

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc.)
במתמטיקה שימושית**

אופטימיזציה של מסה לרקטת רב שלבים

אזהאר ח'יר

Mass optimization of multistage rockets

Azhar Khier

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

אופטימיזציה של מסה לרקטת רב שלבים

אזהאר ח'יר

Mass optimization of multistage rockets

Azhar Khier

Advisor:

Name: Professor
Vladimir Turetsky

מנחה:

שם: פרופ' ח ולדימר
טורצקי

Karmiel

2015

כרמיאל

תוכן עניינים

4.....	תקציר
5.....	מבוא
6-9.....	פרק 1: מודל של רקטה עם שלב אחד
	פרק 2: אופטימיזציה בתכנון רקטות עם שלבים רבים למודל מופשט.
10-15.....	א. שיטת לגרנג' לאופטימיזציה של מסה
	ב. בחירת מספר השלבים המתאים ביותר על פי הקשר בין עלות ומסה
16-23.....	ג. חישוב מסה מינימלית M_0 והמסות M_1 ו M_2 ו M_3 ברקטה בעלת 3 שלבים
24-25.....	ד. חישוב M_0 כאשר הרקטה בעלת n שלבים כאשר $n \rightarrow \infty$
26-27.....	פרק 3: אופטימיזציה למודל עם גרביטציה
28-32.....	מסקנות וסיכום
33.....	ביבליוגרפיה
34.....	נספחים
35-39.....	

תקציר

ביצועים אידיאליים של רקטות רבות שלבים מוצגים בצורה גרפית המתאימה במיוחד למתכנן המערכת המעוניין לדמיין את היחסים המורכבים בין החלק של דלק הרכב, הגודל של מערכת ההנעה הכוללת ביחס למטען, ומהירות שחיקה. השפעת השינויים המצטברים במסת הדלק או מסת אינרטי של כל שלב וההשפעה המצטברת בשינוי הדרגתי במטען במהירות השחיקה הסופית נגזרות מהצורה של מקדמים המאפשרים השוואה ישירה של החשיבות היחסית של המאפיינים של כל שלב.

האסטרונאוטים בדרך כלל מוציאים לחלל רקטות בעלות 3 שלבים, לכל שלב יש את התפקיד משלו, השלב הראשון מניע את הרקטה מנקודת השיגור, וכשנגמר הדלק הוא נשלך ומניע את שאר הרקטה לגובה ומהירות יותר גדולים, אחר כך כשנגמר הדלק בשלב השני עוד הפעם מניע את השלב שנשאר והא נשלך, ובסוף השלב השלישי מואץ ואז החללית מתנהלת טוב במשימה. אז מה הם היתרונות והחסרונות לרקטות האלה?

- הרקטות רבות שלבים משליכות את השלבים כאשר הם הופכים לחסרי תועלת להנעה נוספת (כלומר כשנגמר מהם הדלק), ולכן המנועים של השלבים העליוניים אינם עמוסים במשקל חסר תועלת, ואז הם יכולים לספק תאוצה עבור כמות נתונה של דלק לשאר הרכב.
- לעומת זאת, רקטות רבות שלבים מסובכות מבחינת מבנה ויקרות יותר מרקטות של שלב אחד בגודל דומה. בכל זאת החסרון והיתרון לעיל לא מסבירים מדוע הרקטות בעלות 3 שלבים הם הנפוצים ביותר, למה לא בונים רקטות של 2 שלבים או ארבעה שלבים למשל?, בנוסף אנו רוצים לדעת איך הגדלים היחסיים של השלבים נבחרים ומה היחס ביניהם לעלויות.

מבוא

בעבודה הזו אנחנו מסבירים על רקטות רבות שלבים, איזה רקטות נפוצות ביותר, כמה שלבים יש להן?, מהו מספר השלבים הנפוץ והמתאים שמשתמשים בו, לפי מה בוחרים מס השלבים של כל רקטה, ומהו היחס בין מחיר ועלויות למספר השלבים.

בפרק הראשון נציג את הנחות שנשתמש בהם במהלך העבודה, ונחקור את הבחירה של הרקטות בעלות שלב אחד.

בפרק השני נחקור כמה מקרים: במקרה הראשון נחקור את המשוואה של הרקטות בעלות n שלבים, נעשה אופטימיזציה של המשוואה עם אילוצים, ונמצא את המשוואה של הסמה האופטימלית המינימלית, במקרה השני נציג את המשוואה של העלויות, ונחשב מהו מספר השלבים הכי נפוץ והיחס בינו לבין העלות ונתמקד במקרים פרטיים, במקרה השלישי והרביעי נחשב את הערך של M_0 לפי נתונים שונים ונסיק מסקנות.

בפרק השלישי נחקור את המשוואה של הרקטות בעלות n שלבים עם גרביטציה, ונתמקד במקרים פרטיים ונשווה ביניהם לבין התוצאות שקיבלנו בפרק 2.

אז בעבודה אנחנו משתמשים בכלים מתמטיים כדי למצוא את התשובות, וכמו כן נשתמש בכופלי לגרנג' להראות מדוע 3 שלבים הם הנפוצים ביותר לטיסות החלל וכיצד מהנדסי החלל קובעים את הגודל היחסי של השלבים.

בעבודה למדתי מכמה מאמרים, במאמר [1] למדתי על המסה האופטימלית של רקטות, והקשר בין מרכיבים שונים, ומהמאמר [2] למדתי על מחיר אופטימלי והקשר בינו לבין מסה אופטימלית ואיך הם משפיעים על הבחירה של מספר השלבים של רקטות מסוימות.

פרק 1: מודל של רקטה עם שלב אחד

קודם כל נדבר על רקטות של שלב אחד, מכיוון שרכב הרקטות רבות שלבים מהותית הן מורכבים מרקטות שלב אחד ומחברים ביניהם. נציג כמה הנחות:

(1) הרקטה נושאת מטען בעל מסה P .

(2) המסה של רכב הרקטה בלי מטען היא M_v .

(3) המסה של הדלק ברכב תלויה בזמן נסמן ב: $M_f(t)$

(4) המסה הכללית $M(t)$ של רכב הרקטה, דלק ומטען היא:

$$(1) \quad M(t) = P + M_v + M_f(t) \quad \leftarrow \text{נוסחה לפי כל הרכיבים.}$$

(5) נסמן ב M_0 את המסה של רכב הרקטה ועומס הדלק ולכן נוכל להגיד ש:

$$M_0 = M_v + M_f(0)$$

(6) היחס בין מסת המטען P למסת רכב הרקטה שמתודלק M_0 נקרא R (יחס המסה).

(7) היחס בין מסת רכב הרקטה ריקה M_v למסת רכב מתודלק M_0 נקרא S (גורם מבנה).

$R = \frac{P}{M_0}$	$S = \frac{M_v}{M_0}$
---------------------	-----------------------



הערכים של R ו S תלויים במאפייני העיצוב של רקטות.

(8) מנוע הרכב צורך דלק בקצב קבוע בזמן שהוא פועל ונסמן ב:

$$\frac{dM_f}{dt} = -k$$

(9) נשלב משוואה אחרונה ביחס ל t ומעריכים הקבוע של האינטגרציה כאשר

$$(2) \quad M_f(t) = -kt + M_f(0) \quad t=0, \text{ ונקבל:}$$

ולכן יכולים לכתוב את הנוסחה (1) כך: $M(t) = P + M_0 - kt$ (3)

(10) זמן שחיקה t_b : הוא הזמן שהמנוע צורך כל הדלק, יכולים לחשב אותו דרך

השוואת משוואה (2) ל: 0 (כלומר להציב $M_f(t) = 0$) וגם להשתמש ב

$$1 - S = 1 - \frac{M_v}{M_0} = \frac{M_0 - M_v}{M_0} = \frac{M_f(0)}{M_0}$$

ונקבל:

$$(4). t_b = \frac{(1-S)M_0}{k} \leftarrow t_b = \frac{M_f(0)}{k} \leftarrow k * t_b = M_f(0)$$

נניח כי כל הכוחות החיצוניים על הרקטה קטנים יחסית לדחיפת המנוע שיכולים להיות **מוזנחים**, ובנוסף לזה נניח כי גזי הפליטה מתרחקים מהחלק האחורי של הרקטה במהירות קבועה יחסית לרטה. המטרה הראשונה שלנו למצוא משוואה של התנועה של הרכב בזמן שהמנוע פועל.

נניח כי ברגע מסוים t כשמהירות הרקטה היא v ומסה כוללת (דלק+מטען) היא M . במרווח זמן קצר בין t ל $t + \Delta t$ המסה הכוללת של הרקטה משתנה ל $M + \Delta M$, כאשר הרקטה שורפת " ΔM – מסה" של דלק, ומסוגלת לייצר תוספת מהירות Δv בסביבה חופשית מכוחות חיצוניים.

