



המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (SC . B)
במתמטיקה שימושית

כאוס במודל מטריציוני BMN

שירה חדד

Chaos in the BMN matrix model

Shira Hadad

Advisor:

Dr. Victor Ostrovski

מנחה:

ד"ר ויקטור אוסטרובסקי

Karmiel

כרמיאל

2019

תקציר

הפרויקט בוצע במסגרת פרויקט גמר במחלקה למתמטיקה שימושית במכללת אורט בראודה. בעבודתי חקרתי מודל מטריצוני, המתאר תנועה של מיתר, עם התנהגות כאוטית, או ליתר דיוק מערכת דינמית בעלת אופי כאוטי במרחב לא קומוטטיבי המתאר משטח מינימלי של תנועת מיתר.

המודל אותו חקרתי נוגע בתחומים מגוונים במתמטיקה. כדי להבין את המודל התחלתי את העבודה בסקירה של הנושאים הרלוונטים להבנת המודל, ואחר כך הצגתי את המודל עצמו.

ברצוני להודות לד"ר ויקטור אוסטרובסקי על היעוץ התמיכה העזרה והעידוד ברגעי משבר במהלך כתיבת העבודה, תודה רבה.

תוכן עניינים

1.....	תקציר
3.....	1. מערכות דינאמיות
4.....	2. כאוס
4.....	2.1 היסטוריה
6.....	2.3 המפה הלוגיסטית
7.....	2.4 נקודת שבת
11.....	2.5 מושך
11.....	2.6 מושך מוזר
12.....	2.7 מפת פואנקרה Poincar`e section
13.....	3. מרחבים לא קמוטטיבים
13.....	3.1 מערכות דינמיות במרחבים לא קמוטטיביים
14.....	4. פעולה (action)
15.....	4.2 משטחים מינימליים
18.....	הנוסחה שפתחנו זו תנועה של אחד האיברים שיופיע בפעולה של מיתר
19.....	5. תיאוריית קלוצה קליין (Kaluza-Klein)
19.....	5.1 הרעיון הכללי
19.....	5.2 השערת קלוצה
19.....	5.3 משוואות שדה
21.....	6. מודל מטריצות BMN
22.....	6.1 מודל מטריצות 2X2
31.....	6.2 מודל מטריצות 4X4
40.....	7. סיכום ומסקנות
41.....	נספח
43.....	רשימת איורים
44.....	ביבליוגרפיה

1. מערכות דינאמיות

אחת המטרות של המדע היא לדעת לחזות כיצד יתפתח מערכות ככל שיתקדמו בזמן.

חיזוי זה נעשה בעזרת מערכות דינמיות

מערכת דינמית היא מערכת שבה פונקציה מתארת התקדמות של נקודה במרחב גאומטרי עם הזמן.

דוגמאות למערכות דינמיות כוללות מודלים מתמטיים המתארים תנודות של מטוטלת שעון, זרימת

מים בצינור, וגודל אוכלוסיה במדינה מסויימת.

מערכות דינמיות מיוצגות כפונקציות דיפרנציאליות הנגזרות לפי הזמן, על מנת לחזות התנהגות

עתידית של המערכת משתמשים בפתרון אנליטי, נומרי או הדמית מחשב.

ישנם סוגים שונים של מערכות דינאמיות, מערכות לינאריות, דיסקרטיות, סטוכסטיות ועוד' .

מערכת דינמית לא-ליניארית יכולה באופן כללי להתנהג באחד או יותר מהאופנים הבאים:

- להיות תמיד במנוחה
- לגדול באופן אינסופי (במערכות לא חסומות)
- להיות בתנועה מחזורית
- להיות בתנועה מחזורית-למחצה
- להיות בתנועה כאוטית

סוג ההתנהגות של המערכת תלוי במצב ההתחלתי שלה ובערכי הפרמטרים שלה. סוג ההתנהגות

הקשה ביותר לחיזוי ולאפיון הוא הכאוטי בעל תנועה מורכבת לא-מחזורית. בעבודתי אחקור מערכת

דינאמית בעלת תנועה כאוטית

2. כאוס

2.1 היסטוריה

תאוריית הכאוס התחילה להיחקר בשנת 1900 בערך, על ידי אנרי פואנקרה במחקריו על בעיית שלושת הגופים. הבעיה עוסקת בתנועה של שלושה גופים בחלל, בהשפעת כוח הכבידה. פואנקרה גילה לפעמים נוצרים מסלולים לא-מחזוריים, שאינם שואפים לנקודה קבועה. מחקרים מאוחרים יותר, גם בנושא של משוואות דיפרנציאליות לא ליניאריות, נעשו על ידי בירקהוף, קולמוגורוב, קרטוויט, וליטלווד שכולם היו פיזיקאים שמצאו כאוס במחקרם. חוץ מסטפן סמייל שהיה אולי המתמטיקאי הראשון שחקר את הדינמיקה הלא ליניארית.

תאוריית הכאוס התקדמה מהר יותר לאחר אמצע המאה, כאשר מדענים החלו להבין שתורת המערכות הליניאריות, לא יכולה להסביר את התנהגותם של ניסויים מסוימים, הזירוז העיקרי להתפתחות תאוריית הכאוס היה המחשב. חלק גדול מהמתמטיקה של תאוריית הכאוס כוללת ביצוע של נוסחאות מתמטיות פשוטות פעמים רבות, דבר שהיה מסובך מאוד ללא המחשב.

אדוארד לורנץ היה מתמטיקאי משמעותי בחקר תורת הכאוס, התעניינותו של לורנץ בכאוס באה במקרה דרך מחקריו על חיזוי מזג אוויר ב-1961. לורנץ השתמש במחשב בסיסי שעליו הריץ את הסימולציה האקלימית שלו. הוא רצה לראות שוב כמה נתונים שראה קודם, ועל מנת לחסוך זמן הוא הזין את הנתונים שהתקבלו באמצע סימולציה קודמת. להפתעתו, המחשב חזה כעת מזג אוויר שונה לחלוטין. לורנץ הבין שהשינוי נובע מכך שהנתונים החדשים שהשתמש בהם היו בעלי 3 ספרות לאחר הנקודה, ואילו המחשב קודם לכן עבד עם 5 ספרות לאחר הנקודה. השינוי הקטן מאד השפיע מאוד על המערכת. וכך לורנץ גילה ששינויים קטנים בתנאים ההתחלתיים יכולים להביא לשינויים גדולים בסופו של דבר.

כאוס הוא ענף במתמטיקה הנפרס על תחומים רבים כמו פיזיקה, כימיה כלכלה ביולוגיה ואפילו אומנות ופילוסופיה.

תורת הכאוס עוסקת בהתנהגותן של מערכות דינאמיות בעלות רגישות גבוהה לתנאי התחלה, כלומר שינויים קלים בתנאי ההתחלה עלולים לגרום לשינויים קיצוניים במערכות אלו

התנהגות כאוטית, בניגוד למה שהשם מרמז, היא לא דווקא התנהגות בעלת אי סדר מוחלט. התנהגות כאוטית היא התנהגות חסומה. כלומר, היא מוגבלת לאירועים מסוימים, והמערכת שואפת למושך – אוסף יציב של מצבים. עד פיתוח תורת הכאוס המושכים היחידים הידועים היו התכנסות לנקודת שיווי משקל, התכנסות למסלול מחזורי, והתכנסות למסלול כמעט מחזורי. תורת הכאוס הוסיפה גם מושך מוזר, שהוא מסלול שהמערכת מתכנסת אליו, ובעל אופי פרקטלי.

מערכות שבהן מתקיימת התנהגות כאוטית חייבות להיות לא ליניאריות. עבור משוואות הפרש התנהגות כאוטית יכולה להופיע כבר במשוואה יחידה, כמו ההעתקה הלוגיסטית. עבור משוואות

דיפרנציאליות רגילות התנהגות כאוטית יכולה להופיע רק ממערכת בת לפחות שלוש משוואות מסדר ראשון, כמו משוואות לורנץ, או מערכת של שתי משוואות עם תלות ישירה בזמן.

נראה דוגמא למערכת דינמית דיסקרטית מפורסמת המקבלת גם מקרים של כאוס

2.3 המפה הלוגיסטית

המשוואה הלוגיסטית היא אחת המערכות הדינמיות המוכרת ביותר המייצגת כאוס. המשוואה לוגיסטית היא משוואה דיסקרטית רקורסיבית המאפשרת קבלת סדרת מספרים בתלות בתנאי ההתחלה, ובתלות הפרמטר המאפיין אותה (r).

המשוואה הלוגיסטית מתארת את קצב גידולה של אוכלוסייה מסויימת לאורך זמן.

המודל הוא דיסקרטי מתוך הנחה שילודה ותמותה אינם קורים בזמן רציף.

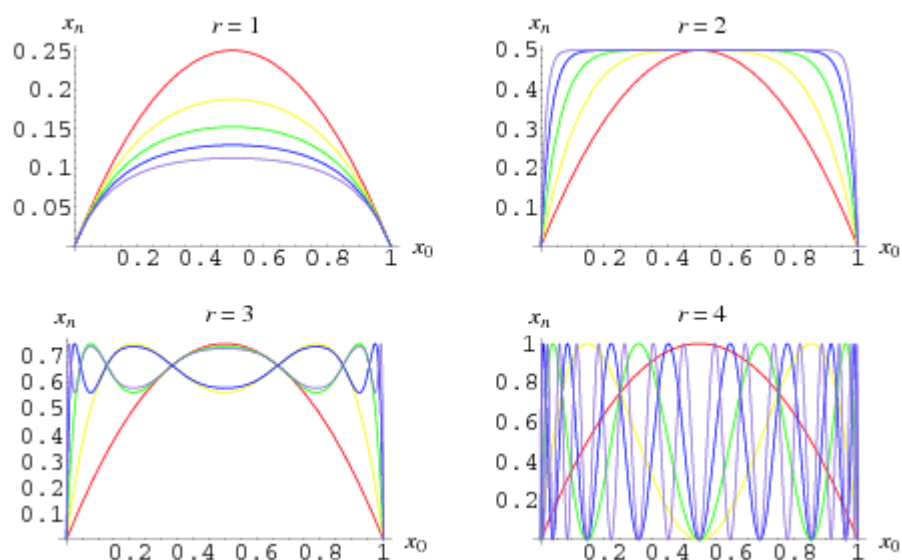
$$x_{n+1} = (1 + r)x_n + rx_n^2$$

כאשר: קצב הילודה-קצב התמותה r

הצגת ערכי הסדרה מייצגת את צורת ה"גל" המתקבלת במערכת. עבור ערכים קטנים של הפרמטר r , $r < 3$ ערכי הסדרה מתייצבים סביב ערך קבוע.

עבור ערכי הפרמטר r הגדולים מ-3.56 לערך, נקבל מצב כאוטי.

איור 1



בתמונה רואים פתרון של המשוואה עבור ערך התחלתי X_0 דרך 5 איטרציות כאשר האיטרציה הראשונה היא אדומה, 2 צהובה, 3 ירוקה, 4 כחולה, 5 סגולה. עבור ערכי r שונים.

