(V_{12}) + \frac{1}{R_c} (V_{11} - V_{12}) \right] \\ \frac{dV_{22}}{dt} = \frac{1}{C_{21}} [(V_{12} - V_{22})G + i_{32}] \\ \frac{di_{32}}{dt} = -\frac{1}{L} (V_{22} + R_0 i_{32}) \end{cases}$$

R_c כאמור, מסנכרן בין שתי המערכות וזאת כמובן בתנאי שהן זהות לחלוטין. נביט בדוגמא שתמחיש את הסנכרון. נקבע בתחילה את ערכו של $R_c = 10K\ Ohm$ כדי שלא ישפיע על הסנכרון.

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 1nF, C_{12} = 1nF, C_{21} = 50nF, C_{22} = 50nF, R = 1K\ \Omega, \\
 L &= 0.463659975mH, R_0 = 0\ \Omega, G_a = -1.14286mS \\
 G_b &= -0.71429mS, E = 1, R_c = 10K\ \Omega, \\
 V_{11}(0) &= 0.000885432V, V_{21}(0) = 0.0405mV, i_{31}(0) = -0.000463001mA. \\
 V_{12}(0) &= 0.000885432V, V_{22}(0) = 0.0405mV, i_{32}(0) = -0.000463001mA.
 \end{aligned}$$

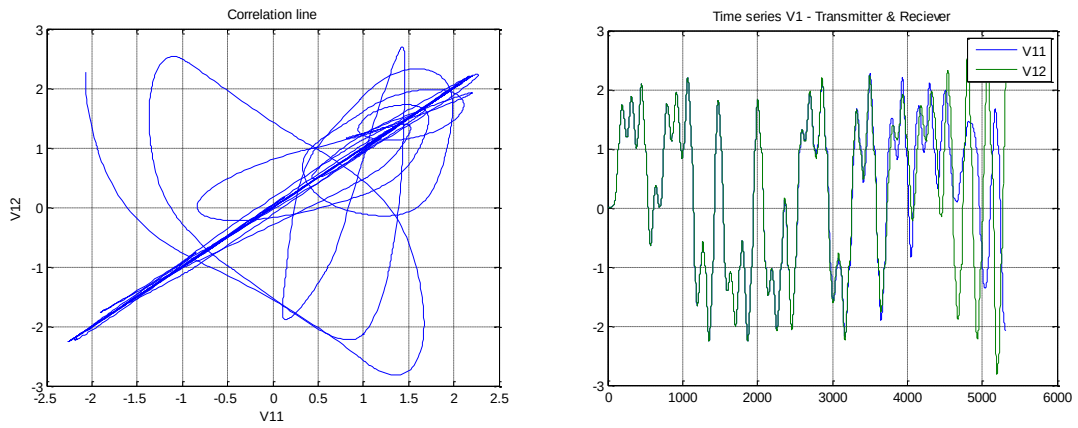
באיור הבא ניתן לראות את מצב ההתחלה שלנו, אין סינכרון ואין שוני בין המערכות.

כמו כן, מתווסף כאן גרף חדש בשם Correlation line אשר מציג את מידת ההתאמה בין V11 לבין V12. ככל שהקו דק יותר כך מידת ההתאמה רבה יותר. מספיק לבדוק את שני הסיגנלים הללו בשביל להסיק על סינכרון שתי המערכות.



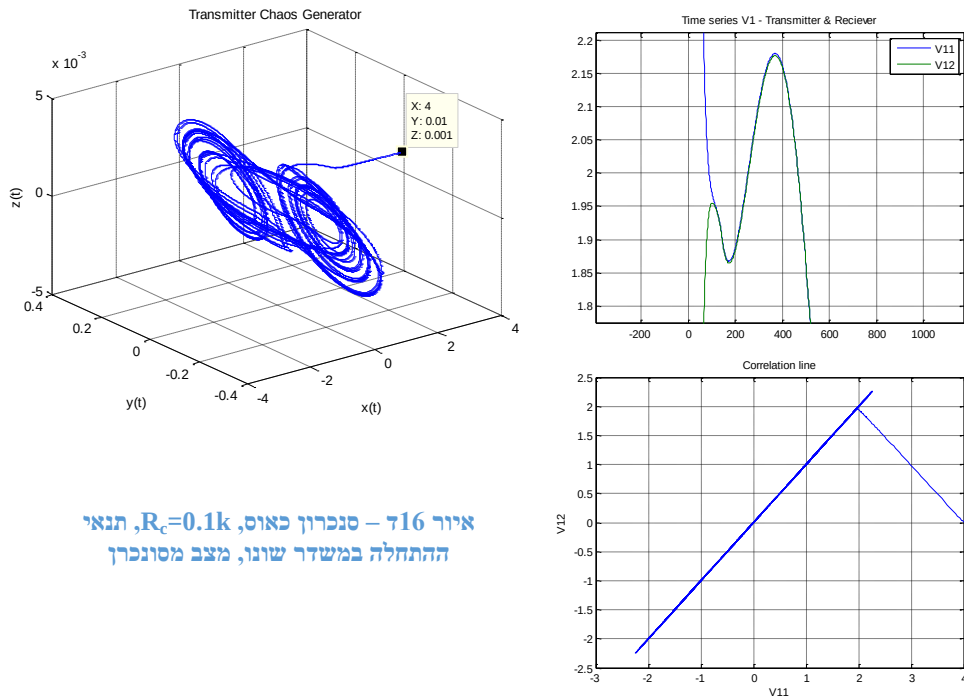
איור 16 – סינכרון כאוס, משדר ומקלט זהים $R_c=10K$