התנע הקוי של רכב הרקטה הוא $M * v$, בזמן $t + \Delta t$ התנע של הרכב הוא $(M + \Delta M) * (v + \Delta v)$, בעוד שהתנע של גזי הפליטה שמרוחקים במרווח הזמן t ו $t + \Delta t$ הוא $(-\Delta M) * (v - c)$.(constant=c). כתוצאה מכך, עקרון שימוש התנע הלינארי מניב את המשוואה המקורבת הבאה: $M * v \doteq (M + \Delta M) * (v + \Delta v) + (-\Delta M) * (v - c)$ עם קירוב $\Delta t \rightarrow 0$.

אם נפשט ונחלק ב Δt ו M ונקבל:

$$(5) M * v = M * v + M * \Delta v + \Delta M * v + \Delta M * \Delta v - v * \Delta M + c * \Delta M$$

$$M * \Delta v = -\Delta M * \Delta v - c * \Delta M$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \doteq -\frac{c}{M} * \frac{\Delta M}{\Delta t} - \frac{\Delta M}{M} * \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

נקרב $\Delta t \rightarrow 0$ ואז נקבל משוואת הרקטה שהיא:

$$(6) \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{M} * \frac{dM}{dt}$$

משוואת הרקטה מתייחסת לתאוצת הרכב $\frac{dv}{dt}$, ולשיעור הדלק $\frac{dM}{dt}$ כאשר הכוחות החיצוניים מוזנחים.

מכיוון שהנחנו שמנוע הרכב צורך דלק בקצב קבוע בזמן שהוא פועל והוא

$$\frac{dM}{dt} = -k \text{ והנחנו ש } M(t) = P + M_0 - kt \text{ (משוואה (3)) , לכן נוכל לקבל}$$

$$\text{את משוואה (6) כך: } \frac{dv}{dt} = \frac{ck}{P+M_0-kt}, \text{ המשתנים } v \text{ ו } t \text{ יכולים להפריד ביניהם}$$

$$dv = \frac{ck dt}{P+M_0-kt} \text{ באופן הבא ואז לקבל:}$$

$$\text{נעשה אינטגרציה ונקבל: } v(t) = -c * \ln(P + M_0 - kt) + B \text{ (7) כאשר}$$

הקבוע B בא לידי ביטוי במונחים של המהירות ההתחלתית v_0 .

$$\text{נציב ב } t=0 \text{ (7): } v_0 = -c * \ln(P + M_0) + B \text{ ולכן נקבל כי}$$

$$B = v_0 + c * \ln(P + M_0) \text{ , לפיכך נוכל לכתוב משוואה (7) כך:}$$

$$v(t) = -c * \ln(P + M_0 - kt) + v_0 + c \ln(P + M_0) =$$

$$v_0 - c * \ln\left(\frac{P + M_0 - kt}{P + M_0}\right) = v_0 - c * \ln\left(1 - \frac{kt}{P + M_0}\right)$$

אם נציב במקום t את t_b במשוואה שקיבלנו לעיל , ונקבל ביטוי לתוספת

המהירות Δv :

$$\Delta v = v(t_b) - v_0 = v_0 - c * \ln\left(1 - \frac{kt_b}{P + M_0}\right) - v_0$$

$$= -c * \ln\left(1 - \frac{kt_b}{P + M_0}\right)$$

$$\text{לפי (4) } kt_b = (1 - S) * M_0 \text{ ו } (R + 1) * M_0 = P + M_0 \text{ ולכן נקבל ש:}$$

$$(8) \Delta V = -c * \ln\left(\frac{R+S}{R+1}\right)$$

המהירות הנדרשת בכדי להכניס חללית למסלול מעגלי של 160.9344 קמ"ש (100

מל/שעה) מעל פני השטח של כדור היא 28788.48 קמ"ש (17500 מל"ש).

אם נשתמש בערכים האופייניים של R ו S ונציב $c=9656.064$ קמ"ש שזה מהירות

הפליטה, אז נקבל כי תוספת המהירות הניתנת על ידי הביטוי (8) היא:

$$\Delta V = -9656.064 * \ln\left(\frac{0.21}{1.01}\right) = -9656.064 * \ln(0.2079) =$$

$$15165.7955 \text{ km/h}$$

תוספת המהירות בפועל המסופקת על ידי רקטה בשלב אחד תהיה פחות מהמספר

שחושב לעיל, כי מההתחלה הנחנו שהכוחות החיצוניים מוזנחים.

לפיכך, לא ניתן למקם את החללית במסלול מעגלי של 160.9344 קמ"ש מעל פני השטח של כדור הארץ עם רקטה בשלב אחד, ולכן רק רקטה של שלבים רבים יכולה להשיג המהירות הנדרשת להכנבה לחללית שהיא 28163.52 קמ"ש. בנוסף, אם נציב ערכים קטנים מהערכים הנתונים של S ו R נקבל מהירות גדולה יותר מהמהירות הנדרשת, ואם נקבל ערכים הגדולים מהם נקבל תשובות של ערכים שליליים.

הערה: (בנספחים מוצגים ערכים שונים של S ו R).

פרק 2: אופטימיזציה בתכנון רקטות של שלבים רבים

בפרק הזה נבחין את הרקטות עם n שלבים.

א. שיטת לגרנג' לאופטימיזציה של מסה.

הנחות:

השלב ה- i מכיל מסות כוללות M_i , גורם מבנה S_i , ומהירות פליטה של מנוע c_i . המטרה שלנו לבחור M_i מינמלי עבור $i=1,2,\dots,n$ כך שימזער את המסה הכוללת שהיא $M_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ (9) של רכב הרקטה למגבלה כך שהמהירות הסופית של הרקטה אחרי שחיקת הלשב האחרון תהיה v_f .

אם P הוא המסה של המטען של רכב הרקטות בשלב ה- n , אז השלב ה- i יכול להיחשב כרקטה של שלב אחד עם מסה כוללת שהיא

$$M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P$$

כתוצאה מכך, יכולים לכתוב על ידי משוואה (8) את תוספת המהירות ΔV_i המסופקת על ידי השלב i כ:

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= -c \ln \left[1 - \frac{(1 - S_i) * M_i}{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] \\ &= -c \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P - M_i + S_i M_i}{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] \\ &= +c \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] \end{aligned}$$

לפיכך, העובדה שהמהירות הסופית של הרקטה של n שלבים נקבעת כ- v_f יכולים לבטא בצורה הזאת:

$$(10) \quad v_f - \sum_{i=1}^n c_i \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] = 0$$

לכן, אנחנו רוצים למזער את הפונקציה M_0 ב (9) לפי האילוץ (10).

האילוץ (10) קשה להשתמש בו בכדי ליישם כופלי לגרנג' לבעיית מינימום בתבנית הזאת כי היא מורכבת, ולכן נעשה שינוי משתנים לפשט השימוש בה.

$$N_i = \frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}, \quad N_1, N_2, \dots, N_n$$

ולכן נוכל לכתוב את האילוץ (10) כך: $v_f - \sum_{i=1}^n c_i \ln N_i = 0$ נסמן ב: (10)'

אם נעשה שינוי משתנים גם בפונקציה (9) נקבל ביטוי קשה להשתמש ולכן קודם נחליף את הפונקציה עם פונקציה אחרת פשוטה יותר שיש לה אותו ערך מינימלי באותו תפקיד, בכדי לעשות את האמור לעיל, ראשית נקפיד כי לכל i :

$$\begin{aligned}
 & \frac{M_i + M_{i+1} + \dots M_n + P}{M_{i+1} + \dots M_n + P} \\
 &= \frac{(1 - S_i) * (M_i + M_{i+1} + \dots M_n + P)}{(S_i M_i - S_i M_i) + (1 - S_i) * (M_{i+1} + \dots M_n + P)} \\
 &= \frac{(1 - S_i) * (M_i + M_{i+1} + \dots M_n + P)}{S_i M_i + (1 - S_i) M_{i+1} + \dots + (1 - S_i) M_n + (1 - S_i) P - S_i M_i} \\
 &= \frac{(1 - S_i) * (M_i + M_{i+1} + \dots M_n + P)}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P - S_i (M_i + \dots + M_n + P)} \\
 &= \frac{(1 - S_i) * (M_i + M_{i+1} + \dots M_n + P)}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \\
 & * \frac{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P - S_i (M_i + \dots + M_n + P)} = \\
 & \frac{[(1-S_i)*N_i]}{\left(\frac{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P - S_i (M_i + \dots + M_n + P)}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right)} = \frac{[(1-S_i)*N_i]}{\left(1 - \left[\frac{S_i (M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P)}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] \right)} = \\
 & [(1 - S_i) * N_i] / [1 - S_i * N_i] = \frac{(1-S_i)*N_i}{1-S_i*N_i} \quad (11)
 \end{aligned}$$

כתוצאה מכך, מאז :

$$\begin{aligned}
 \frac{M_0 + P}{P} &= \left[\frac{M_1 + \dots + M_n + P}{M_2 + \dots + M_n + P} \right] * \left[\frac{M_2 + \dots + M_2 + P}{M_3 + \dots + M_n + P} \right] \\
 & * \left[\frac{M_{n-1} + M_n + P}{M_n + P} \right] * \left[\frac{M_n + P}{P} \right]
 \end{aligned}$$