2.4 נקודת שבת

נקודת שבת של פונקציה היא נקודה בתחום הגדרתה אשר תמונתה היא הנקודה עצמה. כלומר ז

$$f(x_*) = x_*$$

יציבות של נקודת שבת:

1. לנע בחזרה לנקודת השבת (נקודה יציבה) אם משתנה שונה מעט מנקות השבת הוא עשוי
2. להתרחק ממנה (נקודה לא יציבה) 3. להתקרב אל נקודת השבת אך לא להגיע אליה (נקודה יציבה, אך לא יציבה אסימפטוטית).

כדי לבדוק יציבות של נקודת שבת במערכת חד ממדית דסקרטית נגדיר

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

אם קיימת נקודת שבת $x = x^*$ אז כאשר $x_n = x^*$ גם $x_{n+1} = x^*$

נניח ש: $x_n = x^* + \delta_n$ כך ש $|\delta_n| \ll 1$ אז: $x_{n+1} = x^* + \delta_{n+1}$ ונקבל

$$x^* + \delta_{n+1} = m(x_n + \delta_n)$$

δ_n היא הסטיה של x_n מ x^*

נבצע ליניאריזציה של המשוואה

$$x^* + \delta_{n+1} = m(x^*) + \left. \frac{dm(x)}{dx} \right|_{\delta_n, x=x^*} \delta_n$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n \cdot \left. \frac{dm(x)}{dx} \right|$$

$$\delta_{n+1} = \delta_n \cdot \lambda$$

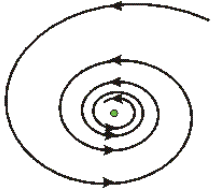
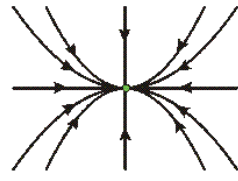
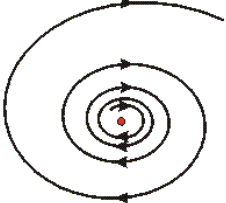
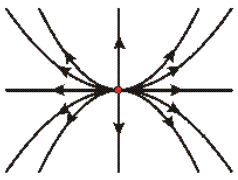
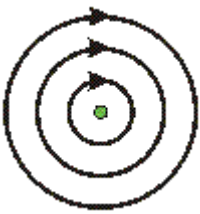
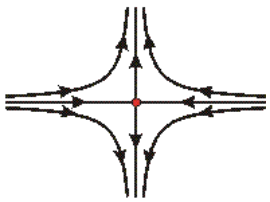
λ- נקרא מקדם היציבות

$$|\delta_{n+1}| = |\lambda| \cdot |\delta_n|$$

נבחין בין שלוש מקרים

1. $|\lambda| < 1 \leftarrow |\delta_{n+1}| < |\delta_n|$ תהליך האיטרציות יציב
2. $|\lambda| > 1 \leftarrow |\delta_{n+1}| > |\delta_n|$ תהליך האיטרציות בלתי יציבות
3. $|\lambda| = 1 \leftarrow |\delta_{n+1}| = |\delta_n|$

באופן כללי, במערכת רב ממדית רציפה ניתן לסווג נקודת שבת באמצעות ניתוח לינארי

 $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta$ ספירלה יציבה ראשית הצירים מוקד מושך	 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ צומת יציב
 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ספירלה לא יציבה ראשית הצירים מוקד דוחה	 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ צומת לא יציב
 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ מעגלים סגורים סביב ראשית הצירים והיא נקראת מרכז	 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ אוקף

דוגמא ליציבות של מערכת דינאמית :

המודל של Duffing

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) + g(z) \\ \dot{z} = \omega \end{cases}$$

ω -קבוע

$$g(z) = B \cos(z) \text{ ו } f(x, y) = -(ax + bx^3 + cy)$$

כאשר a, b, c, B הם קבועים ממשיים

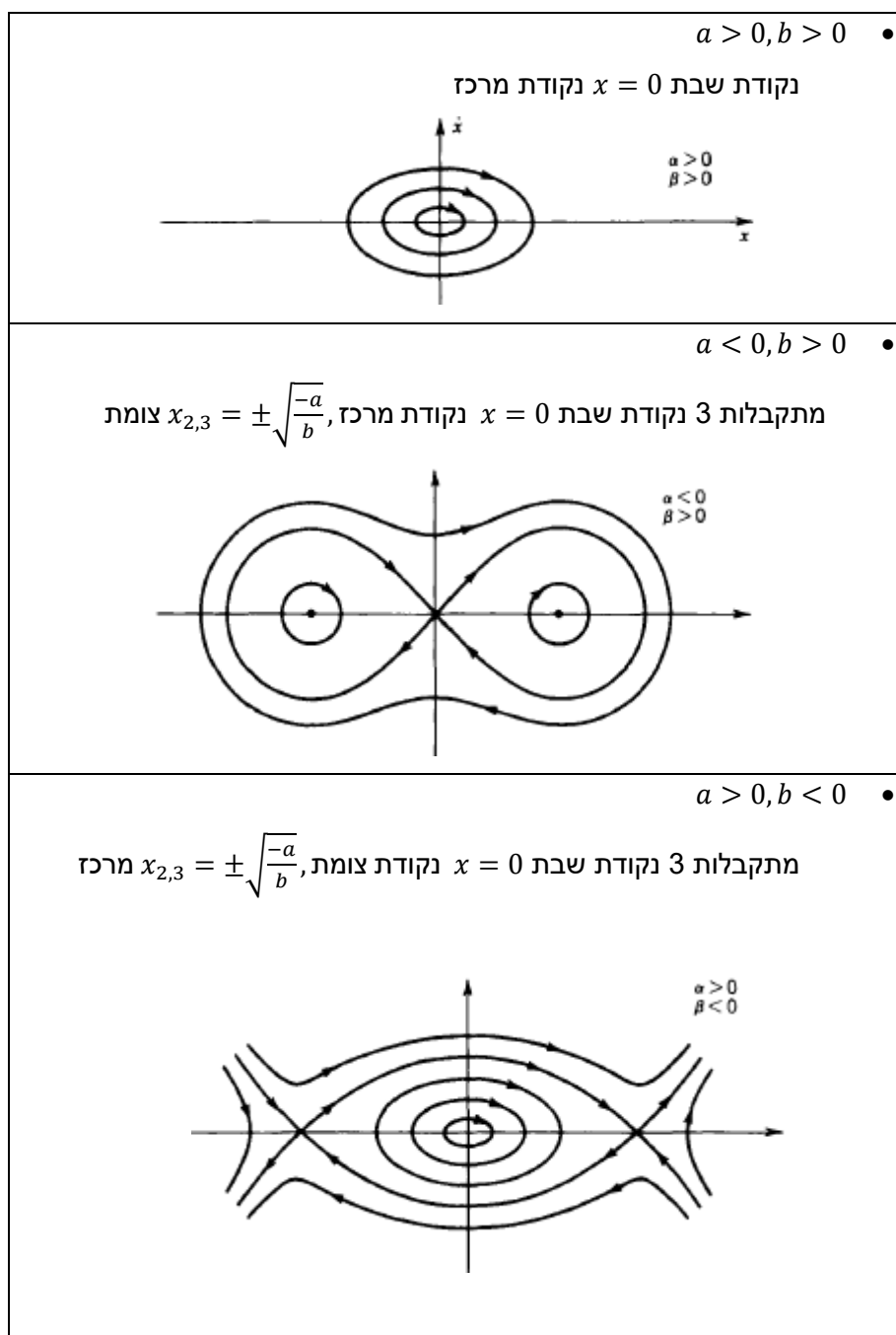
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - bx^3 - cy + B \cos(\omega t) \end{cases} \text{ נקבל}$$

נניח כי $c=0, B=0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ax - bx^3 \end{cases}$$

נמצא נקודת שבת

$$\begin{cases} y = 0 \\ -ax - bx^3 = 0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$



2.5 מושך

בדיאגרמת פאזה של התנועה ניתן לראות תנועה כאוטית, כל אחד מצירי גרף הפונקציה מייצג ממד אחד של המצב, והזמן אינו מיוצג בו. לדוגמה, אפשר לצייר את המיקום של מטוטלת כנגד המהירות שלה. מטוטלת במנוחה תצויר כנקודה, בעוד שמטוטלת בתנועה מחזורית תצויר כעקומה סגורה פשוטה. כאשר ציור כזה יוצר עקומה סגורה, העקומה קרויה מסלול. למטוטלת שבדוגמה כאן ישנו מספר אינסופי של מסלולים כאלה, הנבדלים זה מזה באנרגיה שלהם.

לעיתים קרובות, דיאגרמות פאזה מראות כי רוב המצבים מתקרבים לגבול מסוים. המערכת בסופו של דבר נעה באותה צורה עבור כל התנאים ההתחלתיים בתחום מסוים, כמעט כאילו המערכת נמשכת לתנועה הזו. תנועה "מושכת" כזו קרויה המושך של המערכת, והיא נפוצה מאד. במערכות פשוטות לניתוח, המושך הוא לרוב נקודתי. אבל ישנן גם לולאות פשוטות, או לולאות כפולות מורכבות יותר. ויש כאלה שהן למעשה פרקטלים: ה"מושכים המוזרים". מערכות עם מושכים לולאתיים מציגים תנועה מחזורית. אלה עם הלולאות המורכבות יותר מציגים לרוב תנועה מחזורית-למחצה. ומערכות עם "מושכים מוזרים" מציגים התנהגות כאוטית.

2.6 מושך מוזר

מושכים מוזרים קיימים במערכות דינמיות רציפות (כמו מערכת לורנץ) ובמערכות דיסקרטיות, בדידות (כמו מפת הנון) הם מייצגים התנהגות כאוטית ובעלי מבנה פרקטלי.

מושך נקרא מוזר אם הוא מקיים את המאפיינים הבאים:

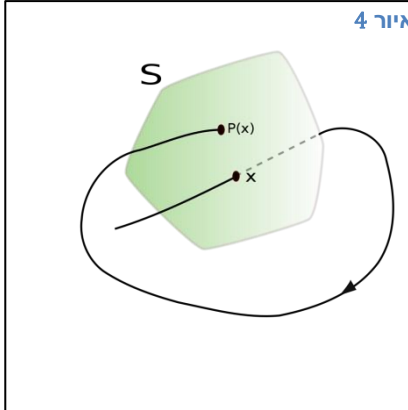
- הוא מושך, כלומר בעל תחום חסום במרחב פאזה שאליו נמשכים מסלולים השייכים לתחום המשיכה.
- רגיש לתנאי ההתחלה.
- תלוי בפרמטרים של המערכת באופן רציף

התנהגות כאוטית אינה ניתנת לחיזוי ואם נתבונן במושך מוזר נראה שהמסלולים לא חוזרים על עצמם אלא חולפים זה ליד זה. החוקיות היחידה היא שהמסלולים ימשיכו לנוע סביב המושך.