נשנה את תנאי ההתחלה $V_{11}(0) = 0.0005V$ (פשוט ללא הספרה האחרונה) ונווכח לראות יציאה מסנכרון:



איור 16 – סנכרון כאוס, $R_c=10K$, $V_{11}(0)$ שונה, מצב לא מסונכרן

כעת, נשנה את תנאי ההתחלה $I_{31}(0) = 1mA$, $V_{21}(0) = 0.1V$, $V_{11}(0) = 4V$ שינוי "אסטרונומי" ביחס לשינוי הקודם. אך הפעם נכניס את נגד הסינכרון לפעולה ונקבע $R_c = 100\ Ohm$. ניתן לראות את השינוי בדיאגרמת הפאזה של המשדר (מסומן בחץ) ולמרות זאת המשדר הסורר חוזר למסלולו ומסתנכרן עם המקלט.

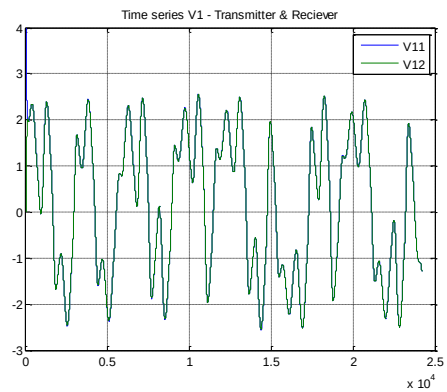
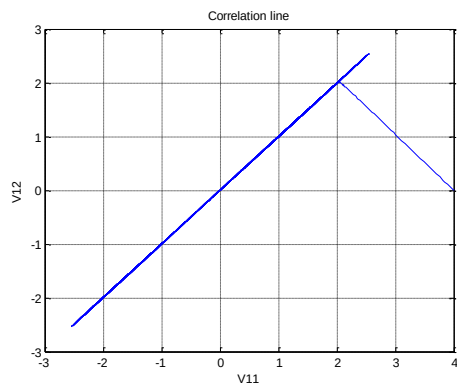
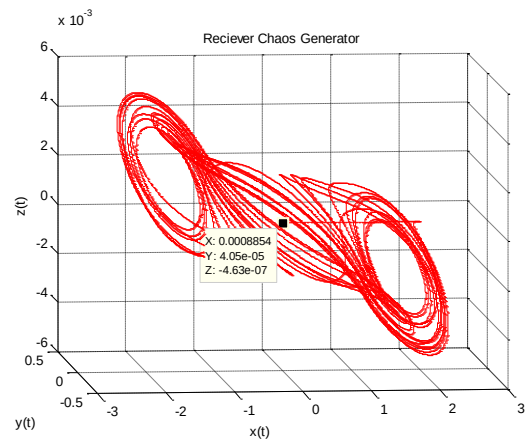
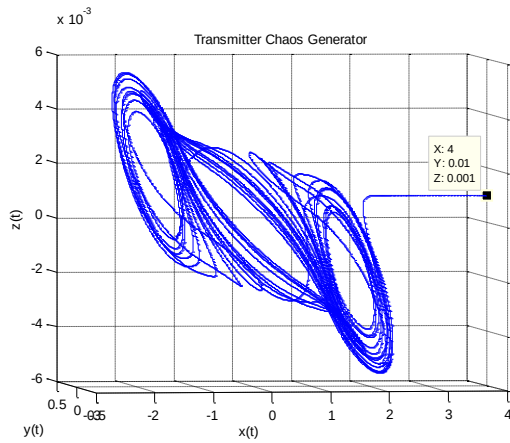


איור 17 – סנכרון כאוס, $R_c=0.1k$, תנאי ההתחלה במשדר שווה, מצב מסונכרן

במערכת פיזיקלית אמיתית יהיה קשה מאוד למצוא שני רכיבים באמת זהים ותכונותיהם הפיזיקליות עלולות להשתנות תוך כדי עבודתם כתלות בטמפרטורה למשל.