מכאן יוצא ש :

$$(12) \quad \frac{M_0 + P}{P} = \left[\frac{(1-S_1)N_1}{1-S_1N_1} * \frac{(1-S_2)N_2}{1-S_2N_2} * \dots * \frac{(1-S_n)N_n}{1-S_nN_n} \right]$$

מכיוון ש P הוא קבוע, למזער את הפונקציה M_0 ב (9) שווה למזער את $\frac{M_0+P}{P}$,

אשר בתורו שווה למזער הפונקציה $\ln\left(\frac{M_0+P}{P}\right)$, אף על פי כן מ (12) נקבל:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{M_0+P}{P}\right) &= \ln\left[\frac{(1-S_1)N_1}{1-S_1N_1} * \frac{(1-S_2)N_2}{1-S_2N_2} * \dots * \frac{(1-S_n)N_n}{1-S_nN_n}\right] = \\ &= \ln\left(\frac{(1-S_1)N_1}{1-S_1N_1}\right) + \ln\left(\frac{(1-S_2)N_2}{1-S_2N_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{(1-S_n)N_n}{1-S_nN_n}\right) = \\ &= \ln(1-S_1)N_1 - \ln(1-S_1N_1) + \ln(1-S_2)N_2 - \ln(1-S_2N_2) \\ &\quad + \dots + \ln(1-S_n)N_n - \ln(1-S_nN_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ln(1-S_1) + \ln N_1 - \ln(1-S_1N_1) + \ln(1-S_2) + \ln N_2 - \\ &\ln(1-S_2N_2) + \dots + \ln(1-S_n) + \ln N_n - \ln(1-S_nN_n) = \\ &\sum_{i=1}^n [\ln(1-S_i) + \ln N_i - \ln(1-S_iN_i)] \quad (13) \end{aligned}$$

עבור משוואה (13) ואילוץ (10) בונים את פונקציית לגרנג':

$$\begin{aligned} L(N_1, N_2, \dots, N_n, \lambda) &= \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln(1-S_i) + \ln N_i - \ln(1-S_iN_i)] + \lambda * \left(v_f - \sum_{i=1}^n c_i \ln N_i \right) \end{aligned}$$

נבנה מערכת משוואות :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial N_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial N_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial N_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

כלומר:

$$\star \begin{cases} \frac{1}{N_1} + \frac{S_1}{1-S_1N_1} - \lambda \frac{c_i}{N_1} = 0 \\ \frac{1}{N_2} + \frac{S_1}{1-S_1N_2} - \lambda \frac{c_i}{N_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{N_n} + \frac{S_1}{1-S_1N_n} - \lambda \frac{c_i}{N_n} = 0 \\ (v_f - \sum_{i=1}^n c_i \ln N_i) = 0 \end{cases}$$

$\star$ נבחר נקודות $N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*$ כנקודות מינימום לבעיה הזאת, נציב אותם בתוך ונקבל:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_1^*} + \frac{S_1}{1-S_1N_1^*} - \lambda \frac{c_i}{N_1^*} &= 0 \\ \frac{1}{N_2^*} + \frac{S_1}{1-S_1N_2^*} - \lambda \frac{c_i}{N_2^*} &= 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{N_n^*} + \frac{S_1}{1-S_1N_n^*} - \lambda \frac{c_i}{N_n^*} &= 0 \\ \left(v_f - \sum_{i=1}^n c_i \ln N_i \right) &= 0 \end{aligned}$$

לכן כופל לגרנג'י λ^* חייב לקיים את האילוץ (10) וגם הביטוי :

$$\frac{1}{N_i^*} + \frac{S_i}{1-S_i N_i^*} - \lambda^* \frac{c_i}{N_i^*} = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

שזה שווה ל- :

$$\frac{(1-\lambda^* c_i)}{N_i^*} + \frac{S_i}{1-S_i N_i^*} = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

המשוואות לעיל ניתן לפתור אותם עבור N_i^* במונחים של λ^* בכדי להשיג את :

$$\frac{(1-\lambda^* c_i)}{N_i^*} = - \frac{S_i}{1-S_i N_i^*} \rightarrow -N_i^* S_i = 1 - S_i N_i^* - \lambda^* c_i + \lambda^* c_i S_i N_i^*$$

$$(14) \rightarrow N_i^* = \frac{\lambda^* c_i - 1}{\lambda^* c_i S_i}$$

אם נחליף את הערכים של N_i^* במשוואה (10) אז נקבל :

$$(15) \quad v_f = \sum_{i=1}^n c_i \ln \left[\frac{\lambda^* c_i - 1}{\lambda^* c_i S_i} \right]$$

במקרה המיוחד כאשר גורם המבנה S_i בכל השלבים שווה ל- S , ומהירות פליטה

c_i בכל השלבים שווה ל- c אז המשוואות (14) ו (15) יהיו :

$$N_i^* = \frac{\lambda^* c - 1}{\lambda^* c S} \quad i=1,\dots,n \quad (14)'$$

$$v_f = n c \ln \left[\frac{\lambda^* c - 1}{\lambda^* c S} \right] \quad (15)'$$

נפתור משוואה (15) עבור λ^* ונקבל :

$$e^{\frac{v_f}{nc}} = e^{\ln \left[\frac{\lambda^* c - 1}{\lambda^* c S} \right]}$$

$$e^{\frac{v_f}{nc}} = \frac{\lambda^* c - 1}{\lambda^* c S}$$

$$\lambda^* c S e^{\frac{v_f}{nc}} = \lambda^* c - 1$$

$$\lambda^* \left[c \left(1 - \left(S e^{\frac{v_f}{nc}} \right) \right) \right] = 1$$

$$\lambda^* = \left(c \left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right) \right)^{-1} \quad (16)$$

ואז משוואה (14) מקבלת הערך המשותף N^* של $N_1, N_2, \dots, N_n$ אחרי הצבת λ^*

$$N^* = \frac{\left(c \left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right) \right)^{-1} * c - 1}{\left(c \left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right) \right)^{-1} * c * s} = \frac{\left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right)^{-1} - 1}{\frac{v_f}{(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}})^{-1} s}} = \frac{1 - 1 + S e^{\frac{v_f}{nc}}}{\frac{v_f}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}}} * \frac{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}}{s} = e^{\frac{v_f}{nc}}$$

$$\rightarrow N^* = e^{\frac{v_f}{nc}}$$

הערך המשותף הזה יכולים להחילף אותו במשוואה (12) ונקבל:

$$\frac{M_0 + P}{P} = \frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} * \frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} * \dots * \frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} = \left(\frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} \right)^n \rightarrow$$

$$\frac{M_0 + P}{P} = \left(\frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} \right)^n$$

נוציא משוואה לעיל את M_0 ונקבל:

$$M_0 = \left[\left(\frac{(1-S)e^{\frac{v_f}{nc}}}{1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}} \right)^n - 1 \right] * P = \left[\frac{(1-S)^n e^{\frac{v_f}{c}}}{\left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right)^n} - 1 \right] * P \quad (17)$$

עד כה קיבלנו את המשוואה עבור המסה האופטימלית (17).

ב. בחירת מספר השלבים המתאים ביותר על פי הקשר בין עלות ומסה.

בימוי אפטימלי עבור עלות מינימלית:

לפי המאמר [2] נתונה משוואה של עלות אופטימלית שהיא:

$$C_i = C_{min}^{(i)} + k_3^{(i)} e^{-k_4^{(i)} M_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

כאשר $k_4^{(i)} = 0.253 \cdot 10^{-5}$ ו $C_{min}^{(i)} = 1$ ו $k_3^{(i)}$ משתנה.
לפיה אנחנו נעבוד ונמצא עלויות עבור כל שלב של רקטות.
נניח כי הערכים ל k_3 הם לפי [2]:

שלב	1	2	3	4	5
k_3	15	17	19	21	23

אחרי שקיבלנו את המשוואות עבור מסה אופטימלית ועלות אופטימלית נקשר אותם לבעיה שאנחנו עוסקים בה.

נניח כי אנחנו רוצים למקם חללית במסלול מעגלי מעל פני השטח של כדור הארץ בגובה 160.9344 ק"מ עם רכב רקטות רב שלבים, ונניח כי בכל השלבים יש לרקטות אותו ערך של גורם מבנה $S=0.2$ ומהירות פליטה $c=9656.064$ ק"מ. אנחנו רוצים לחשב את מסה כוללת מינימלית של רכב הרקטה בשלב n מסוים המסוגל להיכנס למסלול זה עבור $n=2,3,4,5$, ובנוסף לחשב מהו השלב הכי מתאים ביחס גם למסה כוללת מינימלית ולעלות אופטימלית.