משפט פואנקרה-בנדיקסון מראה כי מושך מוזר יכול להיווצר במערכת דינאמית רציפה רק אם יש לו שלושה או יותר ממדים. ובמערכות דיסקרטיות יכול להיווצר מושך מוזר גם בממד אחד.

2.7 מפת פואנקרה Poincaré section

כדי לנתח מסלולים מורכבים בפאזה מסויימת. דוגמים את הנקודות של הפונקציה העוברות בתת מרחב הקטן בממד אחד ממרחב הפונקציה כלשהו. נקודות אלו על תת המרחב נקראות Poincaré section.



דגימת פונקציה תלת ממדית
העוברת דרך מישור S

כיצד עושים זאת?

נניח כי קיימת פונקציה $y = f(t)$ כאשר t הוא משתנה רציף.

מחלקים את ציר t לקטעים קטנים בגודל τ שונים ומחשבים ערך הפונקציה f בנקודות של ערכים בדידים של הזמן לאו דווקא קבוע.

$$n \in \mathbb{Z} \quad \begin{matrix} f(0)=f_0 \\ f(\tau)=f_1 \\ \vdots \\ f(\tau_n)=f_n \end{matrix} \quad \text{ש נקבל סדרה כך}$$

נקודות אלו על המישור יוצרות את Poincaré map.

העבודה נציג את מסלולי המערכת במפות פואנקרה.

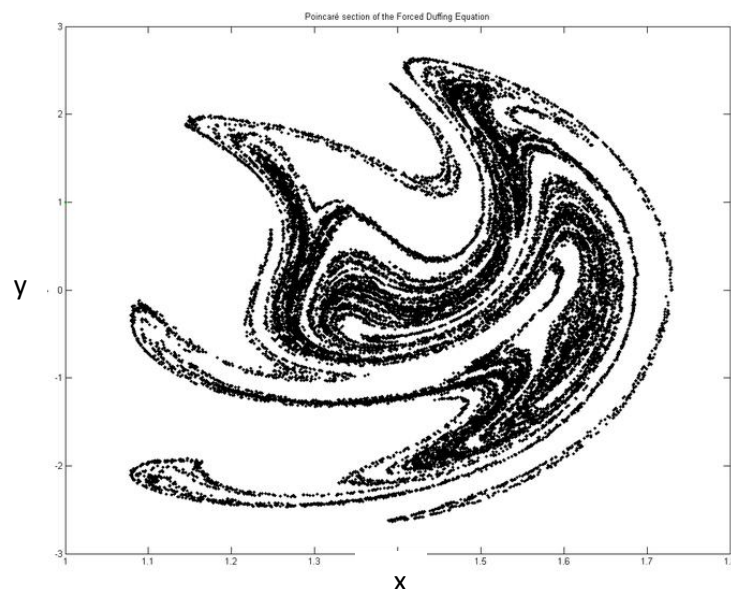
2.6.1 משוואת דאפינג

נראה את מפת פואנקרה לדוגמא שהראינו בסעיף הקודם.

משוואת דאפינג היא משוואה דיפרנציאלית לא ליניארית מסדר שני המתארת תנועה של מתנד בעל פוטנציאל מורכב יותר מתנועה הרמונית פשוטה:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

עבור $\alpha = 1, \omega = 0.5, \beta = 5, \delta = 0.02, \gamma = 8$ נקבל את פואנקרה הבאה:



איור 5

3. מרחבים לא קמוטטיבים

עבודתי תעסוק במרחב לא "רגיל", במרחבים "רגילים" שבו אנו משתמשים בדרך כלל, קורדינטות של גוף הנמצא במרחב הם קמוטטיביות, כלומר אם קיים גוף במרחב ונרצה להגיע אליו אין חשיבות לסדר הקורדינטות בהם נלך, אם נזוז קודם בציר ה- X ואחר כך בציר ה- Y או להפך נגיע לאותה נקודה. מרחב "רגיל" זה נקרא מרחב קמוטטיבי.

אבל פיזיקאים ולאחר מכן מתמטיקאים ראו שבקנה מידה קטן מאוד, כלומר בהסתכלות על חלקיקים אלמנטרים ראו שיש חשיבות לסדר הפעולות כלומר המרחב במקרים אלו הוא לא קמוטטיבי.

אלן קונס הוא מתמטיקאי צרפתי אשר פיתח את הרעיון של מרחבים לא קמוטטיביים. מטרתו היתה להסביר את התנהגותם של חלקיקים אלמנטרים.

הרעיון של קונס היה לקשר בין מרחב גיאומטרי לאלגברה הקומוטטיבית של הקואורדינטות הקרטזיות, לגיאומטריה המבוססת על אלגברה לא-קומוטטיביות. באלגברה קומוטטיבית הפתרון אינו תלוי בסדר הגורמים: $a \times b = b \times a$.

כדי לקבל מבט ברור יותר של המתרחש בטבע, פיזיקאים נוהגים לפעמים להשתמש ב"מרחב פאזה". מרחב כזה הוא אלטרנטיבה לקואורדינטות הקרטזיות - חוקר יכול לשרטט את מיקום האלקטרון כנגד המומנט שלו, ולא פשוט את מיקומי ה- x ו- y שלו. בגלל עקרון אי הוודאות של הייזנברג, האומר כי לא ניתן לקבוע ערכים של זוג משתנים בו זמנית. כתוצאה מכך, הכנסת אי-קומוטטיביות כזו למרחב על ידי הפיכת קואורדינטות ה- x וה- y - מייצרת מרחב שיש בו גיאומטריה לא-קומוטטיבית.

נסכם מרחב קמוטטיבי הוא מרחב בו פעולת הקמוטטור נותנת 0 כלומר $[x, y] = xy - yx$ ובמרחב לא קמוטטיבי $[x, y] = xy - yx \neq 0$.

3.1 מערכות דינמיות במרחבים לא קומוטטיביים

הרבה שנים לפני שקונס הביא למודעות את הרעיון של מרחבים לא קומוטטיביים, הרטלנד סניידר, פיזיקאי אמריקני בנה מערכת דינמית במרחב לא קומוטטיבי כדי לנסות לפתור את בעיית האינטראקציה בין חומר ושדות.

במחקרו הוא הסתכל על המשתנים x, y, z ו- t כבדידים ולא כרציפים כמו שרגילים לעשות. הוא הניח כי הספקטרום של מפעילי קואורדינטות הזמן במרחב אינו משתנה תחת טרנספורמציות לורנץ. הוא הגיע למערכת הבאה

$$\begin{aligned} [x, y] &= \left(\frac{ia^2}{h}\right)L_z & [t, x] &= \left(\frac{ia^2}{hc}\right)M_x \\ [y, z] &= \left(\frac{ia^2}{h}\right)L_x & [t, y] &= \left(\frac{ia^2}{hc}\right)M_y \\ [z, x] &= \left(\frac{ia^2}{h}\right)L_y & [t, z] &= \left(\frac{ia^2}{hc}\right)M_z \end{aligned}$$

בלי להכנס למשמעות המערכת, ניתן לראות שהקמוטטור לא מתאפס. (נשים לב כי במודל אותו אנו נחקור הזמן הוא כן קמוטטיבי, בשונה מהמשוואות הנ"ל.) כיצד הדבר אפשרי נראה בפרק הבא

4. פעולה (action)

איננו יכולים לדעת איך נראים חלקיקים אלמנטרים, אין בכוחותינו מיקרוסקופ המראה חלקיקים אלו.

בפיזיקה, מודל של חלקיקים הוא מודל נקודתי, כלומר חלקיק בעיני פיזיקאים נראה כנקודה.

לתאור תנועה של חלקיק יש מספר אפשריות, אחת מהן היא חוק שני של ניוטון $\sum F = ma$ כלומר שקול הכוחות שווה למסה כפול התיאוצה. מבחינה מתמטית זוהי משוואה מסדר שני

ניתן לנסח את החוק השני גם כפונקציונל

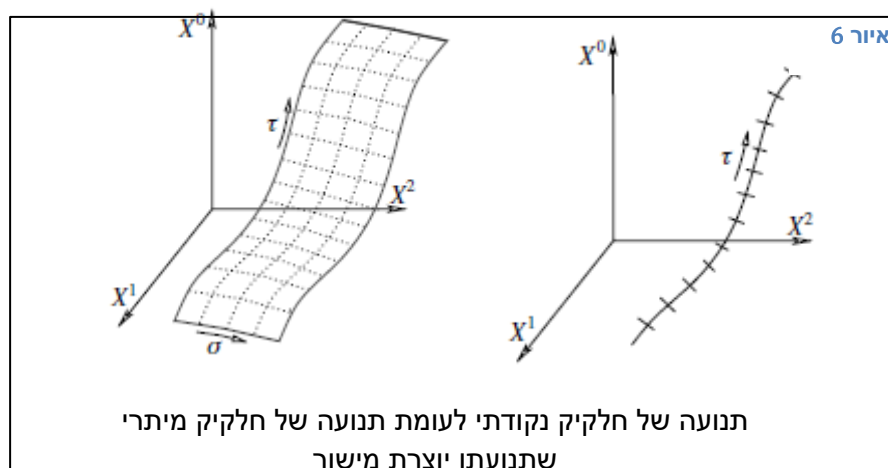
$$S = \int_a^b L dt$$

כאשר $L = T - V$

L היא פונקציית לגראנז' T זו האנרגיה הקינטית $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ ו $V = V(x)$ היא האנרגיה הפוטנציאלית הפנימית

כלומר קיימים אינסוף מסלולים כדי להגיע מנקודה א לנקודה ב במרחב, אך הקו בו הטבעי יבחר הוא המסלול בעל האורך המינימלי. על פי עיקרון הפעולה המינימלית.

פיזיקאים הניחו שחלקיק אלמנטרי אין צורה נקודתית, אלא הוא בעל צורה של מיתר.



לכן מיתר סופי הנע במרחב תוך כדי תנועתו יוצר משטח, למיתר כזה גם קיים עיקרון של פעולה אלמנטרית, אבל מכיוון שהתנועה היא לא חד ממדית, אלא יוצרת משטח לכן האינטגרל יהיה אינטגרל משטחי

$$S = \iint (T - V) d\sigma d\tau$$

כאשר $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ האנרגיה הקינטית. V הוא שטח המשטח

ועכשיו מטרננו היא למצוא משטח בעל שטח מינימלי.

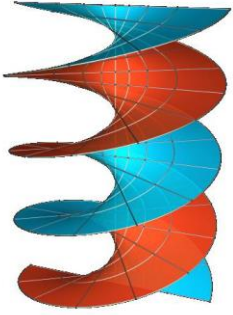
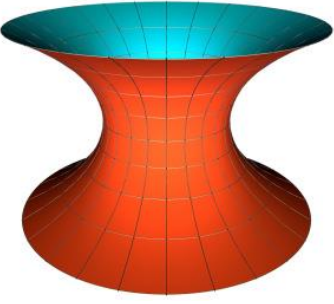
4.2 משטחים מינימליים

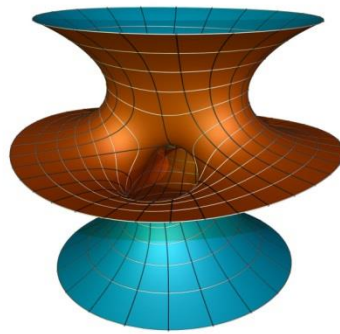
בעיית משטחים מינימליים היא בעיה מפורסמת בגאומטריה. מקורם של משטחים מינימליים הוא בבעיות שעסקו במציאת המשטח הממזער את שטח הפנים הכולל של המשטח בהינתן אילוצים מסויימים.