באיורים הבאים ניכר שינוי רב יותר, גם בתנאי ההתחלה וגם בחוסר דיוק הרכיבים הלינאריים וערכיהם הוסתו עד כדי 5%. להלן הפרמטרים ששנו

$$C_{11} = 1.05nF, C_{21} = 52.5nF, R_1 = 1.05K\ Ohm, R_c = 100\ Ohm, \\ V_{11}(0) = 4V, V_{21}(0) = 0.01mV, i_{31}(0) = 1mA$$



איור 16 – סנכרון כאוס, $R_c=0.1k$, תנאי ההתחלה והפרמטרים במשדר שווו, מצב מסונכרן

ניתן לראות כי הסנכרון נשמר גם במצב של שינוי קל בפרמטרים בין פרמטרי המערכת של המשדר ומקלט. כמו כן, שינויי הפרמטרים גרמו לשינוי צורת המערכת הדינמית – צורת האותות אינה זהה למערכת המקורית (בה המשדר והמקלט היו זהים).

9. סיכום ודיון:

לאון צ'ואה הוכיח במאמרו "Global unfolding of Chua's circuit" שהמעגל הפשוט שהוצג לעיל הוא מקרה ספציפי של משפחה הרבה יותר גדולה של מעגלים כאוטיים. למשל, ע"י הוספת נגד פשוט בטור לסליל במעגל CHUA אנו מקבלים מעגל שהוא מעגל דומה למשפחה בת 21 פרמטרים של פונקציות לינאריות למקוטעין (piecewise-linear) בעלות סימטריה אי זוגית. בפרט, כל שדה ווקטורי (שאינו אפס) השייך למשפחה זו, יכול לעבור טרנספורמציה לינארית לא סינגולרית, שתעביר אותו לצורת מעגל CHUA אשר נקבע בצורה ייחודית על ידי שבעה פרמטרים. תופעה זו נקראת "קיפול" – כל משוואה דיפרנציאלית המייצגת מערכת כאוטית מסדר שלישי (ומכילה פונקציה אי זוגית המחולקת לשלושה חלקים לינאריים) יכולה להיות ממופת למעגל זה. זאת כותרת מרעשה כיוון שנכסך כאן הצורך במחקר של מערכות כאוטיות רבות ונותרנו על מעגל קנוני אחד. ועל כן יש האומרים כי מתנד CHUA הוא ללא ספק מודל לכאוס ולייצוג תופעות מגוונות במערכות דינאמיות.

העניין במערכת הדינמית שיוצר מתנד CHUA גדל בקביעות. פרט למימושים שהוזכרו כאן, מומחים ממשיכים למצוא בו שימושים נוספים בתחומים שונים. הצורות הכיאוטיות שמתנד זה יוצר נמצאות בשימוש בתחומים רבים, אפילו במוזיקה ויצירת תמונות מרהיבות. כמו כן, יש שימוש נרחב במתנד זה לעיבוד אותות כגנרטור אותות כאוטיים וישנם גם יישומים של תהודה סטוכסטית (stochastic resonance) המשמשים להגברת אותות.

מתנד זה יוצר עניין רב גם במתמטיקה בנושא מחקרי שמייצג תופעות כאוטיות מגוונות ומושכים מוזרים בעלי גיאומטריה פנטסטית. ניתן לייצר את כל המערכות הכיאוטיות הידועות בעזרת שינוי הפרמטרים במתנד בודד. בנוסף, חקר מתמטי נרחב התפתח בכיוון החלפת הפונקציה הלינארית למקוטעין בפונקציה חלקה יותר – כמו הפונקציה הפולינומאלית, סינוסית והיפרבולית שראינו בפרוייקט זה.

מאמרים רבים הוצגו בדבר המושך החבוי במעגל צ'ואה. כמו כן יש רבים העוסקים במימדים פרקטליים של המושכים המוזרים אך קצרה היריעה מלהכיל את תכנם של אלפי מאמרים על מעגל אחד.