בסוף הפרק הראשון ציינו כי החלק הראשון ברקטות של שלב אחד, המהירות הסופית הנדרשת למסלול היא שווה ל 28163.52 קמ/שעה שסימנו ב v_f . מאחר שגורם המבנה נתון כ $S=0.2$ ומהירות הפליטה היא $c=9656.064$ לכל שלב אנחנו יכולים לחשב הערך המשותף N^* לכל השלבים ואז לחשב את המסות:

$$N^* = e^{\frac{v_f}{nc}} \text{ לפי } N_2^* \text{ ו } N_1^* \text{ של } N^*$$

הערה: נניח כי בכל השלבים $p=1$.

n=2 :

$$N^* = e^{\frac{28163.52}{2*9656.064}} = 4.298$$

$$\frac{(1-S) * N^*}{1-S * N^*} = \frac{0.8 * 4.298}{1-0.2 * 4.298} = 24.494$$

לפי (11) :

$$\frac{M_2+P}{P} = \frac{(1-S)*N^*}{1-S*N^*} = 24.494$$

$$\rightarrow M_2 = 23.494$$

נחשב את M_1 גם לפי (11) :

$$\frac{M_1+M_2+P}{M_2+P} = 24.494 \rightarrow$$

$$M_1 = 24.494 * (M_2 + P) - M_2 - P = 24.494 * 24.494P - 23.494P - P = 575.426P$$

$$\rightarrow M_1 = 575.426$$

n=3 :

$$N^* = e^{\frac{28163.52}{3*9656.064}} = 2.644$$

$$\frac{(1-S) * N^*}{1-S * N^*} = \frac{0.8 * 2.644}{1-0.2 * 2.644} = 4.489$$

$$\frac{M_3 + P}{P} = \frac{(1-S) * N^*}{1-S * N^*} = 4.489$$

$$\rightarrow M_3 = 3.489$$

$$\frac{M_2+M_3+P}{M_3+P} = 4.489 \rightarrow M_2 = 4.489 * (M_3 + P) - M_3 - P = 4.489 * 4.489P - 3.489P - P = 15.662P$$

$$\rightarrow M_2 = 15.662$$

$$\frac{M_1+M_2+M_3+P}{M_2+M_3+P} = 4.489 \rightarrow M_1 = (M_2+M_3 + P) * 4.489 - M_2 - M_3 - P =$$

$$20.151P * 4.489 - 15.662P - 3.489P - P = 70.306P$$

$$\rightarrow M_1 = 70.306$$

n=4 :

$$N^* = e^{\frac{28163.52}{4*9656.064}} = 2.0733$$

$$\frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = \frac{0.8 * 2.0733}{1 - 0.2 * 2.0733} = 2.833$$

$$\frac{M_4 + P}{P} = \frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = 2.833$$

$$\rightarrow M_4 = 1.833$$

$$\frac{M_3 + M_4 + P}{M_4 + P} = 2.833 \rightarrow M_3 = 2.833 * (M_4 + P) - M_4 - P = 2.833 *$$

$$2.833P - 2.833P = 5.193P$$

$$\rightarrow M_3 = 5.193$$

$$\frac{M_2 + M_3 + M_4 + P}{M_3 + M_4 + P} = 2.833 \rightarrow M_2 = 2.833 * (M_3 + M_4 + P) - M_3 - M_4 -$$

$$P = 14.711P$$

$$\rightarrow M_2 = 14.711$$

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + P}{M_2 + M_3 + M_4 + P} = 2.833 \rightarrow M_1 = 2.833 * (M_2 + M_3 + M_4 + P) -$$

$$M_2 - M_3 - M_4 - P = 41.678P$$

$$\rightarrow M_1 = 41.678$$

n=5 :

$$N^* = e^{\frac{28163.52}{5*9656.064}} = 1.792$$

$$\frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = \frac{0.8 * 1.792}{1 - 0.2 * 1.792} = 2.234$$

$$\frac{M_5 + P}{P} = \frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = 2.234$$

$$\rightarrow M_5 = 1.234$$

$$\frac{M_4 + M_5 + P}{M_5 + P} = 2.234 \rightarrow M_4 = 2.234 * (M_5 + P) - M_5 - P = 2.757P$$

$$\rightarrow M_4 = 2.757$$

$$\frac{M_3 + M_4 + M_5 + P}{M_4 + M_5 + P} = 2.234 \rightarrow M_3 = 2.234 * (M_4 + M_5 + P) - M_4 - M_5 -$$

$$P = 6.159P$$

$$\rightarrow M_3 = 6.159$$

$$\frac{M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + P}{M_3 + M_4 + M_5 + P} = 2.234 \rightarrow M_2 = 2.234 * (M_3 + M_4 + M_5 + P) - M_3 -$$

$$M_4 - M_5 - P = 13.761P$$

$$\rightarrow M_2 = 13.761$$

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + P}{M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + P} = 2.234$$

$$\rightarrow M_1 = 2.234 * (M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + P) - M_2 - M_3 - M_4 - M_5 -$$

$$P = 30.740P$$

$$\rightarrow M_1 = 30.740$$

בכדי לבדוק שהחישובים שעשינו הם נכונים, נחשב M_0 לפי (17):

מספר של השלב	חישוב M_0 לפי (17)	סכום של M_i
n=2	$M_0 = \left[\left(\frac{(1-0.2)e^{\frac{28163.52}{2*9656.064}}}{1-0.2e^{\frac{28163.52}{2*9656.064}}} \right)^2 - 1 \right] * P =$ 600.332	575.426+23.494=599≈600
n=3	$M_0 = \left[\left(\frac{(1-0.2)e^{\frac{28163.52}{3*9656.064}}}{1-0.2e^{\frac{28163.52}{3*9656.064}}} \right)^3 - 1 \right] * P =$ 89.42	70.306+15.662+3.489=89.457
n=4	$M_0 = \left[\left(\frac{(1-0.2)e^{\frac{28163.52}{4*9656.064}}}{1-0.2e^{\frac{28163.52}{4*9656.064}}} \right)^4 - 1 \right] * P =$ 63.48	41.678+14.711+5.193+1.833=63.415

30.74+13.761+6.159+2.757+ 1.234=54.71	$M_0 = \left[\left(\frac{(1-0.2)e^{\frac{28163.52}{5*9656.064}}}{1-0.2e^{\frac{28163.52}{5*9656.064}}} \right)^5 - 1 \right] * P =$	n=5
	54.70	

עד כה חישבנו את המסות בכל שלב בנפרד.
בשלב הבא נחשב את העלויות בכל שלב על סמך החישובים של המסות בשלב
הקודם, נשתמש בנוסחה :

$$C_i = C_{min}^{(i)} + k_3^{(i)} e^{-k_4^{(i)} M_i}$$

n=2:

$$C_1 = 1 + k_3^{(1)} e^{-k_4^{(1)} M_1} = 1 + 15e^{-0.253*10^{-5}*575.426} = 15.978$$

$$\rightarrow C_1 = 15.978$$

$$C_2 = 1 + k_3^{(2)} e^{-k_4^{(2)} M_2} = 1 + 17e^{-0.253*10^{-5}*23.494} = 17.999$$

$$\rightarrow C_2 = 17.999$$

נקבל כי :

$$\underline{C^2 = C_1 + C_2 = 33.977}$$

n=3:

$$C_1 = 1 + k_3^{(1)} e^{-k_4^{(1)} M_1} = 1 + 15e^{-0.253*10^{-5}*70.306} = 15.997$$

$$\rightarrow C_1 = 15.997$$

$$C_2 = 1 + k_3^{(2)} e^{-k_4^{(2)} M_2} = 1 + 17e^{-0.253*10^{-5}*15.662} = 17.999$$

$$\rightarrow C_2 = 17.999$$

$$C_3 = 1 + k_3^{(3)} e^{-k_4^{(3)} M_3} = 1 + 19e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 3.489} = 19.999$$

$$\rightarrow C_3 = 19.999$$

נקבל כי:

$$\underline{C^3 = C_1 + C_2 + C_3 = 53.995}$$

n=4:

$$C_1 = 1 + k_3^{(1)} e^{-k_4^{(1)} M_1} = 1 + 15e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 41.678} = 15.998$$

$$\rightarrow C_1 = 15.998$$

$$C_2 = 1 + k_3^{(2)} e^{-k_4^{(2)} M_2} = 1 + 17e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 14.711} = 17.999$$

$$\rightarrow C_2 = 17.999$$

$$C_3 = 1 + k_3^{(3)} e^{-k_4^{(3)} M_3} = 1 + 19e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 5.193} = 19.999$$

$$\rightarrow C_3 = 19.999$$

$$C_4 = 1 + k_3^{(4)} e^{-k_4^{(4)} M_4} = 1 + 21e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 1.833} = 21.999$$

$$\rightarrow C_4 = 21.999$$

נקבל כי:

$$\underline{C^4 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 75.995}$$

n=5:

$$C_1 = 1 + k_3^{(1)} e^{-k_4^{(1)} M_1} = 1 + 15e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 30.740} = 15.998$$

$$\rightarrow C_1 = 15.998$$

$$C_2 = 1 + k_3^{(2)} e^{-k_4^{(2)} M_2} = 1 + 17e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 13.761} = 17.999$$

$$\rightarrow C_2 = 17.999$$

$$C_3 = 1 + k_3^{(3)} e^{-k_4^{(3)} M_3} = 1 + 19e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 6.159} = 19.999$$

$$\rightarrow C_3 = 19.999$$

$$C_4 = 1 + k_3^{(4)} e^{-k_4^{(4)} M_4} = 1 + 21e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 2.757} = 21.999$$

$$\rightarrow C_4 = 21.999$$

$$C_5 = 1 + k_3^{(5)} e^{-k_4^{(5)} M_5} = 1 + 23e^{-0.253 \cdot 10^{-5} \cdot 1.234} = 23.999$$

$$\rightarrow C_5 = 23.999$$

נקבל כי :

