



המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

העתקות קונפורמיות בעיגול היחידה

הנאדי ח'יר

Confrmal mappings of the unit disk

Hnady Khier

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

**העתקות קונפורמיות בעיגול היחידה
הנאדי ח'יר**

Confrmal mappings of the unit disk

Hnady Khier

**Advisor:
Prof. Mark Elin**

**מנחה:
פרופ' מרק ילין**

Karmiel

כרמיאל

תוכן העניינים

מבוא.....	4
פרק 1 _ פונקציות כוכביות ופונקציות קמורות.....	5-15
פרק 2 _ העתקות על מצולעים ונוסחת שורץ קריסטופל.....	16-20
פרק 3 _ גרפיקה ממוחשבת לנוסחת שורץ קריסטופל.....	21-23
סיכום.....	24
ספרות.....	25
נספחים.....	26-28

מבוא

בפרויקט זה אנו נלמד העתקות יוניבלנטיות של עיגול היחידה $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, כאשר $G \neq \mathbb{C}$. לפי המשפט המפורסם של רימן, קיימת העתקה יוניבלנטית, כלומר פונקציה הולומורפית חד חד ערכית שמעתיקה את העיגול על התחום $G \neq \mathbb{C}$, זאת אומרת:

$$f : D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow G$$

משפט זה נקרא משפט ההעתקה של רימן. הוא מאוד חשוב בכל ענפי אנליזה מרוכבת. יחד עם זאת, ניתן להדגיש כי המשפט טוען רק קיום של ההעתקה אך לא מסביר כיצד למצוא אותה, כיצד לבנות העתקה על התחום הנתון. מה הוא מבנה של ההעתקה והתכונות שלה, כל הדברים הללו לא ברורים. אי לכך, מאוד חשוב ללמוד העתקות יוניבלנטיות על תחומים בעלי מבנה גיאומטרי מיוחד. נציין גם כי לרוב סוגי ההעתקות מבנה קונקרטי שלהם אינו מוכר למעט כמה סוגים מיוחדים שכוללים, למשל, העתקות שבר לינאריות וכדומה.

בפרויקט זה אנחנו נלמד שתי מחלקות של פונקציות יוניבלנטיות: אחת, על תחומים כוכביים או קמורים. לפונקציות כאלו קוראים פונקציות כוכביות וקמורות בהתאמה.

המחלקה השנייה היא העתקות על מצולעים. ידוע שהעתקות כאלו ניתן להציג על ידי נוסחה מפורסמת שנקראת נוסחת שוורץ קריסטופל.

בהמשך אנחנו נחקור קשר בין שתי המחלקות.

הפרויקט מלווה תיאורים למצבים שונים, אבל מתברר כי תכונות מחשב גדולות ומפורסמות מתקשות לצייר תמונות של חלק מהפונקציות הנלמדות בפרויקט, ותופעה זו מוסברת מטה בחוברת.

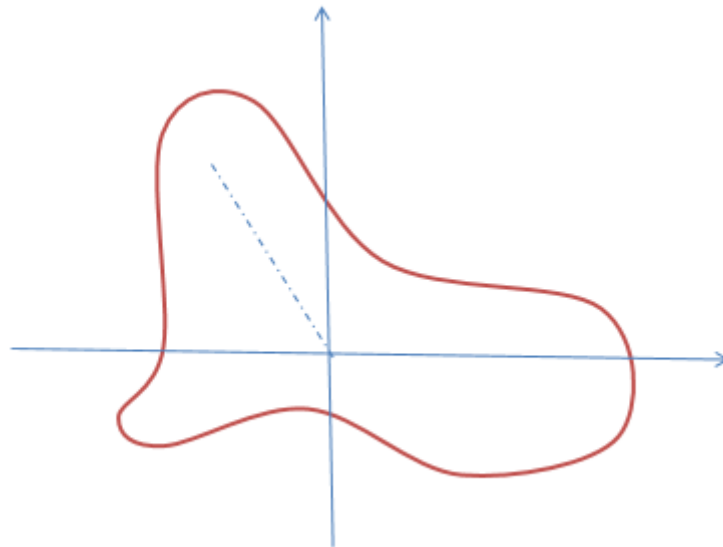
פרק 1. פונקציות כוכביות ופונקציות קמורות :

בפרק זה אנחנו נגדיר פונקציות יוניבלנטיות כוכביות וקמורות ונזכיר קריטריונים עבור פונקציות אלו. ההוכחות של המשפטים בפרק זה ניתן לעשות בדרכים שונות, בספרים [2] ו-[4] מוכיחים את המשפטים בעזרת מערכות דינמיות, בפרויקט זה נבחרו הוכחות בשיטה אחרת. והיא שיטה גיאומטרית (שניתן להמחיש משמעותה ישירות).

נסמן ב- U עגול היחידה במישור מרוכב $\mathbb{C}$, כלומר $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. כאן יש להגדיר פונקציה הולומורפית (אנליטית)

הגדרה 1

תהי $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית עם $f(0) = 0$, f' היא פונקציה כוכבית בתחום U ביחס לאפס, אם הפונקציה f היא חד חד ערכית ב- U והתמונה $f(U)$ היא תחום כוכבי ביחס לאפס, כלומר לכל נקודה $z \in U$ הקטע שמחבר את האפס ו- $f(z)$ נמצא כולו ב- $f(U)$.

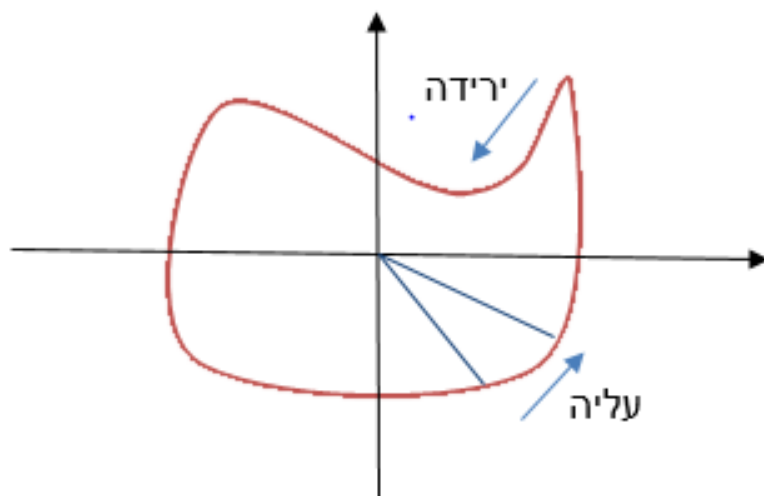


משפט 1 (של Nevanlinna, קריטריון לפונקציה כוכבית)

פונקציה הולומורפית $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת: $f(0) = 0$ היא פונקציה כוכבית אם ורק אם מתקיים:

$$f'(0) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, \quad \forall z \in U, z \neq 0$$

נבסס את הוכחת המשפט על הרעיון הפשוט הבא:



השרטוט מראה כי אם חלק של העקומה הוא כוכבי, אז יש עלייה של ארגומנט. ואם חלק של העקומה אינו כוכבי אז יש ירידה של ארגומנט, ולכן פונקציה היא כוכבית אם ורק אם הארגומנט שלה עולה בכל אופן (כאשר z עובר מעגל ברדיוס שרירותי).