משטח מינימלי ניתן לתיאור בעזרת טבילת חוט תיל סגור בסבון, הקרום הנוצר מהווה פתרון מתמטי למציאת משטחים מינימליים.

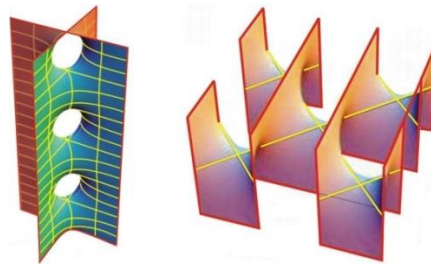
נראה מספר דוגמאות קלאסיות למשטחים מינימליים.

איור 7

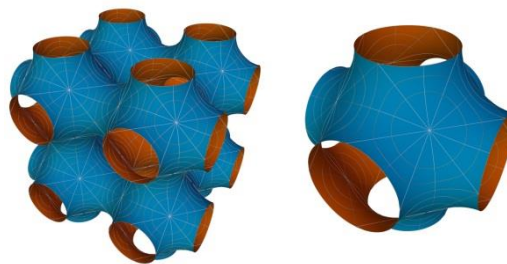
האליקואיד: תואר לראשונה על ידי אוילר והוא הכללה של בורג ארכימדס	
הקטנואיד: מהמשטחים המינימלים המפורסמים ביותר תואר לראשונה על ידי אוילר.	
המשטח המינימאלי של קוסטה: משטח מינימלי שהתגלה ב 1982 על ידי המתמטיקאי הברזילאי סלוו חוסה דה קוסטה	



- משטחי שרק: היינריך פרדיננד שרק הציג בשנת 1835 חמישה משטחים מינימליים, אלו שניים מהם



- משטח P (פרימיטיבי) שוורץ: הרמן שוורץ תיאר ארבעה משטחים מינימליים ולהלן אחד מהם:



- ספירה: הוא משטח מינימלי טריוויאלי, הוא קבוצת הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת ("המרכז") הוא קבוע, נראה דוגמא תלת ממדית



נחזור לעניינינו

כאשר הגוף במנוחה השטח הוא מינימלי. נעשה אינטגרל משטחי כשגוף הם הקורדינטות של המשטח

$$\begin{aligned}
S &= \iint |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv \\
&= \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv \\
&= \iint_{\Delta} \sqrt{(y'_u z'_v - y'_v z'_u)^2 + (x'_u z'_v - x'_v z'_u)^2 + (x'_u y'_v - x'_v y'_u)^2} du dv
\end{aligned}$$

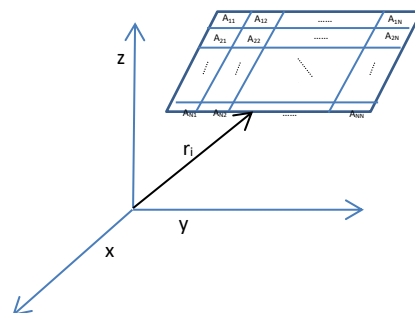
סוגרי פואסון

$$\{f(u, v), g(u, v)\} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}$$

מכאן

$$= \iint_{\Delta} \sqrt{\{y, z\}^2 + \{x, z\}^2 + \{x, y\}^2} du dv$$

המשטח הוא אוסף של אינסוף נקודות, לכן ניתן לעשות דיסקרטיזציה, כלומר במקום להתייחס למשטח כאין סוף נקודות, נחלק את המשטח לחלקים מסויימים. ונתייחס לכל חלק כאלמנט מינימלי



ולכול חלק ישנו רדיוס r

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad i = 1, \dots, N$$

בעצם רעיון הדיסקרטיזציה הוא להחליף את וקטור r במטריצה, במקום להתאים פונקציה עם משתנה רציף, נתאים מטריצה

$$\vec{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i) \in \mathbb{C} \ N \times N$$

וסוגרי פואסון הופכים לקומוטטור

$$\{f, g\} \rightarrow [F, G]$$

כך שאת השטח במרחב לא קמוטטיבי מתקבל

$$S = Tr \sum_{i < j} \sqrt{[x_i, x_j]^2}$$

הנוסחה שפתחנו זו תנועה של אחד האיברים שיופיע בפעולה של מיתר

5. תיאוריית קלוצה קליין (Kaluza-Klein)

5.1 הרעיון הכללי

המתמטיקאי הגרמני תיאודור קלוצה פיתח את העשרה שלעולם יש חמישה ממדים, ארבעה ממדים מרחביים וממד של זמן. לפי התיאוריה הכוח האלקטרומגנטי הוא השתקפות הגאומטרית של הממד הנוסף, החמישי. כמו שכוח הכבידה משקף את הגאומטריה של מרחב הזמן.

במאה ה-20 הפיזיקאי קליין הרחיב ושיפר את התיאוריה. קליין הציע שהממד הנוסף, הוא ממד מעגלי עם רדיוס הקטן מרדיוס האטום, התכונה של הכוח האלקטרומגנטי- חופש כיול מחייבת שהממד החמישי יהיה סגור, כלומר מעגלי.

האיחוד של ארבעת הכוחות המוכרים לנו בטבע לתורה אחת, שאותה התחילו קלוצה וקליין הכתיב את התפתחות הפיזיקה המודרנית בעשורים הבאים ובמיוחד לתורת המיתרים (לוינסון, 2012).

5.2 השערת קלוצה

תיאודור קלוצה במאמרו מ-1922 בנה את כל המרכיבים של התיאוריה החמש ממדית הקלאסית. משוואות השדה, משוואות התנועה ועוד.

$$\tilde{g}_{ab} \equiv \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{bmatrix}$$
 המחשת צורת הממד החמישי

$$\text{או } \tilde{g}_{55} \equiv \phi^2, \tilde{g}_{5\nu} \equiv \tilde{g}_{\nu 5} \equiv \phi^2 A_\nu, \tilde{g}_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu$$

כאשר ϕ שדה סקלרי ו A פוטנציאל הווקטור האלקטרו מגנטי

הפירוק הנ"ל הוא די כלל וכל המונחים הם חסרי ממדים.

קלוצה מיישם את רעיונו על משוואותיו של איינשטיין והוא מצא שמטען חשמלי מזהה עם תנועה בממד החמישי.

5.3 משוואות שדה

משוואות השדה המלאות מיוחסות לת'רי ולא לקלוצה.

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^5} = 0 \text{ כך } \frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^5}$$

$$(0, 1, 2, 3 = \beta \text{ ו } \alpha)$$

משוואת השדה הסקלרי ϕ המתקבלת $\tilde{R}_{55} = 0 \Rightarrow F_\phi = \frac{1}{4}\phi^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

כאשר $F \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ ו $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$

ניתן לראות שהשדה האלקטרומגנטי הוא המקור לשדה הסקלרי. נשים לב שלא ניתן להגדיר את השדה הסקלרי לקבוע ללא הגבלת השדה האלקטרומגנטי. לקלוזה וקליין לא היה תיאור הולם של השדה הסקלרי, ולא הבינו את האילוץ על השדה האלקטרומגנטי על ידי ההנחה ששדה הסקלרי הוא קבוע.

משוואת השדה עבור A^ν , מתקבלת מ $\tilde{R}_{5\alpha} = 0 = \frac{1}{2} g^{\beta\mu} \nabla_\mu (\phi^3 F_{\alpha\beta})$

משוואות התנועה

המהירות ב5D מוגדרת: $U^\nu \equiv \frac{dx^\nu}{d\tau}$

המשוואה הגיאודזית עבור 5D

$$\frac{dU^\nu}{d\tau} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta + 2\tilde{\Gamma}_{5\alpha}^\mu U^\alpha U^5 + \tilde{\Gamma}_{55}^\mu (U^5)^2 + U^\mu \frac{d}{d\tau} \ln\left(\frac{cd\tau}{ds}\right) = 0$$

משוואת התנועה בממד החמישי

$$\frac{d\tilde{U}_a}{ds} = \frac{1}{2} \tilde{U}^b \tilde{U}^c \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a}$$

מכאן שבתנועה תלת ממדית $\tilde{U}_5$ הוא קבוע

6. מודל מטריצות BMN

דיויד ברמשטיין, צ' ג'ואן מלדצינה והורטיו נסטס הם שלושה פיזיקאים שיצרו מודל מטריצוני לחקר תנועה של מיתר.

התנועה היא רציפה אך לא ניתנת להבחנה בכל מקום. מכאן שהתנועות הכאוטיות אינן מתנהגות בצורה אנליטית בהשוואה לתנועות תקופתיות.

$$S = \int dt \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (D_t X^r)^2 + \frac{1}{4} [X^r, X^s]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{3} \right)^2 X_i^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{6} \right)^2 X_a^2 - \frac{\mu}{3} \epsilon_{ijk} X^i X^j X^k \right]$$

כאשר D_t ו $a, b = 4, \dots, 9$, $j = 1, 2, 3$ הנגזרת

משוואת התנועה מוגדרת באופן הבא:

$$0 = \ddot{X}^i + \sum_{r=1}^9 [X^r, [X^r, X^i]] + \left(\frac{\mu}{3} \right)^2 X^i + i\mu \sum_{j,k=1}^3 \epsilon^{ijk} X_j X_k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.1)$$

$$0 = \ddot{X}^a + \sum_{r=1}^9 [X^r, [X^r, X^a]] + \left(\frac{\mu}{6} \right)^2 X^a \quad (a = 4, \dots, 9) \quad (6.2)$$

$$0 = \sum_{r=1}^9 [X^r, \dot{X}^r]$$

ניתן לראות שהמערכת בנויה מ9 מטריצות וכאשר המשוואה (6.1) מייצגת תנועה במרחב התלת ממד ו (6.2) תנועה פנימית בחמשת הממדים הנוספים.

נראה שתי דוגמאות למודל דוגמא למודל בעל מטריצות בגודל 2×2 ובגודל 4×4 .