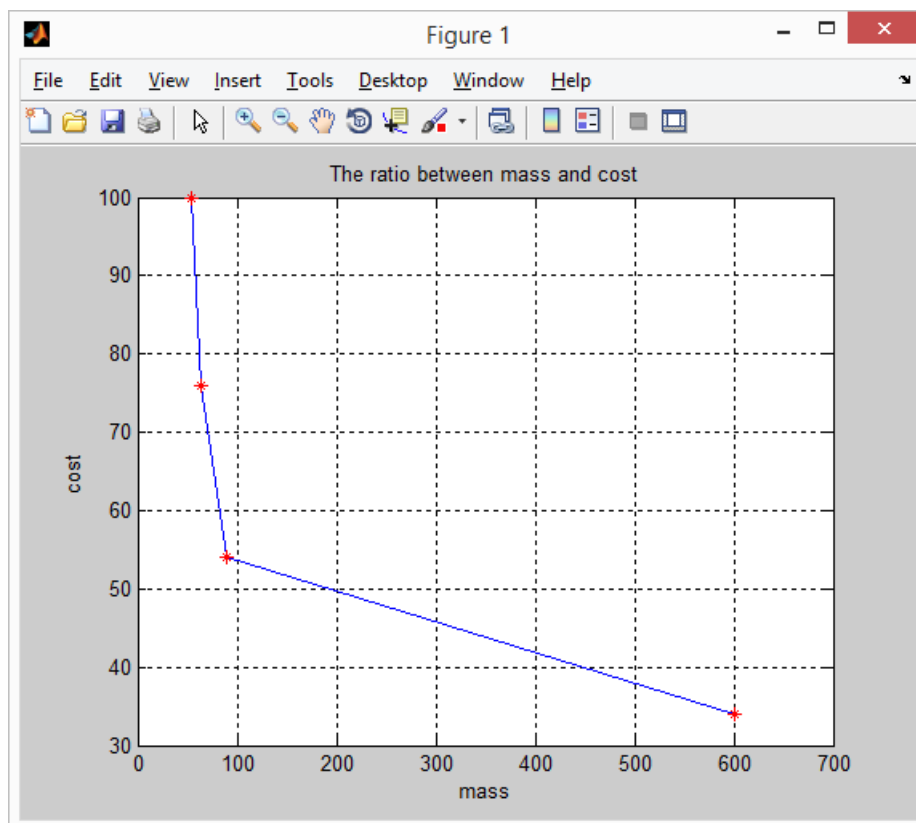
$$\underline{C^5 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 99.994}$$

מסקנות :

טבלה המסכמת כל הערכים שקיבלנו לעיל:

5	4	3	2	שלב
$M_0^5 = 54.7$	$M_0^4 = 63.48$	$M_0^3 = 89.42$	$M_0^2 = 600.33$	מסה כוללת בשלב n
$C_0^3 = 99.994$	$C_0^4 = 75.995$	$C_0^3 = 53.995$	$C_0^2 = 33.997$	עלות כוללת בשלב n

גרף שמתאר הנקודות עבור המסות והעלות:



לפי התשובות שקיבלנו אנחנו יכולים לראות את היחסים בין המעבר מרקטה בעלת

שלב מסויים לרקטה בשלב אחר, כלומר:

(א) אם אנחנו עוברים מרקטה בעלת שני שלבים לרקטה בעלת 3 שלבים נמצא כי

היחס בין המסות קטן פי 6 והעלות גדלה פי 1.589.

(ב) המעבר מרקטה בעלת 3 שלבים לרקטה בעלת 4 שלבים: היחס בין המסות קטן

1.4 והיחס בין העלות גדל 1.407.

(ג) העמבר מרקטה בעלת 4 שלבים לרקטה בעלת 5 שלבים: היחס בין המסות קטן

1.16 והיחס בין העלות גדל 1.315.

אנחנו יכולים לראות שהיחסים בהמעברים ב-ו-ג קרובים יחסית, אבל שלב 3 הוא

כדאי יותר, העלות בו יותר קטנה משלב רביעי, ולכן הרקטות הכי נפוצים מורכבים

מ 3 שלבים.

ג. חישוב מסה מינימלית M_0 והמסות M_1 ו M_2 ו M_3

ברקטה בעלת 3 שלבים.

❖ בגובה של 100 מיל (160.9344 קמ"ש) מעל פני השטח של כדור הארץ, מהירות החלל, שהיא המהירות המינימלית הנדרשת להרחיק אובייקט (חפץ) מכדור הארץ להימלט מכוח המשיכה של כדור הארץ היא שווה בערך 24,700 מיל/שעה (39,750.796 קמ"ש).
רכב רקטה בעל 3 שלבים ישומש כבדיקה לשיגור חללית בעלת מסה P להשיג מהירות המילוט הנדרשת בגובה 100 מיל/ש (160.9344 קמ"ש).
נרצה לחשב את המסה המינימלית M_0 של רכב רקטה המסוגל לקיים משימה זו ומסות כוללות של רקטה בעלת 3 שלבים.
נתון כי הגורם המבני של שלושת השלבים הוא $S=0.2$ ומהירות פליטה של המנוע קבועה ושווה ל $c=6000$ mi/hr (9656.064 קמ"ש).

❖ קודם כל בכדי לחשב את המסה המינימלית נשתמש במשוואה (17) ונקבל:

$$M_0 = \left[\frac{(1-S)^n e^{\frac{v_f}{c}}}{\left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}\right)^n} - 1 \right] * P = \left[\frac{(1-0.2)^3 e^{\frac{39750.7968}{9656.064}}}{\left(1 - 0.2 * e^{\frac{39750.7968}{3*9656.064}}\right)^3} - 1 \right] * P = 3335.524P$$

בכדי לחשב את M_3, M_2, M_1 :

קודם כל נשתמש במשוואה (16) ונחשב את λ :

$$\lambda^* = \left(c \left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}} \right) \right)^{-1} = \left(9656.064 \left(1 - 0.2 e^{\frac{39750.7968}{3*9656.064}} \right) \right)^{-1}$$

$$= 0.0004903$$

אחרי חישוב ה λ נוכל לחשב לפי (14) את N_i^* :

$$N_i^* = \frac{\lambda^* c_i - 1}{\lambda^* c_i S_i} = \frac{0.0004903 * 9656.064 - 1}{0.0004903 * 9656.064 * 0.2} = 3.9449$$

נשאר לנו לחשב לפי (11) את המבוקש:

$$\frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = \frac{0.8 * 3.9449}{1 - 0.2 * 3.9449} = 14.9555$$

$$\frac{M_3 + P}{P} = \frac{(1-S) * N^*}{1 - S * N^*} = 14.9555$$

$$\rightarrow M_3 = 13.9555P \approx 14P$$

$$\frac{M_2+M_3+P}{M_3+P} = 14.9555 \rightarrow M_2 = 14.9555 * (M_3 + P) - M_3 - P =$$

$$14.9555 * 15P - 14P - P = 209.3325P$$

$$\rightarrow M_2 = 209.3325P$$

$$\frac{M_1+M_2+M_3+P}{M_2+M_3+P} = 14.9555 \rightarrow M_1 = (M_2+M_3 + P) * 14.9555 -$$

$$M_2 - M_3 - P = 223.3325P * 14.9555 - 209.3325P - 14P - P =$$

$$3115.716P$$

$$\rightarrow M_1 = 3115.716P$$

בדרך הזאת, ולפי הנוסחאות שפיתחנו בפרק 2 אנחנו יכולים למצוא מסה כללית

M_0 והמסות $M_1, M_2, \dots, M_n$.

ד. חישוב M_0 כאשר הרקטה בעלת n שלבים כאשר $n \rightarrow \infty$.

בפרק 2 בסעיף ג' חישבנו את המסה הכוללת המינימלית של רכב רקטות n שלבים המסוגל החדרת מטען בעל מסה P במסלול מעגלי של 100 מיל (160.9344 קמ"ש) מעל פני השטח של כדור הארץ עבור $n = 2, 3, 4, 5$.
בסעיף הזה נחשב את הערך של המסה הכוללת המינימלית של רכב רקטה בעל n שלבים המסוגל להיכנס למסלול זה כאשר המספר של השלבים מתקרב לאינסוף.