הוכחה:

הכיוון הראשון: נניח כי f פונקציה כוכבית, כלומר f חד חד ערכית ומכאן $f'(0) \neq 0$, רוצים להראות כי התחום $f(U_r)$ הוא תחום כוכבי ביחס לאפס לכל $r \in (0,1)$, נגדיר: $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ כאשר $t \in (0,1)$ ו- $z \in U$, הפונקציה $g(z)$ מוגדרת היטב והיא הולומוर्फית ב- U . משום שפונקציה f היא פונקציה כוכבית, לכן $g(0) = 0$ וגם $|g(z)| < 1$ ב- U .

מהמשפט המפורסם שנקרא הלמה של שוורץ נקבל כי $|g(z)| \leq |z|$ ב- U , מכאן: $tf(z) = f(g(z)) \in f(U_r)$ לכל $z \in U_r$. בכך התחום $f(U_r)$ הוא תחום כוכבי ביחס לאפס. משיקולים גיאומטריים, התמונה של המעגל $|z| = r$ היא עקומת כוכבים ביחס לאפס, זה אומר כי $\arg f(re^{i\theta})$ כפונקציה של המשתנה $\theta \in [0, 2\pi]$ היא מונוטונית עולה, ולכן $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) \geq 0$. נחשב

את הנגזרת:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} [\log f(re^{i\theta})] = \operatorname{Im} \left[\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right]$$

לכן נקבל:

$$f'(0) \neq 0, \text{ אבל } \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] \geq 0, |z| = r < 1$$

ולכן ע"י יישום בעקרון המינימום לפונקציות הרמוניות נקבל כי: $\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, z \in U_r$

מכיוון ש- r שרירותי, אנו מסיקים כי $\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, z \in U$, מש"ל כיוון ראשון

הכיוון השני :

נניח כי $f'(0) \neq 0, \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0, |z| < 1$, ורוצים להוכיח כי f היא פונקציה כוכבית .

מההוכחה בכיוון הראשון קיבלנו כי עבור $r \in (0,1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$$

לפיכך $\arg f(re^{i\theta})$ היא פונקציה הולכת וגדלה כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$. כעת נשתמש בעקרון הארגומנט: מכיוון

שלפונקציה f יש אפס פשוט יחיד ב- U , אנו מסיקים טענה שהווריאציה של $\arg f(re^{i\theta})$ כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$ שווה ל- 2π . אכן :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right\} = 2\pi$$

לפיכך, התמונה של $|z|=r$ היא עקומה כוכבית פשוטה והתחום $f(U_r)$ הוא תחום כוכבי. יתר על כן, הפונקציה היא חד ערכית על העיגול $|z|=r$, מכיוון ש- r שרירותי, אנו מסיקים כי f היא פונקציה חד ערכית בכל העגול U . ולסוף, מכיוון ש- $f(U) = \bigcup_{0 < r < 1} f(U_r)$, אנו מסיקים כי $f(U)$ הוא תחום כוכבי ביחס לאפס, ולכן הפונקציה f היא פונקציה כוכבית. מש"ל בכיוון השני.

הגדרה 2

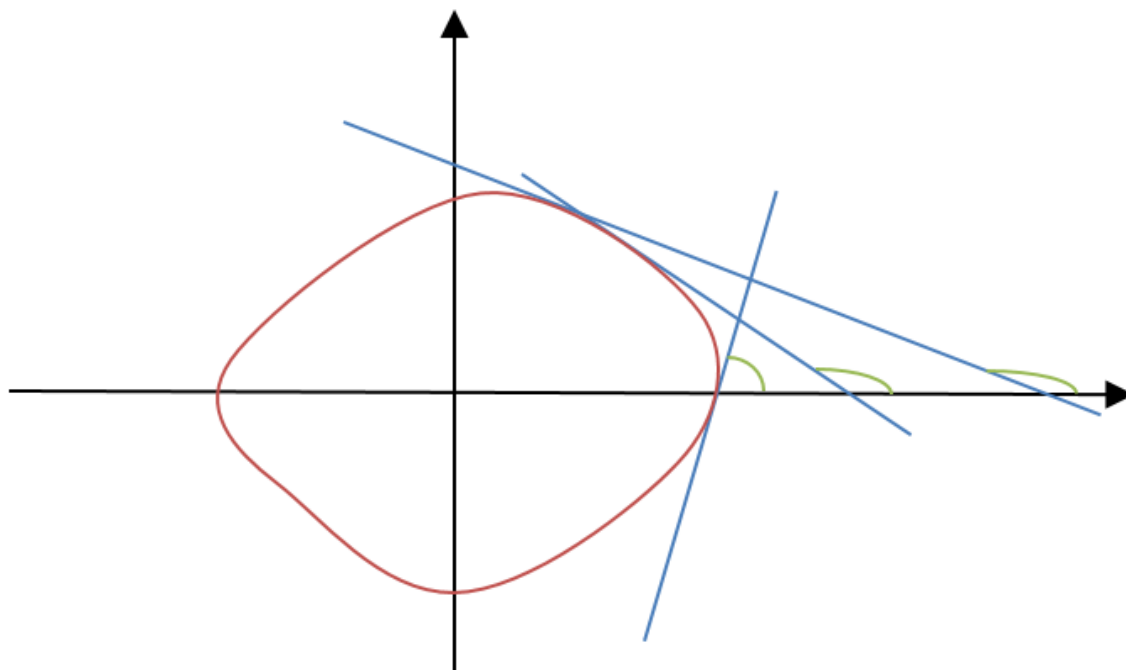
תהי $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית. הפונקציה f היא פונקציה קמורה ב- U אם f היא חד ערכית ב- U , וגם התחום $f(U)$ הוא תחום קמור.

משפט 2 (קריטריון לפונקציה קמורה)

פונקציה הולומורפית $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ היא פונקציה קמורה אם ורק אם מתקיים :

$$f'(0) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0, z \in U$$

נבסס את הוכחת המשפט על הרעיון הפשוט הבא:



(השרטוט מראה עבור תחום קמור, שאם אנו מעבירים משיק בנקודות שפה, שיפוע של המשיקים רק עולה, כלומר פונקציה היא קמורה אם ורק אם הארגומנט של הווקטור משיק לתמונה של התחום הינו פונקציה שאינה יורדת ב- $(\theta \in [0, 2\pi])$).

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח כי f היא פונקציה קמורה, כלומר f היא חד חד ערכית ומכאן $f'(0) \neq 0$. רוצים להראות כי התחום $f(U_r)$ הוא תחום קמור עבור כל $r \in (0, 1)$. ניקח $z_1, z_2 \in U_r$ כך שמתקיים $|z_1| \leq |z_2|, z_2 \neq 0$ וניקח $0 \leq t \leq 1$. תהי $g: U \rightarrow U$ מוגדרת על ידי:

$$g(z) = f^{-1} \left((1-t) f \left(\frac{z_1}{z_2} z \right) + t f(z) \right), z \in U$$

נתון כי f היא פונקציה קמורה, לכן g מוגדרת היטב והיא פונקציה הולומורפית ב- U , יתר על כן, $g(0) = 0$ ומכאן $|g(z)| \leq |z|$ כאשר $z \in U$, דרך הלמה של שוורץ, עבור $z = z_2$ אנו מסיקים כי $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ ומכאן:

$$(1-t) f \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + t f(z_2) \in f(U_r)$$

לפיכך, אנו מסיקים כי $f(U_r)$ הוא תחום קמור.