6.1. מודל מטריצות 2X2

נניח את הפתרונות הקלאסיים הבאים

$$X^i = r(t) \frac{\sigma^i}{2}, \quad X^{a'} = x(t) \frac{\sigma^{a'-3}}{2}, (a' = 4, 5, 6)$$

$$X^7 = X^8 = X^9 = 0$$

כאשר σ^i הם מטריצות פאולי

מטריצות פאולי מוגדרות באופן הבא:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

המיוחד בהם הוא שריבוע המטריצה שווה למטריצת היחידה כלומר

$$\sigma^{1^2} = \sigma^{2^2} = \sigma^{3^2} = \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{1} \text{ היא מטריצת היחידה} \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נציב את המטריצות ונמצא את הפתרונות

$$\begin{cases} (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = \frac{3}{4} r^2(t) \hat{1} \\ (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 = \frac{3}{4} x^2(t) \hat{1} \end{cases}$$

זהו בעצם משטח מינימלי מהצורה fuzzy spheres

נציב את הפתרונות האלו במשוואות (6.1) ו (6.2) ונקבל

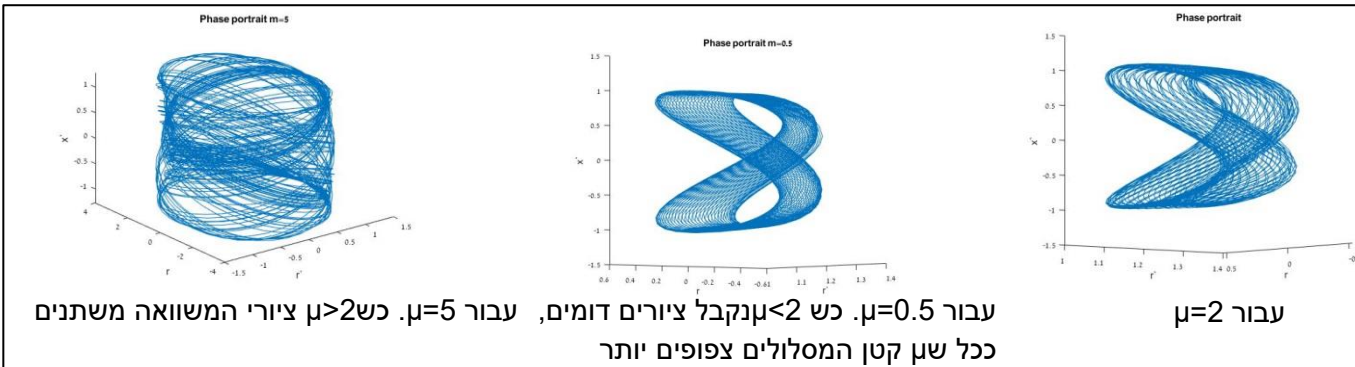
$$\begin{cases} 0 = \ddot{r} + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 r - \mu r^2 + 2r^3 + 2rx^2 \\ 0 = \ddot{x} + \left(\frac{\mu}{6}\right)^2 x + 2x^3 + 2xr^2 \end{cases} \quad (6.3)$$

קיבלנו מערכת משוואות לא לינארית מסדר שני

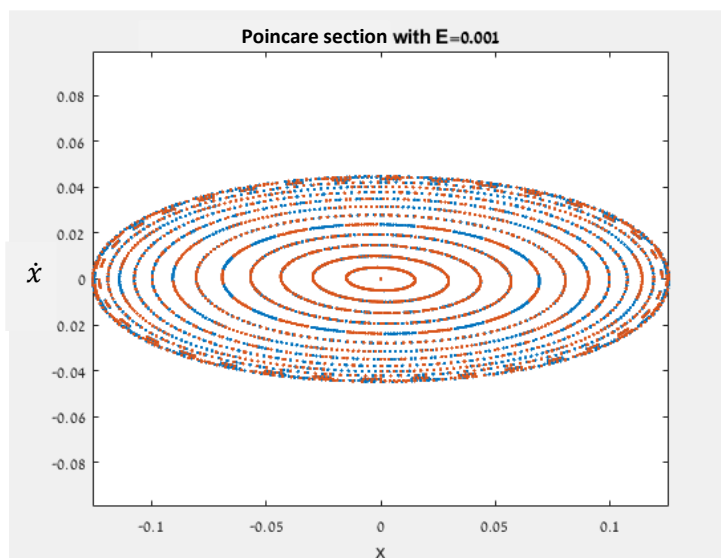
נהפוך את המשוואות למערכת משוואות מסדר ראשון

$$\begin{cases} \dot{r} = r_1 \\ \dot{r}_1 = -\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 r + \mu r^2 - 2r^3 - 2rx^2 \\ \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = -\left(\frac{\mu}{6}\right)^2 x - 2x^3 - 2xr^2 \end{cases}$$

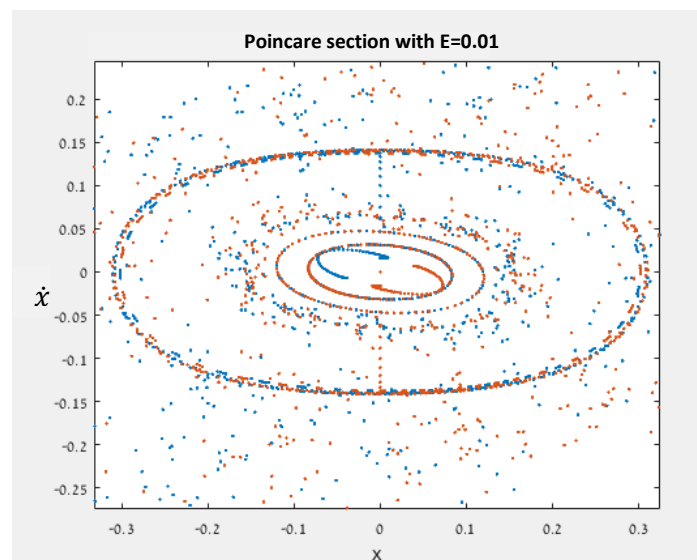
נסתכל ציורי המערכת לפי ערכי μ שונים



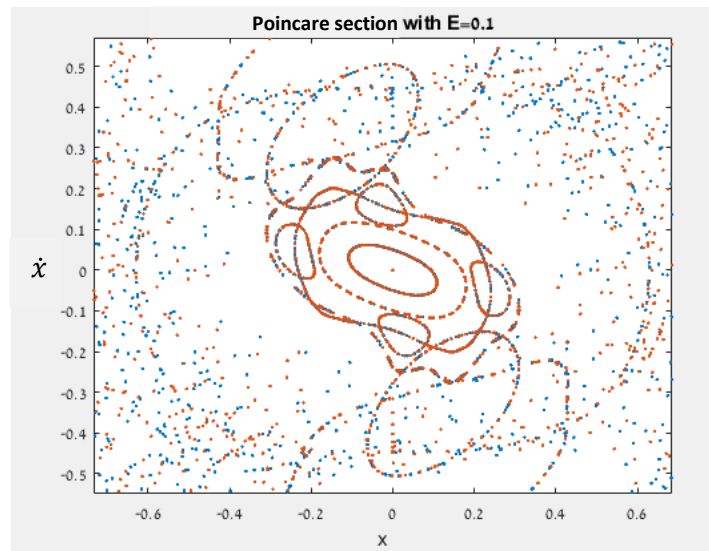
נסתכל על מפות פואנקרה עבור E (ערכי אנרגיה פנימיים) שונים, $\mu = 2$



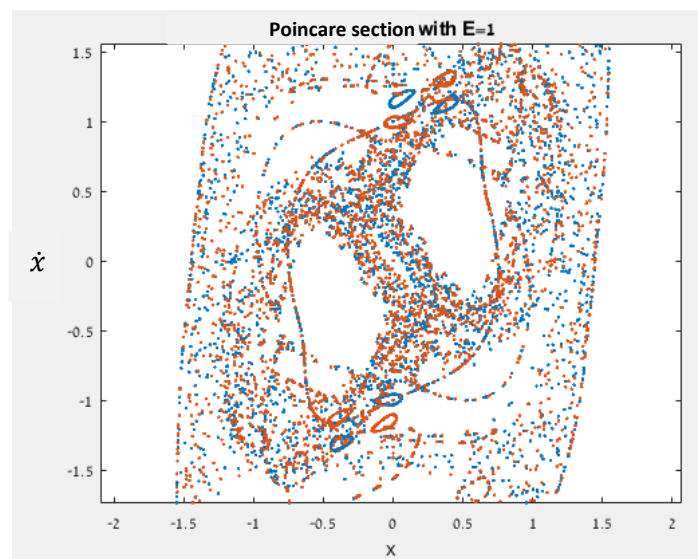
האנרגיה מאוד קטנה, נקבל מסלולים מחזוריים, אין כאוס



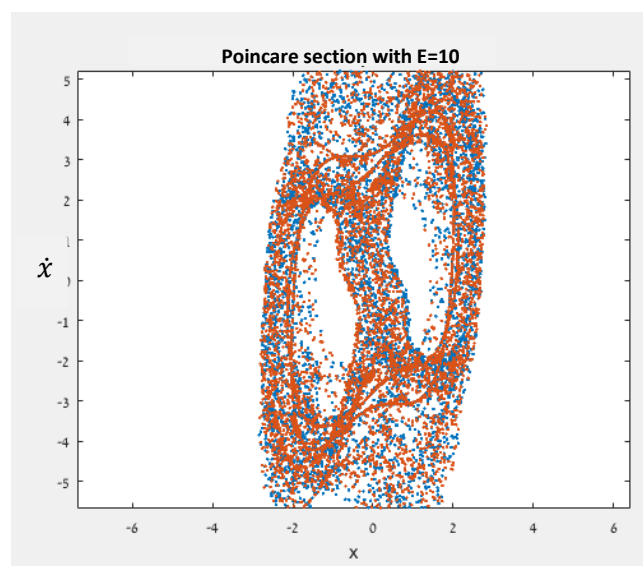
ישנו כאוס מקומי בין שני מסלולים זהו כאוס מקומי



המסלולים של המעגל החיצוני נהרסים, וישנו כאוס

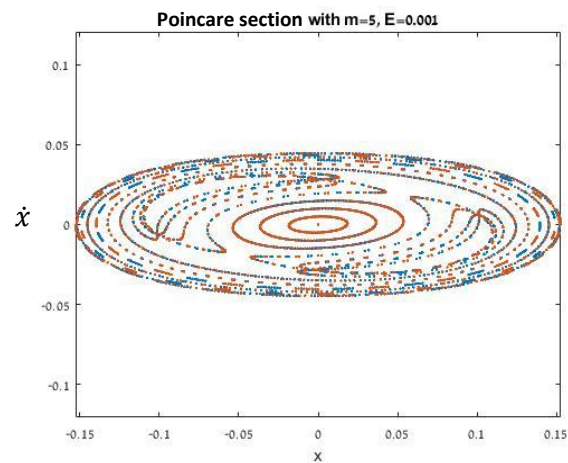


ניתן לראות שה"אי" שהיה במרכז המפות הקודמות הופך לשני "איים"