לפי הביעה 1, אנחנו יכולים לכתוב את M_0 בצורה הבאה תוך התייחסות לנתוני השאלה: $v_f = 28163.52$, $S = 0.2$, $c = 9656.064$ ונקבל:

$$M_0 = \left[\frac{(1-S)^n e^{\frac{v_f}{c}}}{\left(1 - S e^{\frac{v_f}{nc}}\right)^n} - 1 \right] * P = \left[\frac{0.8^n e^{\frac{28163.52}{9656.064}}}{\left(1 - 0.2 * e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}\right)^n} - 1 \right] * P$$

נטפל בשבר :

$$\left[\frac{0.8^n e^{\frac{28163.52}{9656.064}}}{\left(1 - 0.2 * e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}\right)^n} \right] = \left(\left[\frac{0.8 * e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}}{1 - 0.2 e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}} \right] \right)^n$$

אם אנחנו משאיפים n לאינסוף מקבלים שהשבר הנ"ל שווה ל 1^∞ ולכן

נמצא את הגבול של השבר לפי הצבה: $a_n = b_n^{c_n}$.

$$c_n \rightarrow \infty \mid b_n = 1 \text{ כך ש } c_n = n \quad \vee \quad b_n = \left[\frac{0.8 * e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}}{1 - 0.2 e^{\frac{28163.52}{n * 9656.064}}} \right] \quad \text{נסמן}$$

$$a_n = b_n^{c_n}$$

$$\ln a_n = \ln b_n^{c_n}$$

$$\ln a_n = c_n \ln b_n = \frac{\ln b_n}{1/c_n} \left(\frac{0}{0} \right)$$

מציאת גבול לפי לופיטל, ונקבל בסוף:

$$a_n = e^{\frac{\ln b_n}{1/c_n}}$$

ולכן, אנחנו יכולים לכתוב את הביטוי בצורה הזאת:

$$e^{\frac{\ln \left[\frac{0.8 * e^{\frac{28163.52}{9656.064}}}{1 - 0.2 e^{\frac{28163.52}{9656.064}}} \right]}{1/n}}$$

נסמן $A = \frac{28163.52}{9656.064}$, נקבל :

$$e^{\frac{\ln \left[\frac{0.8 * e^{\frac{A}{n}}}{1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}}} \right]}{1/n}}$$

נתייחס למעריך של האקספוננט ונמצא את הגבול שלו :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left[\frac{0.8 * e^{\frac{A}{n}}}{1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}}} \right]}{\frac{1}{n}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}}}{0.8 * e^{\frac{A}{n}}} * \left[\frac{0.8 * e^{\frac{A}{n}} * \left(-\frac{A}{n^2} \right) * \left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right) - 0.8 * e^{\frac{A}{n}} * \left(-0.2 e^{\frac{A}{n}} * -\frac{A}{n^2} \right)}{\left(\left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right)^2 \right)} \right]}{-1/n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{-A * \left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right) - A * 0.2 e^{\frac{A}{n}}}{\left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{-A + A * -0.2 e^{\frac{A}{n}} - A * 0.2 e^{\frac{A}{n}}}{\left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{\left(1 - 0.2 e^{\frac{A}{n}} \right)} = \frac{A}{0.8} \\ &= \frac{28163.52}{9656.064} = 3.645833 \end{aligned}$$

נציב את מה שקיבלנו בביטוי של M_0 שזה מה שרצינו לחשב מההתחלה :

$$M_0 = e^{3.645833} - 1 = 37.314$$

פרק 3: אופטימיזציה למודל עם גרביטציה

בפרק זה נפתח את המשוואה (6) שפיתחנו בפרק 2, ששמה הגזירה הייתה מבוססת על ההנחה שכל הכוחות החיצוניים, כוללים כוח הכבידה הפועלים על הרקטה הם זניחים.

בסעיף הזה, נתייחס לרכיב התאוצה $-g$ כלא מוזנח, אבל שאר הכוחות החיצוניים האחרים כן מוזנחים.

בהתחלה נציג את המשוואה של התאוצה תוך התייחסות לרכיב התאוצה g . מאז המרחק נמדד כלפי מעלה מהשיגור, נובע שרכיב התאוצה הוא $-g$.

רכיב התאוצה בשל הדחף של המנוע הוא: $-\frac{c}{M} * \frac{dM}{dt}$, ולכן התאוצה הכוללת $\frac{dv}{dt}$ של רכב הרקטה בשל כוח הכבידה והדחף של המנוע היא מונחת בצורה

$$\text{הזאת: } \frac{dv}{dt} = -\frac{c}{M} * \frac{dM}{dt} - g \quad (18)$$

נלך לפי אותם השלבים בפרק 2 אבל תוך התייחסות לכוח כבידה g .

$$\text{לפי ההנחות בפרק 2: } \frac{dM}{dt} = -k \text{ ו } M(t) = P + M_0 - kt$$

לכן נוכל לקבל את משוואה (18) כך: $\frac{dv}{dt} = \frac{ck}{P+M_0-kt} - g$, המשתנים v ו t

$$\text{יכולים להפריד ביניהם באופן הבא ואז לקבל: } dv = \frac{ck dt}{P+M_0-kt} - gdt$$

$$\text{נעשה אינטגרציה ונקבל: } v(t) = -c * \ln(P + M_0 - kt) - gt + B \quad (19)$$

כאשר הקבוע B בא לידי ביטוי במונחים של המהירות ההתחלתית v_0 .

נציב $t=0$ ב (19) ונקבל אותה צורה של v_0 כיה t לא משפיע, הוא מתאפס.

$$v_0 = -c * \ln(P + M_0) + B:$$

$$\text{לפיכך נוכל לכתוב משוואה (19) כך: } B = v_0 + c * \ln(P + M_0)$$

$$v(t) = -c * \ln(P + M_0 - kt) - gt + v_0 + c \ln(P + M_0) =$$

$$v_0 - gt - c * \ln\left(\frac{P+M_0-kt}{P+M_0}\right) = v_0 - gt - c * \ln\left(1 - \frac{kt}{P+M_0}\right)$$

אם נציב במקום t את t_b במשוואה שקיבלנו לעיל, ונקבל ביטוי לתוספת

המהירות Δv :

$$\Delta v = v(t_b) - v_0 = v_0 - gt_b - c * \ln\left(1 - \frac{kt_b}{P + M_0}\right) - v_0$$

$$= -gt_b - c * \ln\left(1 - \frac{kt_b}{P + M_0}\right)$$

לפי (4) $kt_b = (1 - S) * M_0$ ו $(R + 1) * M_0 = P + M_0$ ולכן נקבל ש :

$$\Delta V = -g * \frac{(1 - s) * M_0}{k} - c * \ln\left(\frac{R + S}{R + 1}\right)$$

לפי ההנחות בפרק 2 :

$$(9) \quad M_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_n \quad \bullet$$

• המהירות הסופית של הרקטה אחרי שחיקת הלשב האחרון תהיה v_f .

• P הוא המסה של המטען של רכב הרקטות בשלב ה- n , אז השלב ה- i יכול להיחשב כרקטה של שלב אחד עם מסה כוללת שהיא

$$M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P$$

נציב בביטוי לעיל ונקבל :

$$\Delta V_i = -g * \frac{(1 - s) * (M_1 + M_2 + \dots + M_n)}{k} - c \ln \left[1 - \frac{(1 - S_i) * M_i}{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right]$$

$$= -g * \frac{(1 - s) * (M_1 + M_2 + \dots + M_n)}{k} - c \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P - M_i + S_i M_i}{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right]$$

$$= -g * \frac{(1 - s) * (M_1 + M_2 + \dots + M_n)}{k} + c \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right]$$

לפיכך, העובדה שהמהירות הסופית של הרקטה של n שלבים נקבעה כ v_f יכולים לבטא בצורה הזאת :

$$(20) \quad v_f - g * \frac{(1-s)*(M_1+M_2+\dots+M_n)}{k} - \sum_{i=1}^n c_i \ln \left[\frac{M_i+M_{i+1}+\dots+M_n+P}{S_i M_i+M_{i+1}+\dots+M_n+P} \right] = 0$$

המשוואה שקיבלו לא יכולים לפתור אותה בדרך אנלטית , ולכן פותרים בעית אופטימיזציה עם אילוץ בדרך הנומרית.

$$f(M_1, M_2, \dots, M_n) = \min f(M_0)$$

$$v_f - g * \frac{(1-s) * (M_1 + M_2 + \dots + M_n)}{k} - \sum_{i=1}^n c_i \ln \left[\frac{M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P}{S_i M_i + M_{i+1} + \dots + M_n + P} \right] = 0$$