תהי Γ_r התמונה של המעגל $|z| = r$, לכן התחום הפנימי של Γ_r הוא תחום קמור, יתר על כן, Γ_r ניתן על ידי הייצוג הפרמטרי: $\omega = f(re^{i\theta})$ כאשר $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

מכיוון ש- $f(U_r)$ הוא תחום קמור, הטענה שארגומנט של הווקטור משיק ל- Γ_r הינו פונקציה שאינה יורדת ב- $\theta \in [0, 2\pi]$.

ניתן לרשום את הפונקציה בצורה הבאה: $\Psi(\theta) = \arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right] = \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})]$.
צריך להתקיים: $\Psi'(\theta) \geq 0$ ב- $\theta \in [0, 2\pi]$, או:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Im}[\log(izf'(z))] \geq 0, z = re^{i\theta}$$

נפשט את הביטוי ונחשב הנגזרת:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \operatorname{Im}[\log(izf'(z))] = \operatorname{Im}\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right] = \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right], z = re^{i\theta}$$

ומכאן נקבל:

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \geq 0 \text{ ב- } |z| = r$$

מכיוון שאי השוויון מתקיים ב- $z=0$, ומכיוון ש- r הוא שרירותי, אנו משיגים כי:

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0, z \in U$$

מש"ל בכיוון הראשון.

כיוון שני: נניח כי $f(0) = 0$ וגם $\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$ ב- U .

נציין כי האי שוויון גורר כי $f'(z) \neq 0$ ב- $z \in U \setminus \{0\}$. ניקח $r \in (0, 1)$, נהפוך השלבים בחישוב לעיל, ונסיק כי:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ומכאן הטענה שארגומנט של המשיק לעקומה Γ_r (התמונה של המעגל $|z|=r$) היא פונקציה שאינה יורדת ב- θ .

בנוסף, השתנות הכוללת של $\Psi(\theta)$ בקטע $[0, 2\pi]$ שווה ל- 2π . אכן:

$$\int_0^{2\pi} \Psi'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} \arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left[1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right] d\theta = \operatorname{Re} \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \frac{dz}{iz} = 2\pi$$

אי לכך, אנו הראינו כי Γ_r היא עקומה קמורה ופשוטה (לא חותכת את עצמה), ובכך התחום $f(U_r)$ הוא תחום קמור. מכיוון ש- $f(U) = \bigcup_{0 < r < 1} f(U_r)$ אנו מסיקים כי $f(U)$ הוא תחום קמור.

יתר על כך, מכיוון ש- f היא חד חד ערכית על המעגל $|z|=r$, אנו מסיקים כי f היא גם חד חד ערכית ב- U_r עבור כל $r \in (0, 1)$, לכן f היא פונקציה חד חד ערכית ב- U ומכאן f היא פונקציה קמורה.

מש"ל.

דוגמא 1:

עבור איזה ערכים של הפרמטר a פונקציה $f(z) = z + az^n$ היא פונקציה כוכבית?

פתרון:

$$- \quad f \text{ פונקציה כוכבית אם ורק אם } \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0$$

$$- \quad f(0) = 0$$

$$- \quad f \text{ הולמורפית בעיגול היחידה}$$

$$f(z) = z + az^n$$

$$f'(z) = 1 + anz^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{z(1 + anz^{n-1})}{z + az^n} \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{(1 + anz^{n-1})}{1 + az^{n-1}} \right] \left[\frac{1 + \bar{a}z^{n-1}}{1 + \bar{a}z^{n-1}} \right] \\ &= \frac{\operatorname{Re}(1 + \bar{a}z^{n-1} + anz^{n-1} + n|a|^2|z^{n-1}|^2)}{|1 + az^{n-1}|^2} \\ &= \frac{1 + n|a|^2|z^{n-1}|^2 + n\operatorname{Re}(az^{n-1}) + \operatorname{Re}(az^{n-1})}{|1 + az^{n-1}|^2} = \\ &= \frac{1 + n|a|^2|z^{n-1}|^2 + (n+1)\operatorname{Re}(az^{n-1})}{|1 + az^{n-1}|^2} \end{aligned}$$

משום ש הביטוי צריך להיות חיובי לכל z , צריך להתקיים גם:

$$1 + n|a|^2|z^{n-1}|^2 - n|a||z|^{n-1} > 0$$

$$\text{נסמן } |z| = r, \text{ אז לכל } 0 < r < 1 \text{ אמור להתקיים } 1 - n|a|r^{n-1} + n|a|^2r^{2(n-1)} > 0$$

או

$$nx^2r^2(n-1) - nxr^{(n-1)} + 1 > 0.$$

פותרים את האי שוויון ומקבלים:

$$x < \frac{nr^{n-1} - \sqrt{n^2r^{2(n-1)} - 4nr^{2(n-1)}}}{2nr^{2(n-1)}} = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2nr^{(n-1)}}$$

לכן:

$$|a| < \frac{n - \sqrt{(n^2 - 4n)}}{2nr^{(n-1)}} = n \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n}}}{2nr^{(n-1)}} \right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n}}}{2}$$

$$\downarrow$$
$$r^{(n-1)} \approx 1 \text{ לכן, } 0 < r < 1$$

דוגמא 2:

עבור איזה ערכים של הפרמטר a פונקציה $f(z) = z + az^n$ היא פונקציה קמורה ?

פתרון:

לפי המשפט שהוכחנו, f קמורה אם ורק אם $\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$

ניתן לחשב:

$$f(z) = z + az^n$$

$$f'(z) = 1 + anz^{n-1}$$

$$f''(z) = an(n-1)z^{n-2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] &= \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zan(n-1)z^{n-2}}{1 + anz^{n-1}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + anz^{n-1} + zan(n-1)z^{n-2}}{1 + anz^{n-1}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1 + an^2 z^{n-1}}{1 + anz^{n-1}} \right] \left[\frac{1 + n\bar{a}\bar{z}^{n-1}}{1 + n\bar{a}\bar{z}^{n-1}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 + n\bar{a}\bar{z}^{n-1} + an^2 z^{n-1} + n^3 |a|^2 |z^{n-1}|^2}{|1 + anz^{n-1}|^2} \right] \\ &= \left[\frac{1 + n^3 |a|^2 |z^{n-1}|^2 + n^2 \operatorname{Re}(az^{n-1}) + n \operatorname{Re}(a\bar{z}^{n-1})}{|1 + anz^{n-1}|^2} \right] \\ &= \left[\frac{1 + n^3 |a|^2 |z^{n-1}|^2 + n(n+1) \operatorname{Re}(az^{n-1})}{|1 + anz^{n-1}|^2} \right] \end{aligned}$$

באופן דומה לדוגמא הקודמת, צריך להתקיים :

$$1 + n^3 |a|^2 |z^{n-1}|^2 - n^2 |a| |z|^{n-1} > 0$$

והן לכל $0 < r < 1$:

$$1 - n^2 |a| r^{n-1} + n^3 |a|^2 r^{2(n-1)} > 0$$

$$n^3 x^2 r^{2(n-1)} - n^2 x r^{n-1} + 1 > 0$$

$$x < \frac{n^2 r^{n-1} - \sqrt{n^4 r^{2(n-1)} - 4n^3 r^{2(n-1)}}}{2n^3 r^{2(n-1)}} = \frac{n^2 - \sqrt{n^4 - 4n^3}}{2n^3 r^{(n-1)}}$$

לכן:

$$|a| < \frac{n^2 - \sqrt{n^4 - 4n^3}}{2n^3 r^{(n-1)}} = n^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n}}}{2n^3 r^{(n-1)}} \right) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n}}}{2n} \right)$$

$$r^{(n-1)} \approx 1 \text{ לכן, } 0 < r < 1$$

משפט 3

נניח שפונקציה f הולומורפית ויוניבלנטית בעגול היחידה. אז היא קמורה אם ורק אם הפונקציה g המוגדרת על ידי $g(z) = zf'(z)$ היא פונקציה כוכבית.