בפרוייקט זה היה לי העונג לחזור "לספסל הלימודים" ולשקוד על מחקרים מרתקים. השילוב בין מתמטיקה לאלקטרוניקה בפרוייקט זה הוא ייחודי כיוון שהפעם האלקטרוניקה היא זו ששימשה את המתמטיקה בביסוס תופעה אבסטרקטית כמו כאוס. כמו כן, כאמור, אני מגיע מתחום האלקטרוניקה וזהו באמת תחום שקרוב לליבי. מאוד נהנתי לגלות על דרכי ההצפנה בעזרת הכאוס ומידול תופעות מורכבות של פעולות הנורונים במוח באמצעות מתנד זה.

10. ביבליוגרפיה

ספרים:

1. World Scientific, Eleanora Bilotta, Pietro Pantano-A gallery of Chua attractors, 2008.
2. Leon O. Chua, Tamas Roska-Cellular neural networks and visual computing-Cambridge University Press, 2002.

מאמרים:

1. Global unfolding of chua's circuit, Leon O.CHUA, 1993
2. A universal Circuit for studing chaotic phenomena, Pivka Ladislav, 2004
3. Chaos synchronization in Chua's Circuit, Leon O.Chua, 1993.
4. Chua's Circuit sync, technische universiteit eindhoven, 2004.
5. On Chua Dynamical System cubic function, 2010
6. Chua Circuit, Scholarpedia.

אתרי אינטרנט:

1. Matlab Help - WWW.MATLAB.COM
2. Chua circuit at wikipedia - http://en.wikipedia.org/wiki/Chua_circuit
3. Leon chua site - <http://www.eecs.berkeley.edu/~chua/>
4. Chaos on the web http://crossgroup.caltech.edu/Chaos_Course/Outline.html

11.1. נספח 1 – פתרון בשיטה האיטרטיבית, רונגה קוטה מסדר 4 ו-5 ללא פונקציות ODE MATLAB.

מצורף מימוש אלגוריתם Runge-Kutta ב MATLAB. ודוגמא להרצת התוכנית אשר מלווה בדיאגרמת פאזה של הפתרון.

MATLAB Code:

```
% The Numerical method " Runge-Kutta of orders 4 and 5 "
f=inline(' [k*alpha*(x(2)-x(1)-(b*x(1)+0.5*(a-b)*(abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1))))];k*(x(1) - x(2)+ x(3));k*(-beta* x(2)-gamma* x(3))] ');
%insert parameters
x0=[0 0 0.2]'; %initial condition
col_num=2000; %k+1 is the number of columns of the solution matrix x
dt=0.01; %step size
error=10^(-3); %maximum error
order=4; %the order of method. four or five.
timelimit=3000; %maximum time allowed for the program to run.
dim=size(x0,1); %the dimension of the system
m=size(x0,2); %the number of initial condition
tmax = timelimit/4;
fprintf ('This program uses R-K of order %-2.0f\n',order)
fprintf ('start with the initial condition %2.2f %2.2f %2.2f\n',x0')
fprintf (' time t=0 to t=%-3.0f',col_num*dt)
fprintf (' with stepsize delta t=%2.12g\n',dt)
fprintf ('It will continue until error falls below %2.12g',error)
fprintf (' or time_limit %3.0f',timelimit)
fprintf (' seconds is exceeded\n\n\n')
for q=1:m
    x=zeros(dim,col_num+1);
    x(:,1)=x0(:,q);
    xprevious= repmat( inf,dim,col_num+1);
    ttt=0;
    e=inf;
    p=0;
    while ttt<tmax & e>error
        n=2^p;
        h=dt/n;
        ta=0;
        xa=x0(:,q);
```

```

t0=clock;
for j=1:n*col_num
    if order==4
        k1=h*f(xa);
        k2=h*f(xa+k1/2);
        k3=h*f(xa+k2/2);
        k4=h*f(xa+k3);
        xa=xa+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        ta=j*h;
    elseif order==5 k1=h*f(xa);
        k2=h*f(xa+k1/2);
        k3=h*f(xa+(3*k1+k2)/16);
        k4=h*f(xa+k3/2);
        k5=h*f(xa+(-3*k2+6*k3+9*k4)/16);
        k6=h*f(xa+(k1+4*k2+6*k3-12*k4+8*k5)/7);
        xa=xa+(7*k1+32*k3+12*k4+32*k5+7*k6)/90;
        ta=j*h;
    else fprintf('order must be 4 or 5\n')
    break
    end
    if mod(j,n)==0;
        i=j/n;
        x(:,i+1)=xa;
    end
end
e=max (max(abs(x-xprevious)));
xprevious=x;
fprintf('step size = dt/%-2.0f',2^p)
fprintf(' = %2.12g\n',h)
fprintf('estimated error < %2.12g\n',e)
ttt=etime(clock,t0);
fprintf('time in seconds = %2.1f\n\n',ttt)
if e<error
    fprintf('ERROR LIMIT SATISFIED\n\n')
elseif ttt>tmax
    fprintf('TIME LIMIT EXCEEDED\n\n')
end
p=p+1;
end
fsize=15;
figure