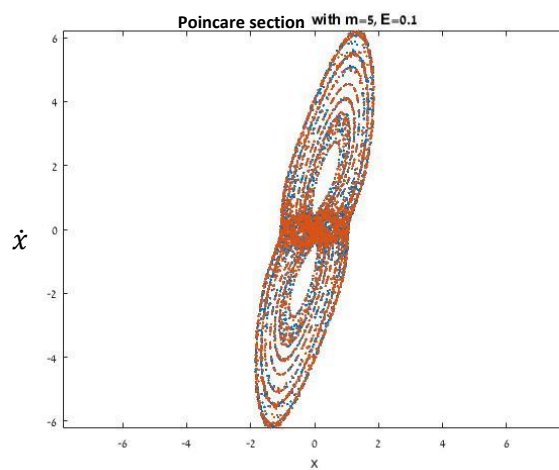


התנועות די הוסדרו סביב שני האיים

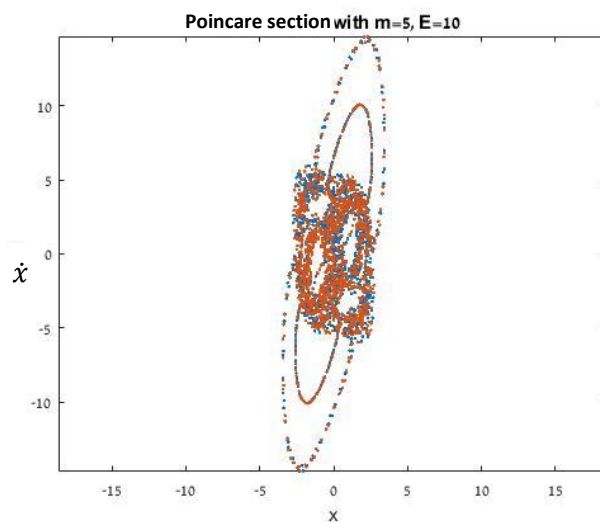
עבור $\mu=5$



כאשר האנרגיה קטנה מאוד גם כאן ניתן לראות שאין כאוס



ישנם מסלולים מסודרים סביב שני "איים"



האיים מתפצלים וקיימים מסלולים די מסודרים סביב שישה "איים"

נמצא נקודות שבת

$$\begin{cases} 0 = \ddot{r} + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 r - \mu r^2 + 2r^3 + 2rx^2 \\ 0 = \ddot{x} + \left(\frac{\mu}{6}\right)^2 x + 2x^3 + 2xr^2 \end{cases}$$

$$\ddot{r} = 0, \ddot{x} = 0$$

אזי

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 r - \mu r^2 + 2r^3 + 2rx^2 \\ 0 = \left(\frac{\mu}{6}\right)^2 x + 2x^3 + 2xr^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = r\left(\frac{\mu^2}{9} - \mu r + 2r^2 + 2x^2\right) \\ 0 = x\left(\frac{\mu^2}{36} + 2x^2 + 2r^2\right) \end{cases}$$

כבר ניתן לראות שקיימת נקודה טריוויאלית (0,0)

נמצא את הנוספות

$$x = \sqrt{\frac{-\frac{\mu^2}{9} + \mu r - 2r^2}{2}}$$

$$0 = \frac{\mu^2}{36} - \frac{\mu^2}{9} + \mu r - 2r^2 + 2r^2$$

$$\frac{3\mu^2}{36} = \mu r$$

$$\frac{\mu}{12} = r_*$$

$$2x^2 = -\frac{\mu^2}{36} - \frac{\mu^2}{72} \text{ נציב את } r_* \text{ במשוואת השניה}$$

$$x = \sqrt{-\frac{3\mu^2}{144}} \text{ קיבלנו מספר מרוכב, אנו עוסקים במספרים ממשיים לכן}$$

לכן ל x ישנו פתרון יחיד x=0

נציב במשוואה הראשונה

$$0 = r\left(\frac{\mu^2}{9} - \mu r + 2r^2\right)$$

$$\frac{\mu^2}{9} - \mu r + 2r^2 = 0$$

$$\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - \frac{8\mu^2}{9}}}{4}$$

$$r_2 = \frac{\mu}{3}, \quad r_3 = \frac{\mu}{6}$$

קיבלנו 3 נקודות שבת

$$(0,0), \left(\frac{\mu}{3}, 0\right), \left(\frac{\mu}{6}, 0\right)$$

נבדוק את יציבותן.

בסביבת נקודת שבת ניתן להציג את וקטור הפתורה בצורה

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_* + \delta\vec{x}(t)$$

כאשר $\vec{x}_* = \begin{pmatrix} r_* \\ x_* \end{pmatrix}$ הוא וקטור המתאים לאחת מנקודות השבת ו $\delta\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \delta r(t) \\ \delta x(t) \end{pmatrix}$ הוא וקטור הסטייה

מהנקודה $\ddot{\vec{x}}(t) = \delta\ddot{\vec{x}}(t)$ ו $|\delta r(t)| \ll 1, |\delta x(t)| \ll 1$

את מערכת המשוואות (6.3) ניתן להציג בצורה מטריצינית $\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{M}(\vec{x}(t))$

כאשר $\vec{M}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} M_1(r(t), x(t)) \\ M_2(r(t), x(t)) \end{pmatrix}, \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$

$$\delta\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{M}(\vec{x}_* + \delta\vec{x}(t))$$

בקירוב לינארי

$$\vec{M}(\vec{x}_* + \delta\vec{x}(t)) = \vec{M}(\vec{x}_*) + \left.\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_*} \cdot \delta r(t) + \left.\frac{\partial \vec{M}}{\partial x}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_*} \cdot \delta x(t)$$

$$\vec{M}(\vec{x}_*) = 0$$

$$\vec{M}(\vec{x}_* + \delta\vec{x}(t)) = \left.\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_*} \cdot \delta r(t) + \left.\frac{\partial \vec{M}}{\partial x}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_*} \cdot \delta x(t)$$

הנגזרות החלקיות מחושבות עבור $\vec{x}_* = \vec{x}$.

בצורה מפורשת נקבל

$$\begin{pmatrix} \delta \ddot{r}(t) \\ \delta \ddot{x}(t) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \delta r(t) \\ \delta x(t) \end{pmatrix}$$

$$J = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial M_1}{\partial r} & \frac{\partial M_1}{\partial x} \\ \frac{\partial M_2}{\partial r} & \frac{\partial M_2}{\partial x} \end{array} \right) \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_*} \quad \text{כאשר מטריצת יעקובי מוגדרת באופן הבא:}$$

איברי מטריצת יעקובי:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_1}{\partial r} = -\frac{\mu^2}{9} + 2\mu r - 6r^2 - 2x^2 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} = -4rx \\ \frac{\partial M_2}{\partial r} = -4rx \\ \frac{\partial M_2}{\partial x} = -\frac{\mu^2}{36} - 6x^2 - 2r^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\mu r_* - 6r_*^2 - 2x_*^2 \right) \delta r - 4r_* x_* \delta x \\ \delta \ddot{x} = 4r_* x_* \delta r + \left(-\frac{\mu^2}{36} - 6x_*^2 - 2r_*^2 \right) \delta x \end{array} \right. \quad \text{נקבל}$$

כל נקודות השבת מקיימות $x_* = 0$

ניתן לרשום אותה בצורה הבאה

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\mu r_* - 6r_*^2 \right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{36} - 2r_*^2 \right) \delta x \end{array} \right.$$

המערכת מתפצלת לשתי משוואות נפרדות

עבור הנקודה $(0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{r} = -\frac{\mu^2}{9} \delta r \\ \delta \ddot{x} = -\frac{\mu^2}{36} \delta x \end{array} \right.$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = C_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = C_3 \cos\left(\frac{\mu}{6}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\mu}{6}t\right) \end{cases}$$

מכאן הנקודה (0,0) יציבה.

עבור הנקודה $\left(\frac{\mu}{3}, 0\right)$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\mu\frac{\mu}{3} - 6\frac{\mu^2}{9}\right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{36} - 2\frac{\mu^2}{9}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = -\frac{\mu^2}{9} \delta r \\ \delta \ddot{x} = -\frac{\mu^2}{4} \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = D_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + D_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = D_3 \cos\left(\frac{\mu}{2}t\right) + D_4 \sin\left(\frac{\mu}{2}t\right) \end{cases}$$

הפתרון חסום מכאן הנקודה $\left(\frac{\mu}{3}, 0\right)$ יציבה.

עבור הנקודה $\left(\frac{\mu}{6}, 0\right)$:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\mu\frac{\mu}{6} - 6\frac{\mu^2}{36}\right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{36} - 2\frac{\mu^2}{36}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \frac{\mu^2}{18} \delta r \\ \delta \ddot{x} = -\frac{\mu^2}{12} \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = E_1 e^{\mu t / \sqrt{18}} + E_2 e^{-\mu t / \sqrt{18}} \\ \delta x(t) = E_3 \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{12}} t\right) + E_4 \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{12}} t\right) \end{cases}$$

הפתרון אינו חסום כי המקדם של ליאפונוב $\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{18}} > 0$ לכן הנקודה $(\frac{\mu}{6}, 0)$ אינה יציבה.

לסיכום קיבלנו שתי נקודות שבת יציבות $(0, 0), (\frac{\mu}{3}, 0)$

ונקודת שבת אחת $(\frac{\mu}{6}, 0)$ לא יציבה

6.2 מודל מטריצות 4X4

הפעם נסתכל על המטריצות

$$X^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r(t)\sigma^i & x(t)\sigma^i \\ x(t)\sigma^i & r(t)\sigma^i \end{pmatrix}, \quad X^a = 0$$

כאשר σ^i הן מטריצות פאולי

כך ש X^i הן מטריצות בגודל 4X4.

נקבל

$$\begin{cases} (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = (r(t) + x(t))^2 \mathbb{I} \\ (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 = (r(t) - x(t))^2 \mathbb{I} \end{cases}$$

שאלו בעצם שתי ספירות בעלות רדיוס שונה המשתנות לפי r ו x

נפעיל את המודל ונקבל מערכת משוואות סקלרית

$$0 = \ddot{r} + 2r \left(r - \frac{\mu}{3} \right) \left(r - \frac{\mu}{6} \right) + 6 \left(r - \frac{\mu}{6} \right) x^2$$

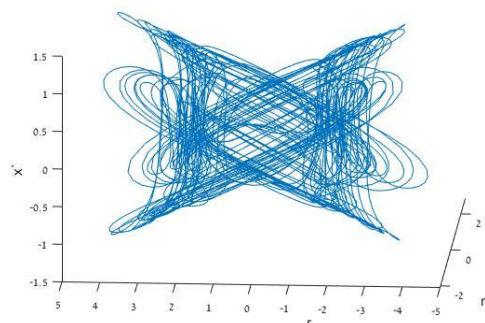
$$0 = \ddot{x} + 2x^3 + \left(\frac{\mu}{3} \right)^2 x + (-2\mu r + 6r^2)x$$

או כמערכת משוואות מסדר ראשון

$$\begin{cases} \dot{r} = r_1 \\ \dot{r}_1 = -2r \left(r - \frac{\mu}{3} \right) \left(r - \frac{\mu}{6} \right) - 6 \left(r - \frac{\mu}{6} \right) x^2 \\ \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = -2x^3 + \left(\frac{\mu}{3} \right)^2 x - (-2\mu r + 6r^2)x \end{cases}$$