הוכחה:

כיוון ראשון: נתון כי f היא פונקציה קמורה, צ"ל כי $g(z) = zf'(z)$ היא פונקציה כוכבית. כיוון ש- f פונקציה קמורה, היא פונקציה הולומורפית $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת

$$f'(0) \neq 0, z \in U, \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

הפונקציה $g(z) = zf'(z)$ היא פונקציה כוכבית אם ורק אם היא מקיימת $g(0) = 0$ והן

$$g'(0) \neq 0, \operatorname{Re} \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] > 0, \forall z \in U, z \neq 0.$$

גוזרים את הפונקציה $g: g'(z) = f'(z) + zf''(z)$ ובודקים קיום האי שוויון:

נתון כי: $f'(0) \neq 0$ לכן: $g'(0) = f'(0) + 0 \cdot f''(0) \neq 0$.

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{z(f'(z) + zf''(z))}{zf'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0$$

אז הגענו לאותו ביטוי כפי שנתון והוא גדול מאפס. וזה מש"ל כיוון ראשון

כיוון שני: נתון כי $g(z) = zf'(z)$ היא פונקציה כוכבית, צ"ל כי f פונקציה קמורה.

g פונקציה כוכבית לכן היא פונקציה הולומורפית $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת $g(0) = 0$ וגם:

$$g'(0) \neq 0, \operatorname{Re} \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] > 0, \forall z \in U, z \neq 0$$

$$f''(z) = \frac{g'(z)z - g(z)}{z^2} : \text{אז } f'(z) = \frac{g(z)}{z}$$

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = g'(0) \neq 0 \quad \text{נבדוק תנאים:}$$

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{z(g'(z)z - g(z))}{z^2 \cdot \frac{g(z)}{z}} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] > 0$$

לפי המשפט הקודם, פונקציה f קמורה. מש"ל כיוון שני

מש"ל.

משפט 4

נתונים מספרים חיוביים α_j עבור $j = 1, \dots, n$. אז הפונקציה:

$$f(z) = \frac{z}{\prod_{j=1}^n (1 - z \bar{\zeta}_j)^{\alpha_j}} = \frac{z}{(1 - z \bar{\zeta}_1)^{\alpha_1} \dots (1 - z \bar{\zeta}_n)^{\alpha_n}}$$

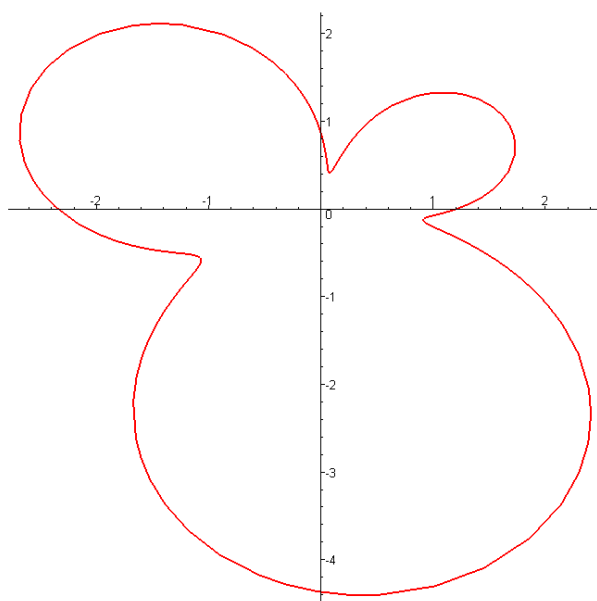
היא פונקציה כוכבית לכל בחירת הנקודות ζ_j , $|\zeta_j| \leq 1$, אם ורק אם $\sum_{j=1}^n \alpha_j \leq 2$.

דוגמא 3:

ניקח פונקציה $f(z) = \frac{z}{(1 - 0.9iz)^{0.8} (1 + 0.9z)^{0.7} (1 - 0.95z)^{0.45}}$. בדוגמא הזו הנקודות הן

$\zeta_1 = 0.9i, \zeta_2 = -0.9, \zeta_3 = 0.95$ נמצאות בעגול היחידה והחזקות $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.7, \alpha_3 = 0.45$ מקיימות

$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 1.95 \leq 2$. לפי המשפט, f פונקציה כוכבית. תמונתה מיוצגת באיור מטה:



נביא הוכחת המשפט במקרה פרטי אשר גם מייצג את תוכן המשפט.

דוגמא 4:

עבור איזה ערכים של הפרמטרים $a, b > 0$ הפונקציה:

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^a (1+z)^b}$$

היא פונקציה כוכבית?

פתרון:

לפי המשפט, צריך לבדוק האם מתקיימים תנאים הבאים:

$$f \text{ כוכבית אם ורק אם } \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f \text{ הולומורפית בעיגול היחידה}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(1-z)^a (1+z)^b} \\ f'(z) &= \frac{1(1-z)^a (1+z)^b - z \left[a(1-z)^{a-1}(-1)(1+z)^b + b(1+z)^{b-1}(1-z)^a \right]}{\left[(1-z)^a (1+z)^b \right]^2} \\ &= \frac{(1-z)^a (1+z)^b + za(1-z)^{a-1}(1+z)^b - zb(1+z)^{b-1}(1-z)^a}{\left[(1-z)^a (1+z)^b \right]^2} \\ &= \frac{1 + za(1-z)^{-1} - zb(1+z)^{-1}}{(1-z)^a (1+z)^b} \end{aligned}$$

עכשיו נכפיל בצמוד למכנה:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{z \left[\frac{1 + za(1-z)^{-1} - zb(1+z)^{-1}}{(1-z)^a (1+z)^b} \right]}{\frac{z}{(1-z)^a (1+z)^b}} \right] = \operatorname{Re} \left[1 + \frac{za}{1-z} - \frac{zb}{1+z} \right]$$

הסבר עזר:

$$(1) \text{ נתונה הפונקציה: } f(z) = \frac{1}{1+e^{i\theta}z}$$

$$z = -1 \text{ נציב}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1-e^{-i\theta}}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})} \\ &= \frac{1-(\cos\theta - i\sin\theta)}{1-e^{i\theta}-e^{-i\theta}+1} = \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

$$\text{לכן: } \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} > \frac{1}{2} \text{ לכל } z \text{ בעגול היחידה.}$$

$$z = 1 \text{ נציב}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{1}{1+e^{i\theta}} = \frac{1+e^{-i\theta}}{(1+e^{i\theta})(1+e^{-i\theta})} \\ &= \frac{1+(\cos\theta - i\sin\theta)}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}+1} = \frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} \end{aligned}$$