```

```

    plot3(x(1,:),x(2,:),x(3,:));title('Original f
function');xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');grid
end

figure;
plot(x(1,:));
hold all
plot(x(2,:));
hold all
plot(x(3,:));legend('x(t)','y(t)','z(t)');title('Time series');
grid

```

דוגמא להרצת התוכנית עם הפרמטרים

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 9.1, \beta = 14.7903198054, \gamma = 0.0160739469; \\
 a &= -1.1384111956, b = -0.7224511209, k = 1; \\
 x(0) &= 0, y(0) = 0, z(0) = 0.2
 \end{aligned}$$

This program uses R-K of order 4

start with the initial condition 0.00 0.00 0.20

time t=0 to t=20 with stepsize delta t=0.01

It will continue until error falls below 0.001 or time_limit 3000 seconds is exceeded

step size = dt/1 = 0.01

estimated error < Inf

time in seconds = 3.5

step size = dt/2 = 0.005

estimated error < 0.00105452582235

time in seconds = 6.9

step size = dt/4 = 0.0025

estimated error < 0.00101011464799

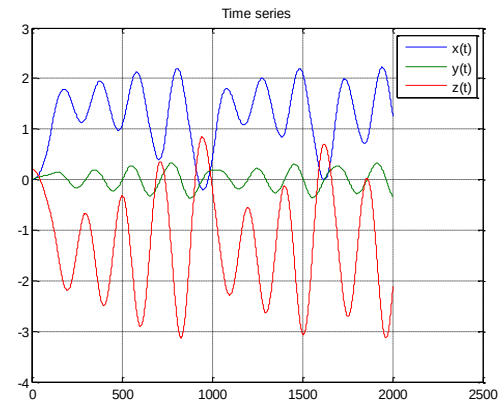
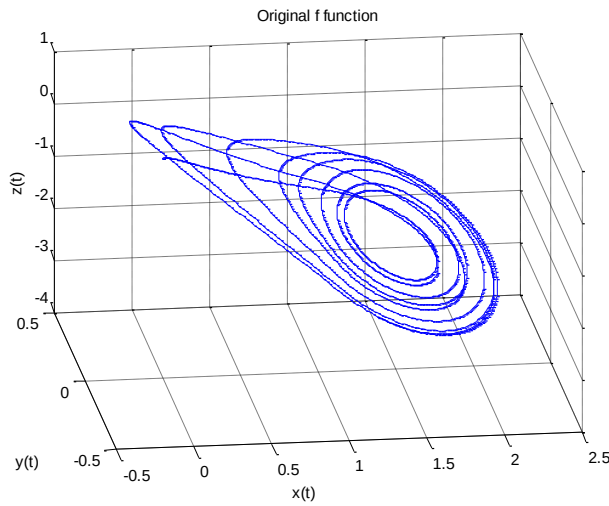
time in seconds = 13.8

step size = dt/8 = 0.00125

estimated error < 0.00053596520172

time in seconds = 27.6

ERROR LIMIT SATISFIED



11.2. נספח 2 – המערכת הפיזיקלית:

מצורף ניסוי השוואה בין פתרון המודל המתמטי של מתנד CHUA בפונקציית MATLAB ופתרון אותה מערכת ע"י סימולציה ריאלית בתוכנת PSPICE.

הערה: R111 ו-L1 ב PSPICE הם R ו-L בסימולציה המתמטית, בהתאמה.

Matlab code:

```
function out = RealChua_Pspice(t,in)
x = in(1); %v_1
y = in(2); %v_2
z = in(3); %i_L
C1 = 10*10^(-9); %10nF
C2 = 100*10^(-9); %100nF
R = 1800; %1.8k Ohms
G = 1/R;
L = 18*10^(-3);
%Chua Diode*****
R1 = 220;
R2 = 220;
R3 = 2200;
R4 = 22000;
R5 = 22000;
R6 = 3300;

Esat = 9; %9V batteries
E1 = R3/(R2+R3)*Esat;
E2 = R6/(R5+R6)*Esat;

m12 = -1/R6;
m02 = 1/R4;
m01 = 1/R1;
m11 = -1/R3;

m1 = m12+m11;

if (E1>E2)
m0 = m11 + m02;
else
m0 = m12 + m01;
end
mm1 = m01 + m02;
Emax = max([E1 E2]);
```

```

Emin = min([E1 E2]);
if abs(x) < Emin
    g = x*m1;
elseif abs(x) < Emax
    g = x*m0;
    if x > 0
        g = g + Emin*(m1-m0);
    else
        g = g + Emin*(m0-m1);
    end
elseif abs(x) >= Emax
    g = x*mm1;
    if x > 0
        g = g + Emax*(m0-mm1) + Emin*(m1-m0);
    else
        g = g + Emax*(mm1-m0) + Emin*(m0-m1);
    end
end
end
%end Chua Diode*****

% Chua's Circuit Equations
xdot = (1/C1)*(G*(y-x)-g);
ydot = (1/C2)*(G*(x-y)+z);
zdot = -(1/L)*y;

out = [xdot ydot zdot]'