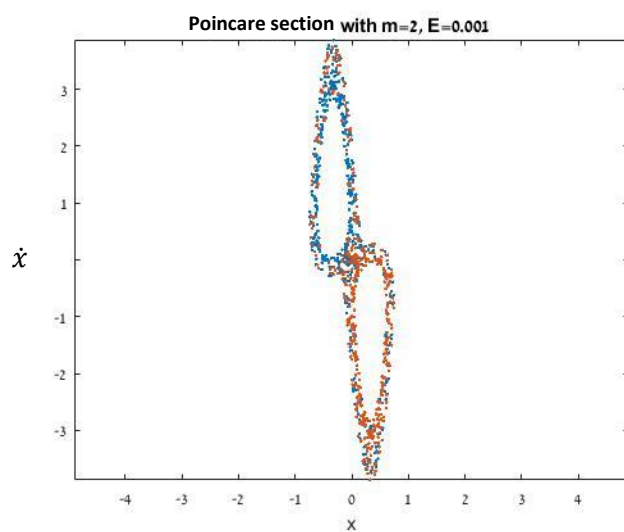
נסתכל על המערכת שבתמונה בה מוצגים 3 ממדים

Phase portrait m=2 y0 (0 1 0 1)

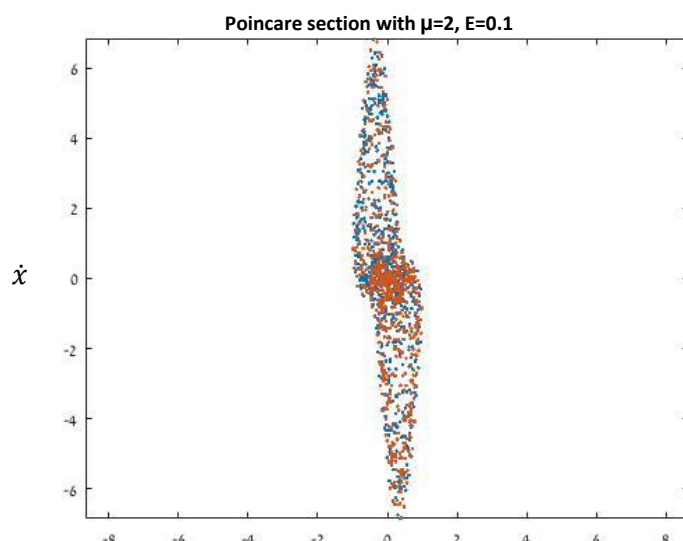


ערכי μ שונים אינם משנים את צורתם אך המסלולים צפופים יותר.

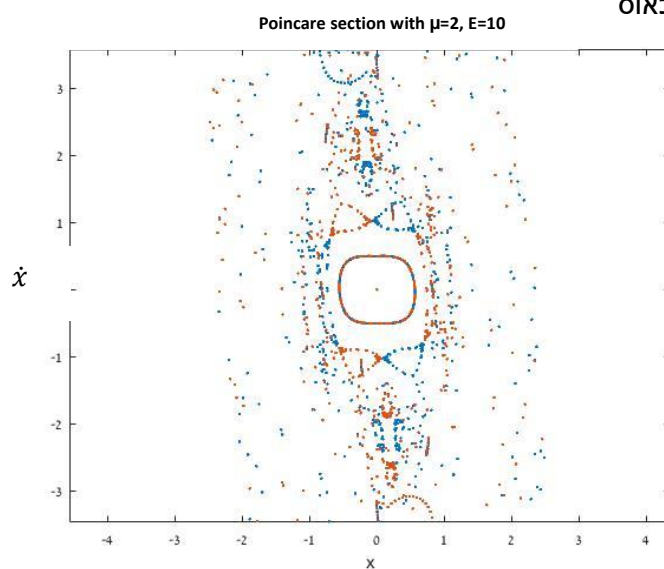
מפת פואנקרה עבור $\mu=2$



הפונקציה מסתדרת סיב שני איים לא במסלולים מסודרים



ישנו כאוס



התמונה הגדולה נראת כמו התמונה הקודמת, אך בסביבות ה-0 נוצרים מסלולים

נבדוק נקודות שבת:

$$0 = \ddot{r} + 2r \left(r - \frac{\mu}{3}\right) \left(r - \frac{\mu}{6}\right) + 6 \left(r - \frac{\mu}{6}\right) x^2$$

$$0 = \ddot{x} + 2x^3 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 x + (-2\mu r + 6r^2)x$$

$$\ddot{r} = 0, \ddot{x} = 0$$

אזי

$$\begin{cases} 0 = 2r \left(r - \frac{\mu}{3}\right) \left(r - \frac{\mu}{6}\right) + 6 \left(r - \frac{\mu}{6}\right) x^2 \\ 0 = 2x^3 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 x + (-2\mu r + 6r^2)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \left(r - \frac{\mu}{6}\right) (2r \left(r - \frac{\mu}{3}\right) + 6x^2) \\ 0 = x(2x^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 + (-2\mu r + 6r^2)) \end{cases}$$

עבור $x=0$ נציב במשוואה הראשונה ונקבל

$$0 = \left(r - \frac{\mu}{6}\right) (2r \left(r - \frac{\mu}{3}\right))$$

מכאן יש 3 נקודות $(0,0), \left(\frac{\mu}{3}, 0\right), \left(\frac{\mu}{6}, 0\right)$

נמצא את הנקודות הנוספות כאשר $x \neq 0$

$$0 = 2x^2 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 + (-2\mu r + 6r^2)$$

$$x^2 = \frac{-\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 - (-2\mu r + 6r^2)}{2}$$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל

$$0 = \left(r - \frac{\mu}{6}\right) \left(2r \left(r - \frac{\mu}{3}\right) + 6 \frac{-\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 - (-2\mu r + 6r^2)}{2}\right)$$

$$0 = 2r^3 - \mu r^2 + \frac{\mu^2 r}{9} - \frac{\mu^2}{3} + 6\mu r - 12r^2$$

$$r_4 = \frac{\mu}{12}, \quad r_5 = \frac{\mu}{4}, \quad r_6 = \frac{\mu}{6}$$

נמצא את x עבור כל r שמצאנו

$$x = \pm \sqrt{\frac{-\left(\frac{\mu}{3}\right)^2 - (-2\mu r + 6r^2)}{2}}$$

עבור $r_4 = \frac{\mu}{12}$:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-\frac{\mu^2}{9} + \frac{\mu^2}{6} - 6\frac{\mu^2}{144}}{2}}$$

$$x_{2,3} = \pm \frac{\mu}{12}$$

עבור $r_5 = \frac{\mu}{4}$:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-\frac{\mu^2}{9} + \frac{\mu^2}{4} - 6\frac{\mu^2}{16}}{2}}$$

$$x_{4,5} = \pm \frac{\mu}{12}$$

עבור $r_6 = \frac{\mu}{6}$:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-\frac{\mu^2}{9} + \frac{\mu^2}{6} - 6\frac{\mu^2}{36}}{2}}$$

$$x_{5,6} = \pm \frac{\mu}{6}$$

לסיכום קיבלנו 9 נקודות שבת:

$$(0,0), \left(\frac{\mu}{3}, 0\right), \left(\frac{\mu}{6}, 0\right), \left(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{12}\right), \left(\frac{\mu}{4}, -\frac{\mu}{12}\right), \left(\frac{\mu}{12}, \frac{\mu}{12}\right), \left(\frac{\mu}{12}, -\frac{\mu}{12}\right)$$

$$\left(\frac{\mu}{6}, \frac{\mu}{6}\right), \left(\frac{\mu}{6}, -\frac{\mu}{6}\right)$$

נבדוק את יציבותן כפי שחישבנו במודל מטריצות 2×2

איברי מטריצת יעקובי:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial r} = -6r^2 + 2\mu r - \frac{\mu^2}{9} - 6x^2 \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} = 2\mu x - 12rx \\ \frac{\partial M_2}{\partial r} = 2\mu x - 12rx \\ \frac{\partial M_2}{\partial x} = -6x^2 - \frac{\mu^2}{9} + 2\mu r - 6r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6r_*^2 + 2\mu r_* - \frac{\mu^2}{9} - 6x_*^2\right) \delta r + (2\mu x_* - 12r_* x_*) \delta x \\ \delta \ddot{x} = (2\mu x_* - 12r_* x_*) \delta r + \left(-6x_*^2 - \frac{\mu^2}{9} + 2\mu r_* - 6r_*^2\right) \delta x \end{cases} \text{נקבל}$$

• נבדוק יציבות עבור $(0,0)$:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = -\frac{\mu^2}{9} \delta r \\ \delta \ddot{x} = -\frac{\mu^2}{9} \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = C_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = C_3 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \end{cases}$$

מכאן הנקודה $(0,0)$ יציבה.

• עבור $\left(\frac{\mu}{3}, 0\right)$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{9} + 2\frac{\mu^2}{3} - \frac{\mu^2}{9}\right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\frac{\mu^2}{3} - 6\frac{\mu^2}{9}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = -\frac{\mu^2}{9} \delta r \\ \delta \ddot{x} = -\frac{\mu^2}{9} \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = B_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + B_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = B_3 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + B_4 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \end{cases}$$

מכאן הנקודה $\left(\frac{\mu}{3}, 0\right)$ יציבה.

• עבור $\left(\frac{\mu}{6}, 0\right)$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{36} + 2\frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9}\right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{9} + 2\frac{\mu^2}{6} - 6\frac{\mu^2}{36}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \frac{\mu^2}{18} \delta r \\ \delta \ddot{x} = \frac{\mu^2}{18} \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא:

$$\begin{cases} \delta r(t) = D_1 e^{\left(\frac{\mu}{\sqrt{18}}t\right)} + D_2 e^{-\left(\frac{\mu}{\sqrt{18}}t\right)} \\ \delta x(t) = D_3 e^{\left(\frac{\mu}{\sqrt{18}}t\right)} + D_4 e^{-\left(\frac{\mu}{\sqrt{18}}t\right)} \end{cases}$$

מכאן הנקודה $\left(\frac{\mu}{6}, 0\right)$ לא יציבה.

• עבור הנקודה $\left(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{12}\right)$:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{16} + 2\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right) \delta r + \left(2\frac{\mu^2}{12} - 12\frac{\mu}{4}\frac{\mu}{12}\right) \delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(2\mu\frac{\mu}{12} - 12\frac{\mu}{4}\frac{\mu}{12}\right) \delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{144} - \frac{\mu^2}{9} + 2\mu\frac{\mu}{4} - 6\frac{\mu^2}{16}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{36}\right) \delta r + \left(-\frac{\mu^2}{12}\right) \delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{12}\right) \delta r + \left(-\frac{\mu^2}{36}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta r(t) = J_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + J_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) - J_3 t - J_4 \\ \delta x(t) = J_5 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + J_6 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) - J_7 t - J_8 \end{cases}$$

הפונקציה לא חסומה , הנקודה לא יציבה.