נפתור את המשוואה עבור מקרים פרטיים כאשר $n=2,3,4,5$ לפי תוכנת המטל"ב ונקבל :

n=2 :

$$M_1 = 203.7192$$

$$M_2 = 13.7818$$

$$M_0 = 217.5010$$

n=3 :

$$M_1 = 60.7065$$

$$M_2 = 14.1396$$

$$M_3 = 3.2934$$

$$M_0 = 78.1395$$

n=4 :

$$M_1 = 38.0585$$

$$M_2 = 13.7046$$

$$M_3 = 4.9350$$

$$M_4 = 1.777$$

$$M_0 = 58.4750$$

n=5 :

$$M_1 = 28.5369$$

$$M_2 = 12.9379$$

$$M_3 = 5.8657$$

$$M_4 = 2.6594$$

$$M_5 = 1.2075$$

$$M_0 = 51.2055$$

השוואה בין הערכים של המסות שקיבלנו בפרק 2 בלי התייחסות לכוחות לבין
הערכים שקיבלנו בפרק 3 עם התייחסות לכוח גרביטציה:

שלב	כוחות מוזנחים	כוח גרביטציה מחושב
2	600.33	217.5010
3	89.42	78.1395
4	63.48	58.4750
5	54.7	51.2055

שלב	כוחות מוזנחים	כוח גרביטציה מחושב
2	$M_1 = 575.426$ $M_2 = 23.494$	$M_1 = 203.7192$ $M_2 = 13.7818$
3	$M_1 = 70.306$ $M_2 = 15.662$ $M_3 = 3.489$	$M_1 = 60.7065$ $M_2 = 14.1396$ $M_3 = 3.2934$
4	$M_1 = 41.678$ $M_2 = 14.711$ $M_3 = 5.193$ $M_4 = 1.833$	$M_1 = 38.0585$ $M_2 = 13.7046$ $M_3 = 4.9350$ $M_4 = 1.777$

$M_1 = 28.5369$	$M_1 = 30.74$	5
$M_2 = 12.9379$	$M_2 = 13.761$	
$M_3 = 5.8657$	$M_3 = 6.159$	
$M_4 = 2.6594$	$M_4 = 2.757$	
$M_5 = 1.2075$	$M_5 = 1.234$	

אנחנו יכולים לזהות דרך הטבלה שהערכים של המסה האופטימלית בכל השלבים קורבים יחסית(חוץ מהשלב השני) אבל כאשר מתייחסים לכוחות אז זה משפיע על המסות ומקטין אותם.

אותו דבר רואים בערכים של המסות, שכאשר התייחסנו לכוח הגרביטציה הערך של כל המסות קטן.

יכולים להסיק מכאן שכוחות משפיעים ומקטינים את הערך של המסות.

סיכום

הנושא של הפרויקט עניין אותי מאוד כי קודם כל הוא רלוונטי לחיינו, ושנית כי הוא מתעסק בהרבה כלים מתמטיים שלמדתי בקורסים שלי בתואר למשל: חשבון אינפיניטסימלי, אופטימיזציה, מכניקה, מטלב וכו'.

במהלך העבודה למדתי שהרבה דברים בחיינו לא פועלים בלי השימוש בכלים מתמטיים שנותנים לנו לתכנן, לחקור, לחשב כל מיני בעיות, למשל השימוש באופטימיזציה לחקור בעיה מסויימת.

בנוסף לזה, למדתי על המאפיינים של רקטות, שיש הרבה גורמים שמתייחסים אליהם בכדי לבנות את הרקטות בצורה הכי נכונה ויעילה שהזכרנו מהם 2 גורמים העלות והמבנה.

אנחנו יכולים לראות את ההבדל בפתרון של המשוואה שקיבלנו בפרק 2 ופרק 3, בפרק 2 פתרנו את המשוואה בדרך אנלטית, למרות שבפרק 3 אין דרך אנלטית שיכולים לפתור בה ולכן פותרים את זה נומרית.

נהניתי מאוד לעבוד על הפרויקט, התהליך היה טוב ומעניין, הגענו למסקנות מענניות שלא ידעתי מקודם, והעבודה נתנה לי ליישם כלים שלמדתי במהלך התואר בדרך מהנה, מעניינת ומאתגרת.

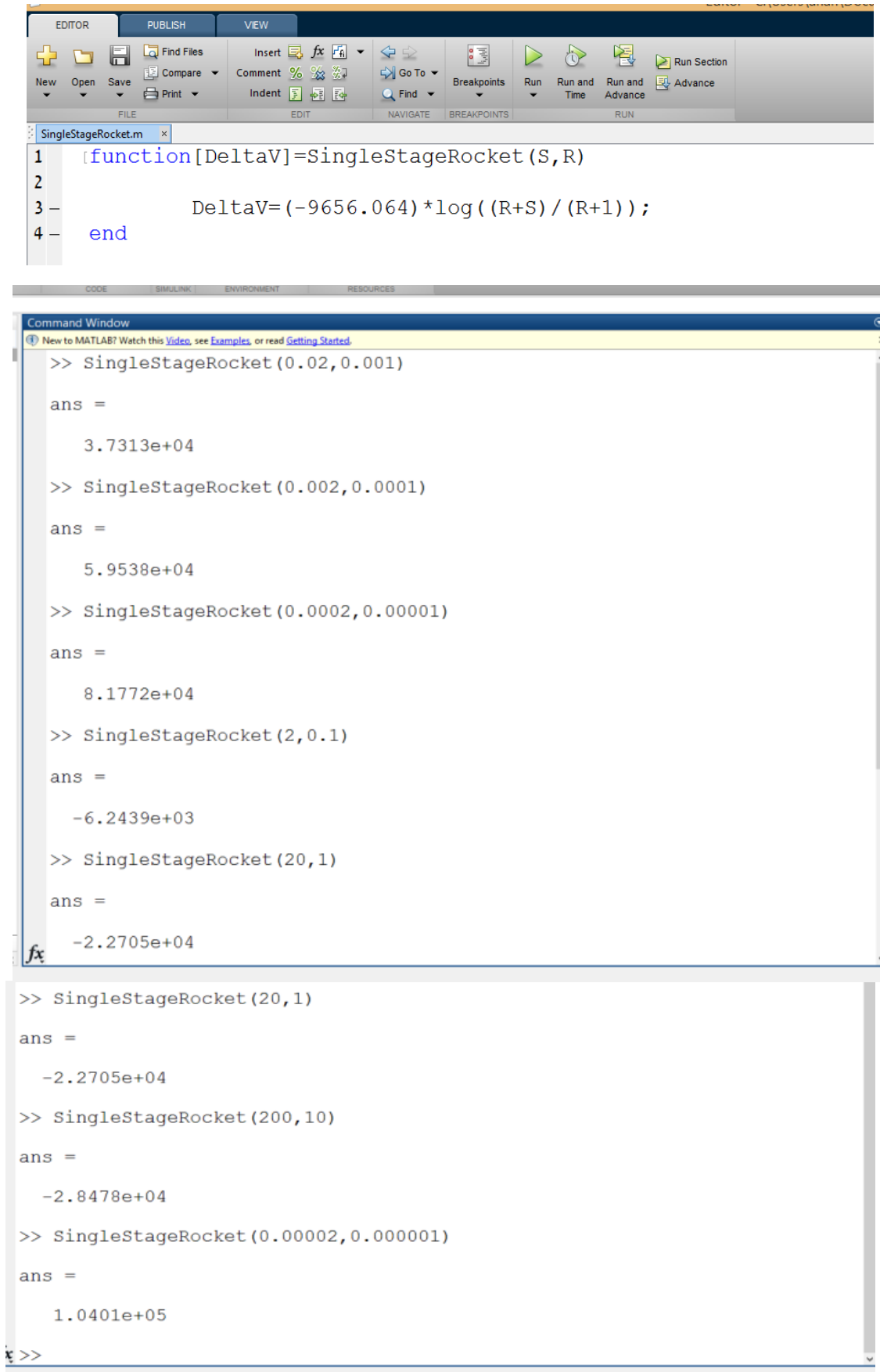
מטרה לעתיד היא לחקור את המשוואה עם כוחות חיצוניים, ולהגיע לערך סופי.

ביבליוגרפיה

- [1] Peressini, A.(1986).*Lagrange multipliers and the design of multistage rockets.*
- [2] Gray.J.S, &Alexander.R.V.(1965).*Cost and Weight Optimization for Multistage Rockets.*
- [3]Gecker, D.R.(1960).*IdealPerformance of Multistage Rockets.*Aeroproject-general-Sacramento, Calif.