```

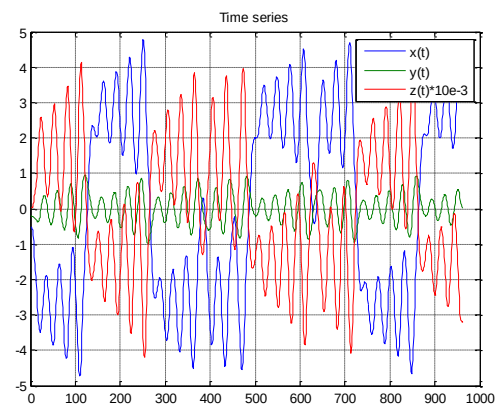
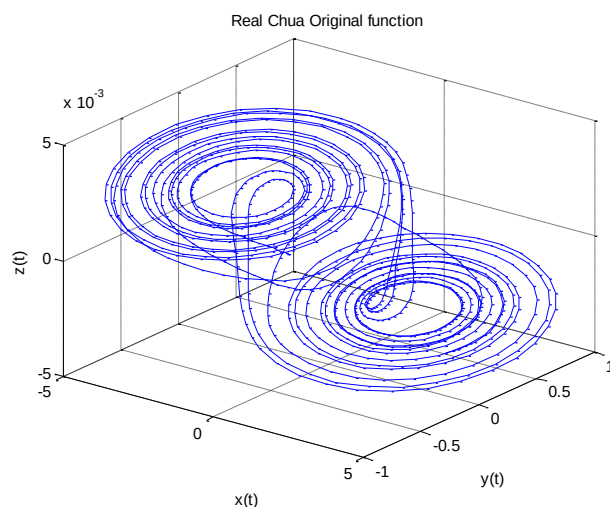
קריאה לפונקציה:

```

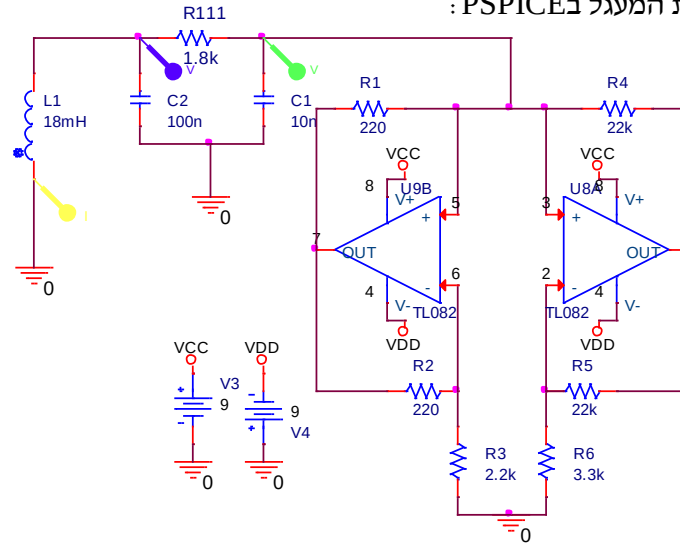
[[t,y] = ode45(@RealChua_Pspice,[0 0.01],[-0.5 -0.2 0]);
figure;
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));title('Real Chua Original function');
xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');grid
figure;
plot(y(:,1));
hold all
plot(y(:,2));
hold all
plot(1000*y(:,3));legend('x(t)','y(t)','z(t)*10e-3');title('Time
series');
grid