• עבור הנקודה $\left(\frac{\mu}{4}, -\frac{\mu}{12}\right)$:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{r} &= \left(-6\frac{\mu^2}{16} + 2\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{6} + \frac{\mu^2}{4}\right)\delta x \\ \delta \ddot{x} &= \left(-\frac{\mu^2}{6} + \frac{\mu^2}{4}\right)\delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{16} + 2\frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta r + \left(\frac{\mu^2}{12}\right)\delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(\frac{\mu^2}{12}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta r(t) = G_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) + G_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) - G_3 t - G_4 \\ \delta x(t) = G_5 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) + G_6 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) - G_7 t - G_8 \end{cases}$$

• עבור הנקודה $\left(\frac{\mu}{12}, \frac{\mu}{12}\right)$:

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{144} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta r + \left(\frac{\mu^2}{6} - 12\frac{\mu^2}{144}\right)\delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(\frac{\mu^2}{6} - 12\frac{\mu^2}{144}\right)\delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{144} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta r + \left(\frac{\mu^2}{12}\right)\delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(\frac{\mu^2}{12}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta r(t) = G_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) + G_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) - G_3 t - G_4 \\ \delta x(t) = G_5 \cos\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) + G_6 \sin\left(\frac{\sqrt{2}\mu}{6}t\right) - G_7 t - G_8 \end{cases}$$

הנקודה לא יציבה $\left(\frac{\mu}{12}, \frac{\mu}{12}\right)$.

• עבור הנקודה $(\frac{\mu}{12}, -\frac{\mu}{12})$:

$$\begin{cases} \delta\ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{144} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{6} + 12\frac{\mu^2}{144}\right)\delta x \\ \delta\ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{6} + 12\frac{\mu^2}{144}\right)\delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{144} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{144}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{12}\right)\delta x \\ \delta\ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{12}\right)\delta r + \left(-\frac{\mu^2}{36}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta r(t) = J_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + J_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) - J_3 t - J_4 \\ \delta x(t) = J_5 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + J_6 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) - J_7 t - J_8 \end{cases}$$

הפתרון לא חסום ולכן הנקודה לא יציבה

• עבור הנקודה $(\frac{\mu}{6}, \frac{\mu}{6})$

$$\begin{cases} \delta\ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{36} + \frac{\mu^2}{3} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{36}\right)\delta r + \left(\frac{\mu^2}{3} - 12\frac{\mu^2}{36}\right)\delta x \\ \delta\ddot{x} = \left(\frac{\mu^2}{3} - 12\frac{\mu^2}{36}\right)\delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{36} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{36}\right)\delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9}\right)\delta r \\ \delta\ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{9}\right)\delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = K_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = K_3 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + K_4 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \end{cases}$$

הנקודה $(\frac{\mu}{6}, \frac{\mu}{6})$ יציבה

• עבור הנקודה $(\frac{\mu}{6}, -\frac{\mu}{6})$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-6\frac{\mu^2}{36} + \frac{\mu^2}{3} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{36}\right) \delta r + \left(-\frac{\mu^2}{3} + 12\frac{\mu^2}{36}\right) \delta x \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{3} + 12\frac{\mu^2}{36}\right) \delta r + \left(-6\frac{\mu^2}{36} + \frac{\mu^2}{6} - \frac{\mu^2}{9} - 6\frac{\mu^2}{36}\right) \delta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta \ddot{r} = \left(-\frac{\mu^2}{9}\right) \delta r \\ \delta \ddot{x} = \left(-\frac{\mu^2}{9}\right) \delta x \end{cases}$$

הפתרון הכללי של המערכת הוא

$$\begin{cases} \delta r(t) = L_1 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + L_2 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \\ \delta x(t) = L_3 \cos\left(\frac{\mu}{3}t\right) + L_4 \sin\left(\frac{\mu}{3}t\right) \end{cases}$$

הנקודה $(\frac{\mu}{6}, -\frac{\mu}{6})$ יציבה

לסיכום הנקודות

$(0,0)$, $(\frac{\mu}{3}, 0)$, $(\frac{\mu}{6}, -\frac{\mu}{6})$, $(\frac{\mu}{6}, \frac{\mu}{6})$ יציבות

ואילו הנקודות $(\frac{\mu}{6}, 0)$, $(\frac{\mu}{12}, \frac{\mu}{12})$, $(\frac{\mu}{12}, -\frac{\mu}{12})$, $(\frac{\mu}{4}, \frac{\mu}{12})$, $(\frac{\mu}{4}, -\frac{\mu}{12})$ אינן יציבות.

7. סיכום ומסקנות

במהלך העבודה חקרנו מערכות דינמיות בעלות אופי כאוטי. מצאנו טווח השתנות של פרמטרים, בעלי אופי רגולרי ובעלי אופי כאוטי. תארנו את המודלים באמצעות Poincare section. מצאנו נקודות שבת של המערכת וחקרנו את יציבותם בקירוב לינארי של הנקודות, בצורה ממוחשבת בעזרת תוכנת matlab והצגנו את התוצאות בעבודה.

בנוסף, בעבודתנו עסקנו בבעיית משטחים מינימליים, בעיה ידועה בתורת הגיאומטריה, אבל לעומת המשטחים הקלאסיים, במרחבים לא קמוטטיבים. אנו גילינו שבמרחבים לא קמוטטיבים קיימים משטחים מינימליים כאוטים, בפרט מצאנו שני סוגים של משטחים Two pulsating fuzzy spheres במקרה של מטריצות בגודל 2×2 או Integrable fuzzy spheres במקרה של מטריצות שגודלם 4×4 .

יתר על כן בעזרת המודל בו עסקנו, מודל BMN ניתן להסביר ספקטרום כאוטי במערכות פיזיקאליות כמו בגרעיני אטום. כיוון שבאמצעות מיתרים פיזיקאים מציגים חלקיקים תת אטומים כמו גלואונים.

```

function g=ponkare(energy,tmax,niter)
close all,
E=energy;
timespan=[0 tmax];
e1=E*6;

s_1 = linspace(eps, 1-eps, niter);
p_1 = sqrt(2*E)*sin(s_1*pi/2);
p_2 = sqrt(2*E)*cos(s_1*pi/2);

zz=[];
%%-----

for iter=1:niter

iv = [0, p_1(iter),0 , p_2(iter)]';

options=odeset('AbsTol',1e-10,'RelTol',1e-5,'Events',@events );
[T,Y, TE,YE,IE]=ode45(@ff,timespan,iv,options);

zz=[zz; YE(:,3:4)];
disp(iter),

end
%%-----

figure(1);
plot(zz(:,1), zz(:,2),'.'), hold on,
%plot(zz(:,1), -zz(:,2),'.'), hold on,

```

```

%plot(-zz(:,1), zz(:,2),'.'), hold on,
plot( -zz(:,1), -zz(:,2),'.'), hold off,
axis equal,
title('Poincare section with m=2, E= 0.001');
xlabel('x'), ylabel('x'),
end

```

```

-----

function ydot=ff(t,y);
%4X4
%ydot=[y(2);-2*y(1)*(y(1)-(2/3))*(y(1)-(2/6))+6*(y(1)-(2/6))*y(3)^2;y(4);-2*y(3)^3-
((2/3)^2)*y(3)-(-2*2*y(1)+6*(y(1)^2))*y(3)];
%2X2:
ydot=[y(2);
      -(2/3)^2*y(1)+(2*y(1)^2)-2*(y(1)^3)+2*y(1)*y(3)^2;
      y(4);
      -((2/6)^2)*y(3)-2*y(3)^3-2*y(3)*y(1)^2];
end
% %%-----

function [value,isterminal,direction] = events(t,y)
global rho
value = y(1);
isterminal = 0;
direction = 1;
end
% %%-----

```

פתרון מערכת משוואות דיפרנציאלית

```

syms r(t) x(t) a
v2=[diff(r,t,2)==((-a^2)/36)*r+((-a^2)/12)*x,diff(x,t,2)==((-a^2)/12)*x+((-
a^2)/36)*r];
s2=dsolve(v2)
rsol(t)=s2.r
xsol(t)=s2.x

```

רשימת איורים

6.....	Logistic Map -- from Wolfram MathWorld.....	איור 1
8.....	CHAOTIC AND FRACTAL DYNAMICS עמ' 27.....	איור 2
10.....	CHAOTIC AND FRACTAL DYNAMICS עמ' 28	איור 3
12.....	מפת פואנקרה ויקיפדיה	איור 4
12.....	מפת פואנקרה ויקיפדיה.....	איור 5
14.....	D-Branes עמ' 2, 13.....	איור 6
15	A Survey on Classical Minimal Surface Theory עמ' 21-28.....	איור 7
23.....	מטלב	איור 8

- J. Hoppe, Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two dimensional Bound State Problem. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1982.
- Gelfand, I. M.; Fomin, S. V. (2000). Silverman, Richard A. (ed.). Calculus of variations (Unabridged repr. ed.). Mineola, New York: Dover Publications. p. 3.
- *Kaluza, Theodor (1921). "Zum Unitätsproblem in der Physik". Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.): 966–972. Bibcode:1921SPAW.....966K. <https://archive.org/details/sitzungsberichte1921preussiNoncommutativegeometry>.*
- Klein, Oskar (1926). "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie". Zeitschrift für Physik A.
- Connes, Alain; Marcolli, Matilde (2008), "A walk in the noncommutative garden", An invitation to noncommutative geometry, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 1–128, arXiv:math/0601054
- Arnlind, Joakim & ,Hoppe, Jens .(2003) .'More Membrane Matrix Model Solutions and Minimal Surfaces in S7.
- ARNLIND, Joakim, HOPPE, Jens ,KONTSEVICH, Maxim .(2019) .'QUANTUM MINIMAL SURFACES .arXiv.
- Asano, Y', Daisuke, K & ,Kentaroh, Y .(2015) .'Chaos in the BMN matrix model .arXiv.
- Connes, A', Douglas, M' R & ,Schwarz, A .(1997) .'Noncommutative Geometry and Matrix Theory Compactification on Tori.
- Hellemans, A .(2006 08 01) .' *The Geometer of Particle Physics* אוחר מתוך scientific american: <https://www.scientificamerican.com/article/the-geometer-of-particle/>
- Hoppe, J .(1997) .'Some Classical Solutions of Membrane Matrix Model Equations.
- Joakim, A & ,Jens, H .(2012) .' *THE WORLD AS QUANTIZED MINIMAL SURFACES* .arXiv.

- Johnson, C' V .(2003) .' *D-Branes* .New York: Cambridge.
- MOON, F' C .(2004) .' *CHAOTIC AND FRACTAL DYNAMICS* .New York: WILEY-VCH.
- Pando, Z., Dori, R., & Leopoldo, A. (2018). A String Theory Explanation for Quantum Chaos in the Hadronic Spectrum. USA: University of Michigan.
- SNYDER, H' S .(1946) .'Quantiz'ed Syace-Time .*PHYSICAL REVIEW*:38-41 ,
- William H. Meeks, & Joaquin P`erez. (n.d.). *A survey on classical minimal surface theory*. American Mathematical Society.
- Yorke, J', Sauer, T & ,Alligood, K .(1996) .' *Chaos: an introduction to dynamical systems* .New York: Springer.
- לוינסון, ע'. (2012) .ב- מופע הזיקוקים של היקום (עמ' 202-203) .מטר הוצאה לאור בע"מ.