נספחים

הפונקציה שחישבנו דרכה הערכים של S ו R והיחס שלהם למהירות הסופית:



The image displays the MATLAB environment. The top part shows the MATLAB Editor with a script named 'SingleStageRocket.m'. The script defines a function 'SingleStageRocket' that takes two inputs, S and R, and returns DeltaV. The function is as follows:

```
1 function [DeltaV]=SingleStageRocket(S,R)
2
3     DeltaV=(-9656.064)*log((R+S)/(R+1));
4 end
```

The bottom part shows the MATLAB Command Window with the following commands and results:

```
>> SingleStageRocket(0.02,0.001)
ans =
    3.7313e+04

>> SingleStageRocket(0.002,0.0001)
ans =
    5.9538e+04

>> SingleStageRocket(0.0002,0.00001)
ans =
    8.1772e+04

>> SingleStageRocket(2,0.1)
ans =
   -6.2439e+03

>> SingleStageRocket(20,1)
ans =
   -2.2705e+04

fx >> SingleStageRocket(20,1)
ans =
   -2.2705e+04

>> SingleStageRocket(200,10)
ans =
   -2.8478e+04

>> SingleStageRocket(0.00002,0.000001)
ans =
    1.0401e+05

>>
```

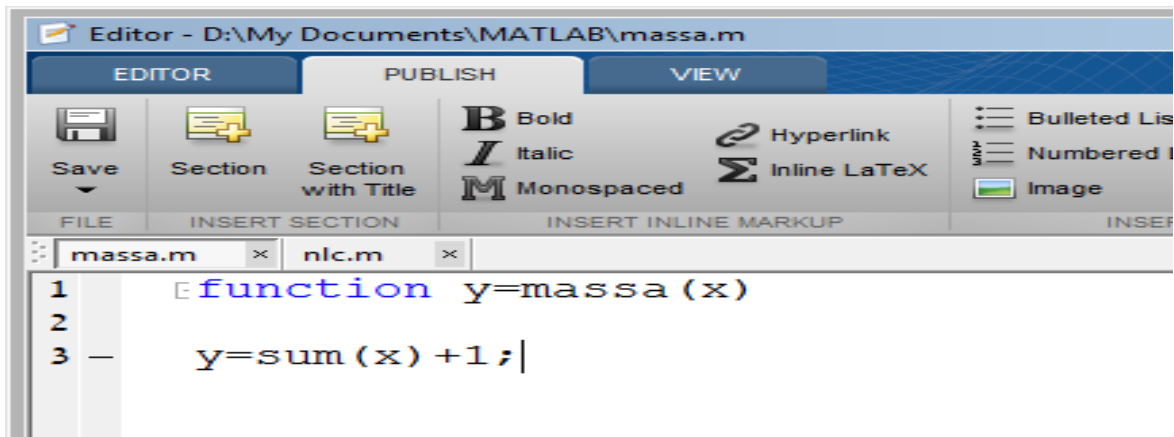
הגרף של הנקודות המייצגות את היחס בין העלות והמסה :

Command Window

 New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Examples](#), or read [Getting Started](#).

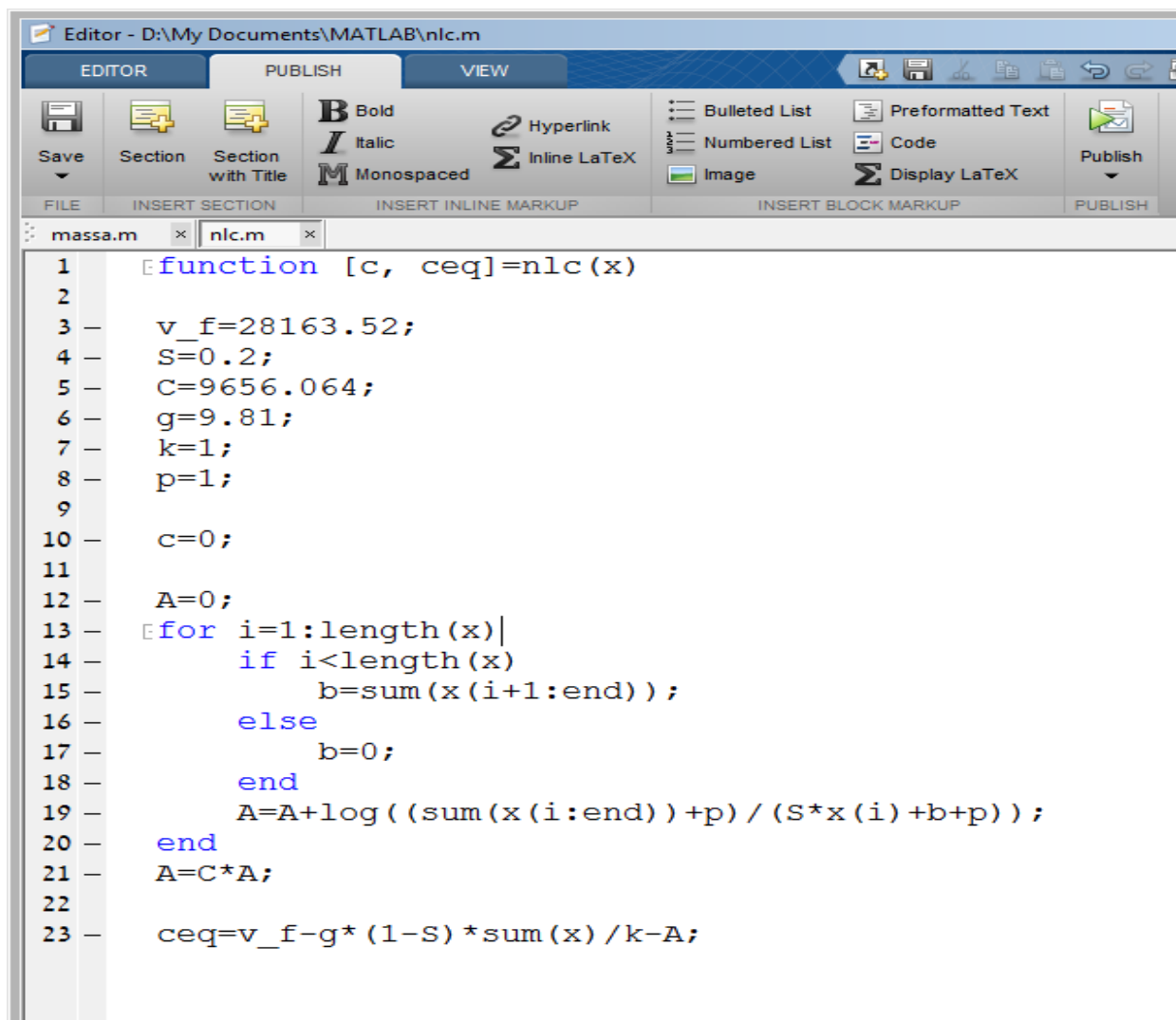
```
>> x=[600.33 89.42 63.48 54.7];  
>> y=[33.97 53.995 75.995 99.994];  
>> plot(x,y)  
>> grid on  
>> hold on  
>> xlabel('mass')  
>> ylabel('cost')  
>> title('The ratio between mass and cost')  
>> plot(600.33,33.97,'*r')  
>> plot(89.42,53.995,'*r')  
>> plot(63.48,75.995,'*r')  
>> plot(54.7,99.994,'*r')  
fx >> |
```

הפונקציה שהצגנו בפרק 3, משוואה עם גרביטציה:



The screenshot shows the MATLAB Editor window with the file 'massa.m' open. The editor has tabs for EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar includes icons for Save, Section, Section with Title, Bold, Italic, Monospaced, Hyperlink, Inline LaTeX, Bulleted List, Numbered List, and Image. The code in the editor is as follows:

```
1 function y=massa(x)
2
3 y=sum(x)+1;
```



The screenshot shows the MATLAB Editor window with the file 'nlc.m' open. The editor has tabs for EDITOR, PUBLISH, and VIEW. The toolbar includes icons for Save, Section, Section with Title, Bold, Italic, Monospaced, Hyperlink, Inline LaTeX, Bulleted List, Numbered List, Image, Preformatted Text, Code, Display LaTeX, and Publish. The code in the editor is as follows:

```
1 function [c, ceq]=nlc(x)
2
3 v_f=28163.52;
4 S=0.2;
5 C=9656.064;
6 g=9.81;
7 k=1;
8 p=1;
9
10 c=0;
11
12 A=0;
13 for i=1:length(x)
14     if i<length(x)
15         b=sum(x(i+1:end));
16     else
17         b=0;
18     end
19     A=A+log((sum(x(i:end))+p)/(S*x(i)+b+p));
20 end
21 A=C*A;
22
23 ceq=v_f-g*(1-S)*sum(x)/k-A;
```

n=2:

 New to MATLAB? Watch this [Video](#), see [Examples](#), or read [Getting Started](#).

```
>> x=fmincon(@massa,[575.426 23.494],[[],[],[],[],0,Inf,@nlc)
```

```
x =  
    203.7192    13.7818
```

```
>> sum(x)
```

```
ans =  
    217.5010
```

n=3:

```
>> x=fmincon(@massa,[70.306 15.662 3.489],[[],[],[],[],0,Inf,@nlc)
```

```
x =  
    60.7065    14.1396     3.2934
```

```
>> sum(x)
```

```
ans =  
    78.1395
```

n=4:

```
>> x=fmincon(@massa,[41.678 14.711 5.193 1.833],[[],[],[],[],0,Inf,@nlc)
```

```
x =
```

```
    38.0585    13.7046     4.9350     1.7770
```

```
>> sum(x)
```

```
ans =
```

```
    58.4750
```

n=5:

```
>> x=fmincon(@massa,[30.74 13.761 6.159 2.757 1.234],[[],[],[],[],0,Inf,@nlc)
```

```
x =
```

```
    28.5369    12.9379     5.8657     2.6594     1.2057
```

```
>> sum(x)
```

```
ans =
```

```
    51.2055
```