```

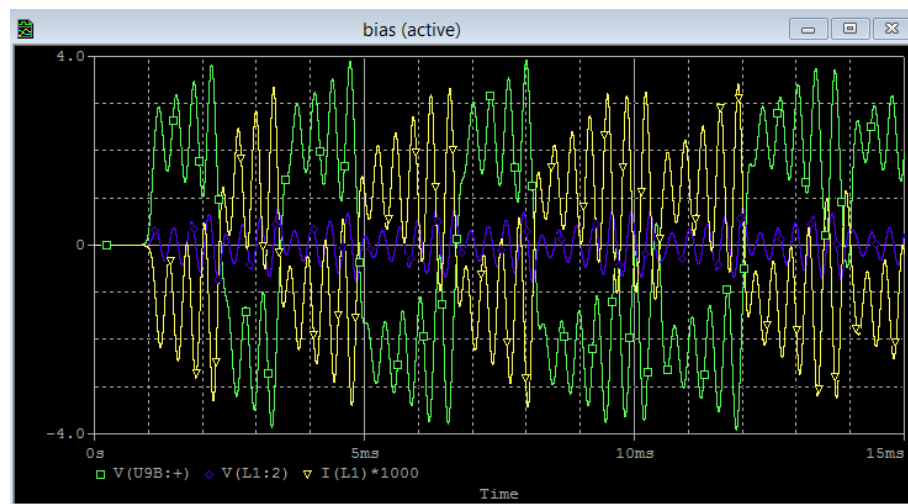
תוצאות הקריאה:



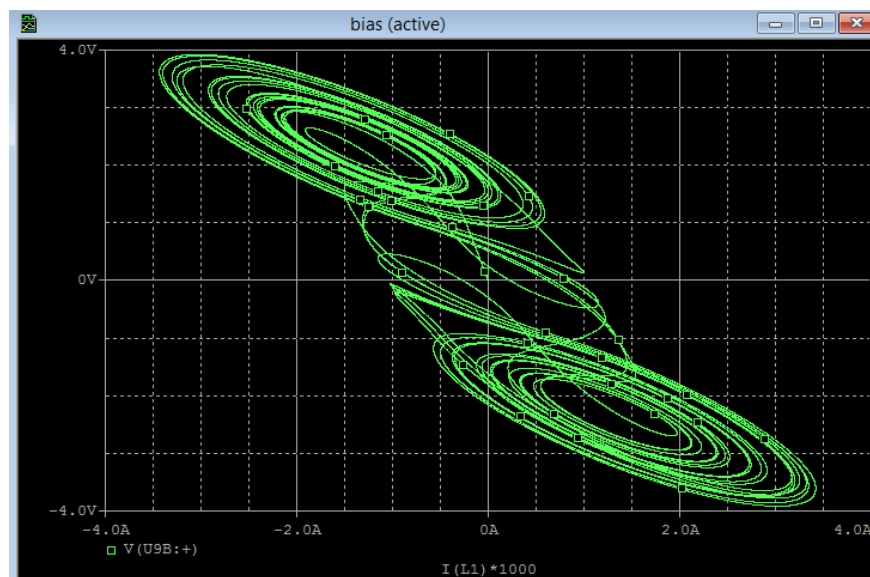
להלן סכימת המעגל בPSPICE:



תוצאות ריצת הסימולציה עד 15ms:



ואם נחליף את ציר הזמן באות הזרם I ואת V1 נשאיר בציר ה-Y נקבל דיאגרמת פאזה עם שני מושכים כאוטיים DOUBLE SCROLL.



Main Function

```
[t,y] = ode45(@Chua_cubic,[0 80],[0, 0.3, 0.5],odeset('reltol',
1e-6, 'abstol', 1e-9));
%function name - choose function f - Real, Original,... Cubic Etc.
figure;
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));title('function name');
xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');grid
figure;
plot(y(:,1));
hold all
plot(y(:,2));
hold all
plot(y(:,3));legend('x(t)','y(t)','z(t)');title('Time series');
grid
```

Dimensionless original Function

```
function out = Chua(t,in)
x = in(1);
y = in(2);
z = in(3);
alpha = -1.0837792952;
beta = 0.0000969088;
gamma = 0.0073276247;
a = -0.0941189549;
b = 0.001;
k = -1;
f_x = b*x + 0.5*(a-b)*(abs(x+1)-abs(x-1));
xdot = k*alpha*(y-x-f_x);
ydot = k*(x - y + z);
zdot = k*(-beta*y-gamma*z);
out = [xdot ydot zdot]';
```