לכן: $\operatorname{Re} \frac{1}{1+z} > -\frac{1}{2}$

נחזור לביטוי שקיבלנו בפתרון:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{az}{1-z} - \frac{bz}{1+z} \right] &= 1 + \operatorname{Re} \frac{az}{1-z} - \operatorname{Re} \frac{bz}{1+z} \\ \frac{az}{1-z} &= \frac{a(z-1+1)}{1-z} = -a + a \frac{1}{1-z} \\ \operatorname{Re} \frac{az}{1-z} &= -a + a \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} > -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \end{aligned}$$



(מקבלים מהסבר העזר הנ"ל)

באופן דומה:

$$\begin{aligned} \frac{bz}{1+z} &= \frac{b(z-1+1)}{1+z} = b - b \frac{1}{1+z} \\ \operatorname{Re} \frac{bz}{1+z} &= b - b \operatorname{Re} \frac{1}{1+z} > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

לכן:

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{az}{1-z} - \frac{bz}{1+z} \right] = 1 + \operatorname{Re} \frac{az}{1-z} - \operatorname{Re} \frac{bz}{1+z} > 1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

משום שהביטוי צריך להיות חיובי לכל z , צריך להתקיים גם:

$$1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} > 0$$

לכן, הפונקציה:

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^a (1+z)^b}$$

היא כוכבית עבור: $a+b < 2$.

פרק 2. אינטגרל שוורץ קריסטופל

פונקציית שוורץ קריסטופל או אינטגרל שוורץ קריסטופל מגדירים ע"י נוסחאות

$$f(z) = A \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\prod_{k=1}^n (1 - \zeta e^{-i\theta_k})^{\beta_k}} + B \quad \text{או} \quad f(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\prod_{k=1}^n (1 - \zeta e^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

היא תלויה בפרמטרים באינטגרל θ_k, β_k הקשורים לגיאומטריה של התמונה.

כדי להבין תכונות גאומטריות, נבחון תמונה של מעגל היחידה. לשם כך נבחר $z = e^{i\varphi}$ נקודת שפה. נשאלת שאלה: מה קורה לפונקציה של שוורץ קריסטופל כאשר $z = e^{i\varphi}$ רץ על המעגל ועובר את הנקודות $e^{i\theta_k}$. במטרה להבין את זה נעשה חישוב הבא:

נתחיל מחישוב עזר:

$$\arg(1 - e^{i(\varphi - \theta_k)}) = \arg\left(e^{i\frac{\varphi - \theta_k}{2}} \left(e^{-i\frac{\varphi - \theta_k}{2}} - e^{i\frac{\varphi - \theta_k}{2}}\right)\right)$$

ניעזר בנוסחה הבאה:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} \arg(1 - e^{i(\varphi - \theta_k)}) &= \arg\left(e^{i\frac{\varphi - \theta_k}{2}} \left(e^{-i\frac{\varphi - \theta_k}{2}} - e^{i\frac{\varphi - \theta_k}{2}}\right)\right) = \\ &= \arg\left(-e^{i\frac{\varphi - \theta_k}{2}} * 2i \sin \frac{\varphi - \theta_k}{2}\right) = \\ &= \frac{\varphi - \theta_k}{2} + \frac{\pi}{2} + \arg\left(-\sin \frac{\varphi - \theta_k}{2}\right) \end{aligned}$$

נניח כי $\beta_{k+1}\pi$ עולה: $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$

ונניח כי: $\theta_k < \varphi < \theta_{k+1}$

אז נקבל:

$$\arg\left(-\sin \frac{\varphi - \theta_1}{2}\right) = \arg\left(-\sin \frac{\varphi - \theta_2}{2}\right) = \dots = \arg\left(-\sin \frac{\varphi - \theta_k}{2}\right) = \pi$$

ועבור הערכים הגדולים מ- k נקבל שכל ערכי הארגומנטים הם אפסים.

נחזור לתיאור התמונה:

נציב נקודת השפה בפונקציה של שורץ קריסטופל, ועבור $\zeta = re^{i\varphi}$, נקבל:

$$f(e^{i\varphi}) = \int_0^1 \frac{e^{i\varphi} dr}{\prod_{k=1}^n (1 - re^{i\varphi} e^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

נגזור את הפונקציה של שורץ קריסטופל ונקבל:

$$f'(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - ze^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

נציב את נקודת השפה $z = e^{i\varphi}$ בנגזרת ונקבל:

$$f'(e^{i\varphi}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - e^{i\varphi} e^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

נמצא את:

$$\arg f'(e^{i\varphi}) = -\sum \beta_k \arg(1 - e^{i(\varphi - \theta_k)}) =$$

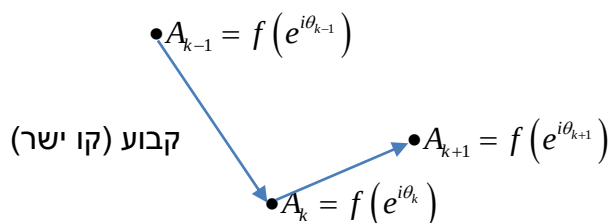

(מקבלים מחישוב העזר שלמעלה)

$$\begin{aligned} \arg f'(e^{i\varphi}) &= -\sum \beta_k \arg(1 - e^{i(\varphi - \theta_k)}) = \\ &= -\sum \left(\beta_k \cdot \frac{\varphi}{2} - \beta_k \cdot \frac{\theta_k}{2} + \beta_k \cdot \frac{\pi}{2} + \beta_k \arg\left(-\sin \frac{\varphi - \theta_k}{2}\right) \right) = \\ &= -\varphi + \sum \beta_k \cdot \frac{\theta_k}{2} - \pi - \sum_{j=1}^k \beta_k \cdot \pi \end{aligned}$$

נבדוק איך מתנהג $\arg f'(e^{i\varphi})$ עבור $\theta_k < \varphi < \theta_{k+1}$:

$$\arg f'(e^{i\varphi}) + \varphi = \sum \beta_k \cdot \frac{\theta_k}{2} - \pi - \sum_{j=1}^k \beta_k \cdot \pi$$

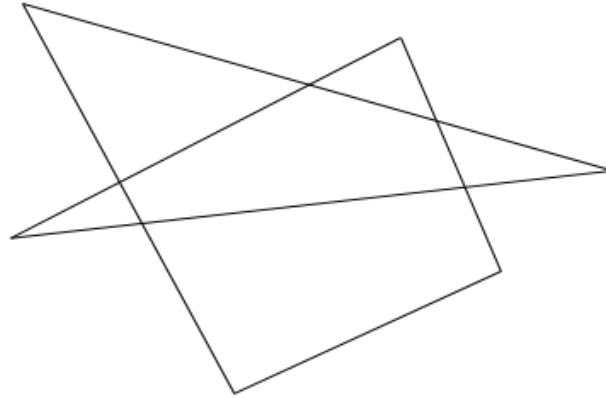
כלומר הוא שווה לקבוע שאינו משתנה לערכי φ שונים, זאת אומרת שאם אנו יודעים:



עכשיו נבדוק מה קורה עבור $\varphi > \theta_{k+1}$?