Physical function

```
function out = RealChua(t,in)
v_1 = in(1);
v_2 = in(2);
i_3 = in(3);
C1 = -0.0143*10^(-9);
C2 = 10*10^(-9);
R = 1*10^3;
G = 1/R;
Rz = -100;
L = 0.3*10^(-3);
E = 1;
Gb = -2.4*10^(-3);
Ga = -0.98*10^(-3);
f_v_1 = Gb*v_1 + 0.5*(Ga-Gb)*(abs(v_1+E)-abs(v_1-E));
% Chua's Circuit Equations
xdot = (1/C1)*(G*(v_2-v_1)-f_v_1);
ydot = (1/C2)*(G*(v_1-v_2)+i_3);
zdot = -(1/L)*(v_2+Rz*i_3);
out = [xdot ydot zdot]';
```


Cubic function:

```
function out = Chua_cubic(t,in)
x = in(1);
y = in(2);
z = in(3);
alpha =3.5;
beta =24.07997058;
gamma=-0.859255678;
h1 =-2.9315446532;
h3 = 0.4530092443;
k=1;
f_x=h1*x+h3*x^3;
xdot = k*alpha*(y-x-f_x);
ydot = k*(x - y+ z);
zdot = k*(-beta*y-gamma*z);
out = [xdot ydot zdot]';
```

sine function:

```
function out = Chua_sine(t,in)
x = in(1);
y = in(2);
z = in(3);
alpha =10.814;
beta = 14;
gamma= 0;
a = 2.1;
b = 0.11;
c=2;
k=1;
d=pi;
if x>= 2*a*c
f_x = ((b*pi)/(2*a))*(x-2*a*c);
else if x <= -2*a*c
f_x = ((b*pi)/(2*a))*(x+2*a*c);
else f_x = -b*sin((pi*x)/(2*a)+d);
end
end
xdot = k*alpha*(y-f_x);
ydot = k*(x - y+ z);
zdot = k*(-beta*y-gamma*z);
out = [xdot ydot zdot]';
```

hype function:

```
function out = Chua_hype(t,in)
x = in(1);
y = in(2);
z = in(3);
a=0.2973;
M=5;
N=3;
K=2;
j=-N:1:M;
f_x=sum((-1).^(j-1)).*tanh(K*(x-2*j));
xdot = y;
ydot = z;
zdot = -a*(y+z)-a*f_x;
out = [xdot ydot zdot]';
```

sync_chua

```
function out = Sync_Chua(t,in)
v_11 = in(1);
v_21 = in(2);
i_31 = in(3);
v_12 = in(4);
v_22 = in(5);
i_32 = in(6);
C11 = 1.05*10^(-9);
C12 = 1*10^(-9);
C21 = 52.5*10^(-9);
C22 = 50*10^(-9);
R1 = 1.05*10^3;
G1 = 1/R1;
R2 = 1*10^3;
G2 = 1/R2;
%G=1*10^(-3);
Ga = -1.14286*10^(-3);
Gb = -0.71429*10^(-3);
Rz=0;
L=0.463659975*10^(-3);
E=1;
Rc=1*10^(2);
f_v_11 = Gb*v_11+0.5*(Ga-Gb)*(abs(v_11+E)-abs(v_11-E));
f_v_12 = Gb*v_12+0.5*(Ga-Gb)*(abs(v_12+E)-abs(v_12-E));
% Chua's Circuit Equations
v_11_dot = (1/C11)*(G1*(v_21-v_11)-f_v_11+(1/Rc)*(v_12-v_11));
v_21_dot = (1/C21)*(G1*(v_11-v_21)+i_31);
i_31_dot = -(1/L)*(v_21+Rz*i_31);
v_12_dot = (1/C12)*(G2*(v_22-v_12)-f_v_12+(1/Rc)*(v_11-v_12));
v_22_dot = (1/C22)*(G2*(v_12-v_22)+i_32);
i_32_dot = -(1/L)*(v_22+Rz*i_32);
out = [v_11_dot v_21_dot i_31_dot v_12_dot v_22_dot i_32_dot]';
```

Call Sync_Chua function

```
[t,y] = ode45(@Sync_Chua,[0 0.0005],[4, 0.01, 0.001,0.000885432,
0.0405*10^(-3), (-0.000463001)*10^(-3)],odeset('reltol', 1e-6,
'abstol', 1e-9));
figure;
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3));title('Transmitter Chaos
Generator');xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');grid
figure;
plot3(y(:,4),y(:,5),y(:,6),'r');title('Reciever Chaos
Generator');xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');grid

figure;
plot(y(:,1));
hold all
plot(y(:,4));legend('V11','V12');title('Time series V1 - Transmitter
& Reciever');
grid
figure;
plot(y(:,1),y(:,4)); xlabel('V11');ylabel('V12');title('Correlation
line');grid
plot(y(:,1),y(:,4)); xlabel('V11');ylabel('V12');title('Correlation
line');grid
```