הערך של: $\arg f'(e^{i\varphi}) + \varphi$ יורד ב- $\beta_{k+1} \pi$.

אז נקבל, כי התמונה של מעגל היחידה הינה קו סגור שמורכב מקטעים ישרים, למשל:



נדגיש וזה ראוי מהאיור שפונקציה זו לא בהכרח יוניבלנטית.

דוגמא עבור מצב כזה:

נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(z) = \int_0^z \pi (1 - e^{-i\theta_k} \zeta)^{-\beta_k} (1 - \zeta)^{\sum \beta_k - 2} d\zeta$$

עבור הערכים הבאים:

$$e^{i\theta_1} = \frac{-10-i}{-10+i}, e^{i\theta_2} = \frac{-0.1-i}{-0.1+i}, e^{i\theta_3} = 1$$

$$e^{i\theta_4} = \frac{0.1-i}{0.1+i}, e^{i\theta_5} = \frac{0.2-i}{0.2+i}, e^{i\theta_6} = \frac{10-i}{10+i}$$

וגם:

$$\beta_1 = \beta_6 = \frac{-5}{7}$$

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \frac{6}{7}$$

נקבל, כי התמונה של מעגל היחידה הינה קו סגור שמורכב מקטעים ישרים, אבל קו זה חותך את עצמו.

במידה ופונקציית שורץ קריסטופל כן יוניבלנטית, היא מעתיקה את עיגול היחידה על מצולע.

מסקנה:

כפי שראינו מתיאור התמונה של פונקציית שורץ קריסטופל, המספרים β_k מתקבלים מהזוויות של המצולע. באותו הזמן ידוע כי באופן כללי לא ניתן למצוא $e^{i\theta_k}$ כמקורות של קדקודים, כי זה דורש פתרון מערכת מאוד מורכבת. ולכן, נשאלת שאלה מאוד חשובה: באיזה מקרים ניתן להשיג מידע נוסף על ההעתקה מהנתונים הגיאומטריים במצולע?
אחת האפשרויות לענות חלקית לשאלה הזו היא לבחון אינטגרל של שורץ קריסטופל בקריטריונים שפתחנו בפרק קודם.

נשים לב שאינטגרל שורץ קריסטופל דומה לביטוי שראינו במשפט 4. נשווה את הנוסחאות.

השוואה:

$$1. \text{ נתון: } g(z) = zf'(z), \text{ כאשר: } g(z) = \frac{z}{\prod_{k=1}^n (1 - z\bar{\zeta}_k)^{\alpha_k}}, \sum_{j=1}^n \alpha_k \leq 2$$

נמצא את $f'(z)$:

$$g(z) = zf'(z)$$

$$\frac{z}{\prod_{k=1}^n (1 - z\bar{\zeta}_k)^{\alpha_k}} = zf'(z)$$

$$2. \text{ נתונה נוסחת שורץ קריסטופל הבאה: } f'(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - z\bar{\zeta}_k)^{\alpha_k}}, \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 2$$

נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$f(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\prod_{k=1}^n (1 - \zeta e^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

נגזור את הפונקציה ונקבל:

$$f'(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - ze^{-i\theta_k})^{\beta_k}}, \sum_{j=1}^n \beta_k = 2$$

נשווה בין הנוסחאות ב- (1) ו- (2):

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - z\bar{\zeta}_k)^{\alpha_k}} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 - ze^{-i\theta_k})^{\beta_k}}$$

מזה נובע כי:

$$\zeta_k = e^{i\theta_k}, \alpha_k = \beta_k$$

$$|\zeta_k| \leq 1, \sum_{k=1}^n \alpha_k \leq 2 \quad \text{באופן כללי}$$

מכאן נקבל:

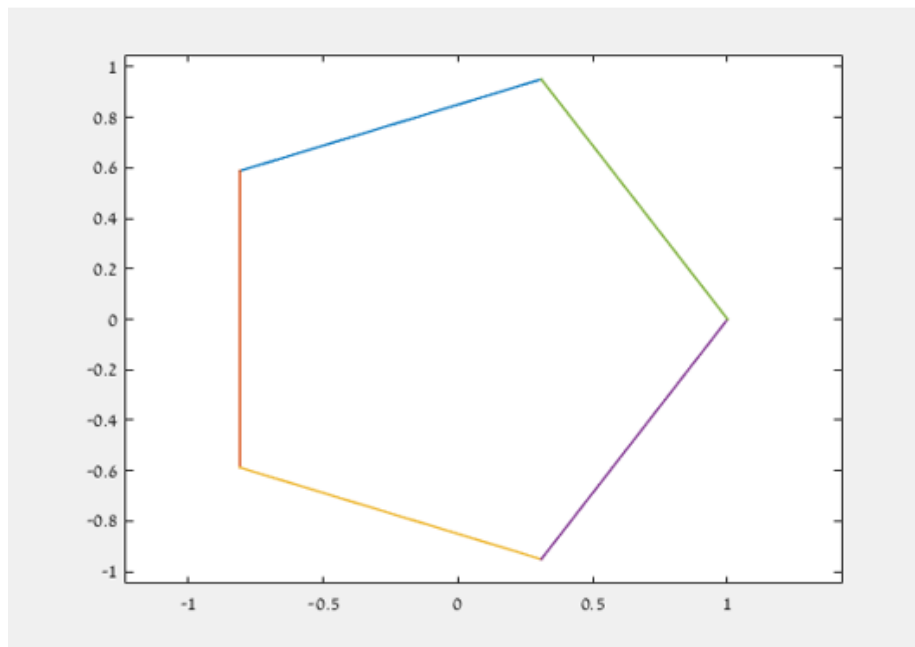
$$(1) \quad |\zeta_k| = 1, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2 \quad \text{כאשר: מצולע קמור,}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k > 2 \quad \text{כאשר: לא קמור, מצולע}$$

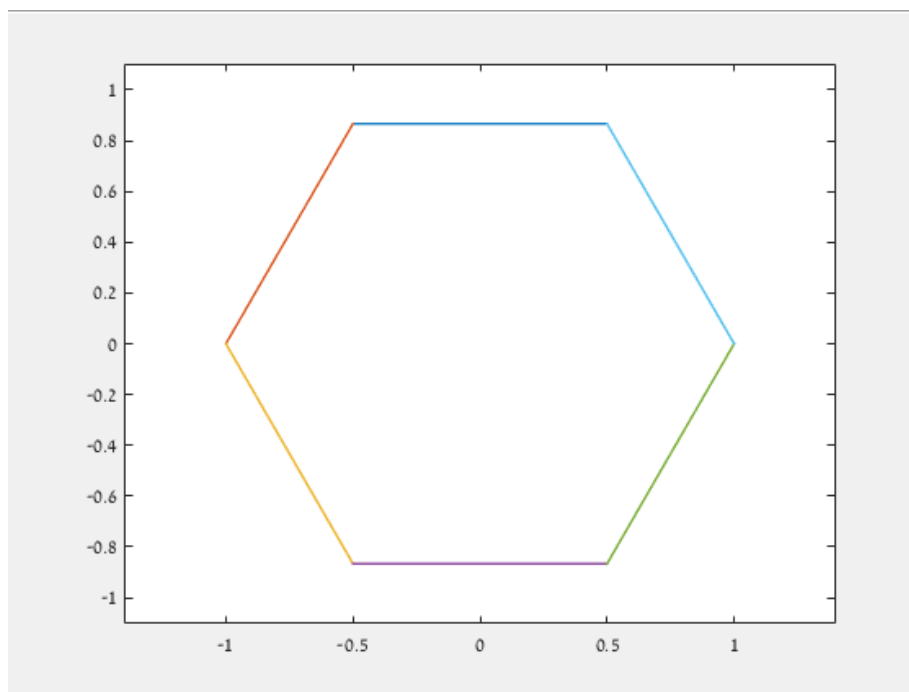
$$(3) \quad |\zeta_k| < 1 \quad \text{כאשר: תחום קמור שאינו מצולע,}$$

פרק 3 _ גרפיקה ממוחשבת לנוסחת שוורץ קריסטופל

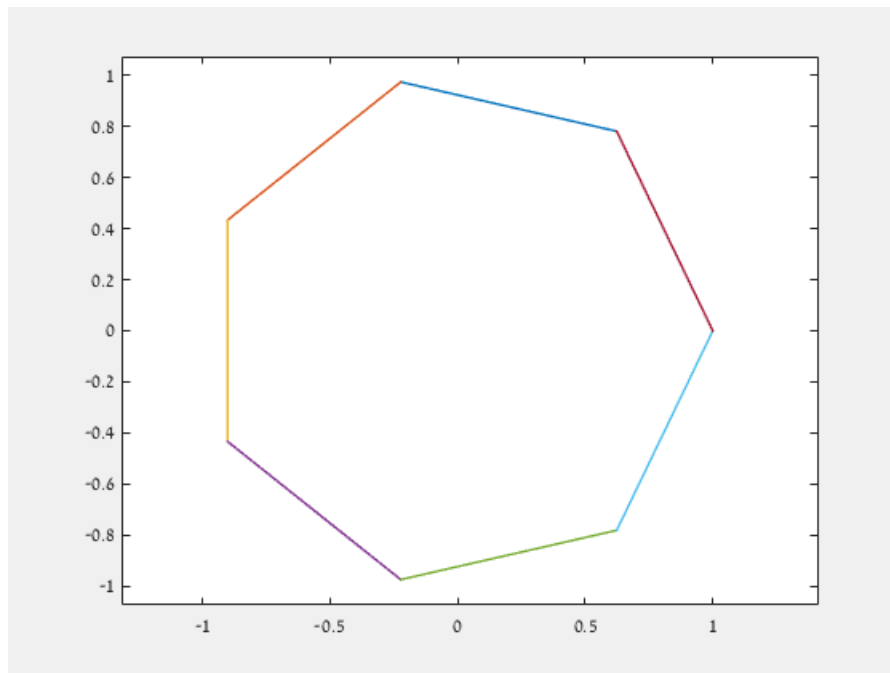
ציור מצולע שרירותי אפילו בתכנות ידועות יוצר בעיה, ולהלן ציורים לכמה מצולעים משוכללים, ציורים אלו התקבלו על ידי פקודות שמתוארות בנספחים:



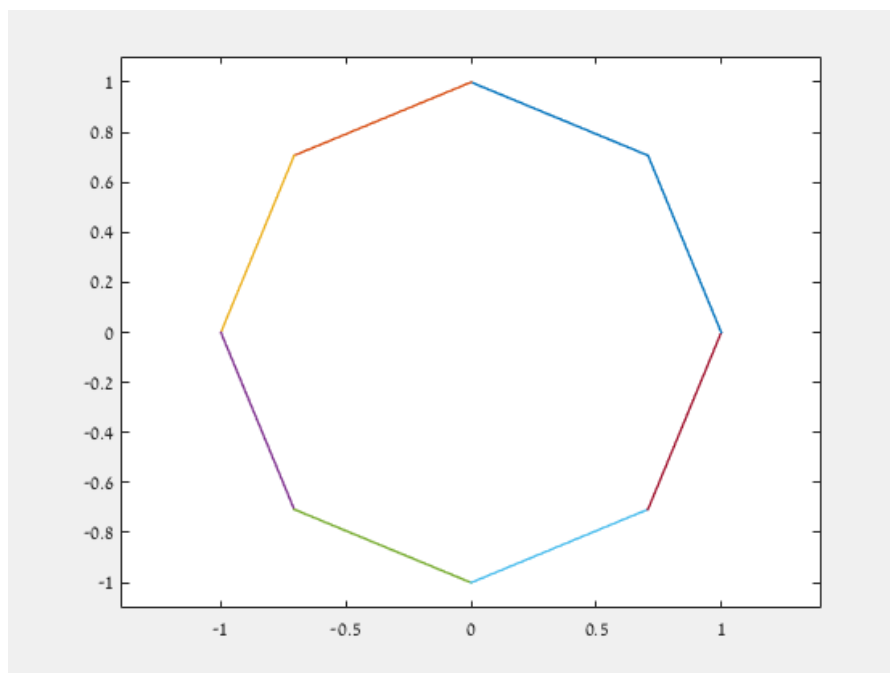
n=5



n=6

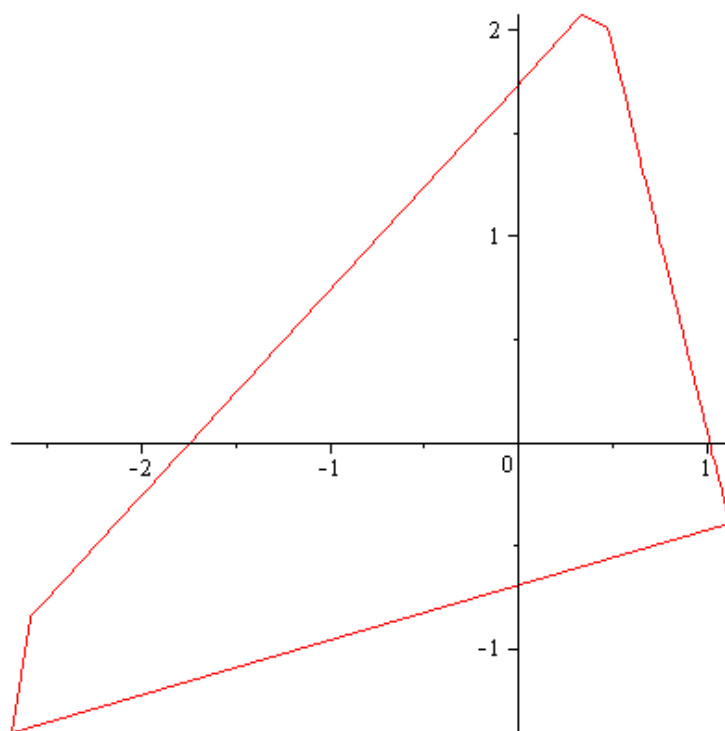


n=7



n=8

את המשולש שמתואר בציור הבא ציירנו את על ידי פקודות ב- Maple שנמצאים בנספח 3. זה לא מופיע בצורה נכונה של משולש כי המחשב צריך לחשב המון פעמים מספר מרוכב בחזקה שברית. וזאת אומרת: לבחור בין ענפים את הענף הנכון בכל נקודה ונקודה, וזה מראה את הקושי של המחשב, אי לכך, בסביבה של כל הקדקודים מספר נקודות שמובנה בברירת מחדל, והוא לא מספיק, אבל כמות כזו של נקודות דורשת ממחשב זמן רב (ציור לקח 4 דקות)



סיכום:

לאחר שלמדתי את הקורס בפונקציות מרוכבות, התחברתי מאוד לנושאים שקשורים אליו, ומאוד סקרן אותי. אז בחרתי בנושא של העתקות קונפורמיות בעיגול היחידה. במהלך הפרויקט עברתי הרבה קשיים, במיוחד בקשיי מחשב בדברים שהאדם יכול לעשות ולהבין אך המחשב מתקשה בהם. הפרויקט לימד אותי הרבה, נתן לי להתעמק בנושאים רבים ולהכיר שיטות חדשות ומעניינות. בפרק הראשון הצגתי כמה משפטים והוכחתי אותם בהתבסס על רעיונות פשוטים, ופתרתי דוגמאות הממחישות את ההגדרה של כל משפט ומשפט. בפרק השני עברתי לנושא חדש וקישרתי אותו לפרק הראשון, דרך ההשוואה בין אינטגרל שוורץ קריסטופל למשפטים בתורה גיאומטרית של פונקציות. ולבסוף הצגנו תיאורים למצבים שונים, אבל מתברר כי תכנות מחשב גדולות ומפורסמות מתקשות לצייר תמונות של חלק מהפונקציות הנלמדות בפרויקט.

- [1] D. Bonciani and F. Vlacci. Preprint, , Universita di Firenze, Firenze, Italy.
- [2] M. Elin and D. Shoikhet, Linearization Models for Complex Dynam_ical Systems. Topics in univalent functions, functions equations and semigroup theory, Birkhauser Basel, 2010.
- [3] I. Graham and G. Kohr, Geomtric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker, New York and Basel, 2003.
- [4.D. Shoikhet, Semigroups in Geometrical Function Theory, Kluwer, Dordrecht, 2001.

1. פונקציה בתכנת Matlab שמציירת מצולע, היא פונה לפונקציית dplot בנספח הבא:

```
function nagon(n)
b = zeros(n,1);
b(1:n,1) = -2/n;
w = zeros(n,1);
for j=1:n
    w(j,1) = exp((2*pi*(j))/n);
end
z = w;
c = (n/pi)*sin(pi/n)*gamma(1-1/n)^2/gamma(1-2/n);
dplot(w, b, z, c)
```

2. פונקציית dplot :

```
function [H,R2,THETA] = dplot(w,beta,z,c,R,theta,options)

w = w(:);
beta = beta(:);
z = z(:);
turn_off_hold = ~ishold;
if nargin < 7
    options = [];
    if nargin < 6
        theta = [];
        if nargin < 5
            R = [];
        end
    end
end

if isempty([R(:);theta(:)])
    R = 10;
    theta = 10;
end

if (length(R)==1) & (R == round(R))
    m = R+2;
    R = linspace(0,1,m);
    R([1,m]) = [];
end
if (length(theta)==1) & (theta == round(theta))
    m = theta+1;
    theta = linspace(0,2*pi,m);
    theta(m) = [];
end

[nqpts,maxturn,maxlen,maxrefn] = scpltopt(options);

fig = gcf;
figure(fig);
plotpoly(w,beta);
drawnow
hold on

n = length(w);
wf = w(~isinf(w));
reflen = maxlen*max(abs(diff([wf;wf(1)])));
```

```

qdat = scqdata(beta,nqpts);
Rp0 = linspace(0,1,15)';

emode = 'normal';
if strcmp(computer,'PCWIN')
    emode = 'back';
end
for j = 1:length(R)
    tp = linspace(0,2*pi,16)';
    tp = [tp(length(tp)-1)-2*pi;tp];
    zp = R(j)*exp(i*tp);
    wp = dmap(zp,w,beta,z,c,qdat);
    bad = find(toobig(wp,maxturn,reflen,axis));
    iter = 0;
    while (~isempty(bad)) & (iter < maxrefn)
        lenwp = length(wp);
        newt = [(tp(bad-1)+2*tp(bad))/3; (tp(bad+1)+2*tp(bad))/3];
        newz = R(j)*exp(i*newt);
        neww = dmap(newz,w,beta,z,c,qdat);
        [k,in] = sort([tp;newt]);
        tp = [tp;newt]; wp = [wp;neww];
        tp = tp(in); wp = wp(in);
        iter = iter + 1;
        bad = find(toobig(wp,maxturn,reflen,axis));
    end
    tp(tp<0) = tp(tp<0) + 2*pi;
    [k,in] = sort(tp);
    linh(j) = plot(clipdata(wp(in),axis), 'g-','erasemode','none');
    set(linh(j),'erasemode',emode);
    drawnow
    Z(1:length(zp),j) = zp;
    W(1:length(wp),j) = wp;
end

for j = 1:length(theta)
    Rp = Rp0;
    zp = Rp*exp(i*theta(j));
    wp = dmap(zp,w,beta,z,c,qdat);
    bad = find(toobig(wp,maxturn,reflen,axis));
    iter = 0;
    while (~isempty(bad)) & (iter < maxrefn)
        lenwp = length(wp);
        newR = [(Rp(bad-1)+2*Rp(bad))/3; (Rp(bad+1)+2*Rp(bad))/3];
        newz = newR*exp(i*theta(j));
        neww = dmap(newz,w,beta,z,c,qdat);
        [k,in] = sort([Rp;newR]);
        Rp = [Rp;newR]; wp = [wp;neww];
        Rp = Rp(in); wp = wp(in);
        iter = iter + 1;
        bad = find(toobig(wp,maxturn,reflen,axis));
    end
    linh(j+length(R)) = plot(clipdata(wp,axis), 'g-','erasemode','none');
    drawnow
    set(linh(j+length(R)),'erasemode',emode);
    Z(1:length(zp),j+length(R)) = zp;
    W(1:length(wp),j+length(R)) = wp;
end

```

```

set(fig, 'color', get(fig, 'color'))
plot(NaN, NaN)
if turn_off_hold, hold off, end;
if nargsout > 0
    H = lnh;
    if nargsout > 1
        R2 = R;
        if nargsout > 2
            THETA = theta;
        end
    end
end
end
end

```

3. פקודות maple לציור משולש:

```

> restart
> with(plots)

```

```

> f(t,s) := Int( (cos(t) + I sin(t)) * (1 - r * (cos(t) + I sin(t))) ^ (-1/2) * (1
    - r * (cos(t - Pi/2) + I sin(t - Pi/2))) ^ (-2/3) * (1 - r * (cos(t
    - s) + I sin(t - s))) ^ (-5/6) , r = 0..1 )
    (t,s) -> Int( (cos(t) + I sin(t)) / (sqrt(1 - r * (cos(t) + I sin(t))) * (1
    - r * (cos(t - 1/2 * Pi) + I sin(t - 1/2 * Pi))) ^ (2/3) * (1 - r * (cos(t
    - s) + I sin(t - s))) ^ (5/6)) ) dr

```

```

> complexplot(f(t, Pi), t = 0..2*Pi); complexplot(f(t, 4*Pi/3), t = 0..2
    *Pi); complexplot(f(t, 3*Pi/2), t = 0..2*Pi);

```