אורט בראודה
המכללה האקדמית להנדסה
ORT Braude College

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

הממוצע החשבוני-הנדסי של גאוס ושימושיו

מרים ח'ליל

The arithmetic-geometric mean of Gauss and its uses

Mariam khalil

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

הממוצע החשבוני-הנדסי של גאוס ושימושיו

מרים ח'ליל

The arithmetic-geometric mean of Gauss
and its uses

Mariam khalil

Haggai Katriel *ד"ר חגי כתריאל*

Karmiel **כרמיאל**

2013

המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה (ע"ר) רח' סנונית 51 ת.ד. 78 כרמיאל, 21982 טל' 04-9901911 פקס 04-9882016
Ort Braude College, P.O.Box 78, Karmiel 21982, Israel, Tel: 972-4-99901911, Fax: 972-4-9882016

תוכן עניינים

פרק 1 – הקדמה

הממוצע החשבוני – הנדסי מבוא

בפרויקט הזה אנו הולכים לחקור את נושא הממוצע החשבוני – הנדסי אשר גילה אותו המתמטיקאי גאוס.

ממוצע זה פתר כמה בעיות מתמטיות שלא ניתן לפתור אותם בצורה אחרת, ואנו נציג כמה בעיות כאלה בפרקים הראשונים בפרויקט הזה. בעיות אלה הן בעיות שימושיות מאוד במתמטיקה ובפיזיקה, אבל בסוף תהליך הפתרון לכל בעיה מגיעים לביטוי מתמטי בצורת אינטגרל שלא ניתן לחשב אותו בצורה סגורה בעזרת הכלים הידועים במתמטיקה.

לכן, בא גאוס וגילה את הממוצע החשבוני־ הנדסי (שנדון בו), ובעזרתו מצא פתרון מדויק לבעיות האלה ע"י קשרים מתמטיים עמוקים שהוכיח אותם, ובעבודה שלנו נראה את דרך ההוכחה.

הדבר המקסים הוא שניתן לחשב מיליוני ספרות של המספר פאי בעזרת אלגוריתם שמשתמש בממוצע החשבוני־ הנדסי, ונראה גם את זה בפרקים יותר מתקדמים בפרויקט.

קרל פרידריך גאוס

יוהאן קרל פרידריך גאוס $Johann\,Carl\,Friedrich\,Gauss$ נולד בגרמניה בשנת 1777 - ונפטר בשנת 1855.

חלק מהנושאים שגילה גאוס באופן עצמאי כאשר היה עוד נוער צעיר:

1. "חוק בודה" (בנוגע לתנועת כוכבים כוכבי הלכת)
2. התיאוריה הבינומית.
3. הממוצע האריתמטי-גיאומטרי .
4. חשובות משפטים חשובים בנוגע למספרים ראשוניים.

* הוא פתיח גם שיטה חדשה בשם "שיטת הריבועים הפחותים"

שמהווה את הבסיס ללימודי הסתברות וסטטיסטיקה.

במהלך חייו גאוס ערך מחקרים רבים בנושאים מגוונים כמו:

1. סדרות של מספרים.
2. הפונקציה ההיפר-גיאומטרית.
3. אינטגרציה.
4. הסתברות.
5. משוואות דיפרנציאליות חלקיות.
6. גיאומטריה דיפרנציאלית.
7. חקר כדור הארץ והכוחות הפועלים בו,

בעיקר בנושא כוח הכבידה.

פרק 2 - חקירת בעיות שימושיות

בפרק זה נציג שלוש בעיות, שתיים מתחום המתמטיקה ואחת מתחום הפיזיקה.

נחקור את שלושת הבעיות ונגיע לביטוי אינטגראלי שלא ניתן לפתור אותו בצורה אנליטית ע"י הטכניקות לפתירת אינטגרלים הידועות במתמטיקה.

בפרקים הבאים נראה איך ניתן לחשב את האינטגרלים הקשים הללו.

שאלה מספר 1-למה שווה ההיקף P של האליפסה?

1 . נציג את נוסחת האליפסה הידועה : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

כאשר 2a הוא אורך של ציר ה- x של האליפסה , ו- 2b הוא אורך ציר ה- y של האליפסה .

2. שטח האליפסה ידוע לנו והוא שווה ל- $A=\pi ab$ אשר מתקבל ע"י מתיחת מעגל היחידה, ז"א מתיחת ציר ה-x וציר ה-y בהתאמה ל- a ו- b.

במקום שטח המעגל הידוע $S=\pi r^2$, כאשר r הוא רדיוס המעגל (חצי מציר ה- x), כאן נקבל חצי מאורך ציר ה- x כפול חצי מאורך ציר ה- y

כלומר: $A=\pi ab$

3. חישוב היקף האליפסה:

נחשב אותו ע"י הנוסחה שמתקבלת מתנועת גוף שנע בין שתי נקודות $(x(t1),y(t1))$ ו- $(x(t2),y(t2))$

כאשר $r(t)=(x(t),y(t))$ הוא וקטור המיקום של הגוף בזמן t , t1<t< t2.

הגוף נע בין שתי נקודות במהירות $r'=(x'(t),y'(t))$, $\forall t,\ t1<t<t2$.

בכל קטע שהגוף נע בו בדרך יש מהירות מסוימת בזמן מסוים.

את אורך כל הדרך מ- t1 עד ל- t2 ניתן לקבל אותה ע"י אינטגרציה של אורך וקטור המהירות (ע"י נוסחה לאורך עקומה פרמטרית), כלומר :

$$\int_{t1}^{t2} ||(x'(t), y'(t))||\mathrm{dt}$$

נרשום בצורה מפורשת את האינטגרל שלנו וננסה להגיע לביטוי כללי:

נסמן את האינטגרל ב L:

$$L = \int_{t1}^{t2} ||(x'(t), y'(t))||\mathrm{dt}$$

* $||[x'(t), y'(t)]|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

$$L = \int_{t1}^{t2} ||(x'(t), y'(t))||\mathrm{dt} = \int_{t1}^{t2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

* נעשה החלפת משתנים : $d\phi = dt,\ \mathrm{t}{=}\phi$

* גבולות האינטגרל: $\phi : 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{\mathrm{dx}}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2} d\phi$$

* נשתמש בהצגה פרמטרית של האליפסה $(\mathrm{x,y}) = (a\sin\phi, b\cos\phi)$

ואז $(\frac{\mathrm{dx}}{d\phi}, \frac{dy}{d\phi}) = (a\cos\phi, -b\sin\phi)$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2} d\phi$$

קבלנו כי :

$$\mathrm{L}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2} d\phi$$

הערה:

אם ניקח את המקרה של b=a כלומר מעגל ברדיוס a (אורך ציר ה־ x שווה לאורך ציר ה־ y), נקבל את האינטגרל הבא:

$$\mathrm{L}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (\mathrm{a}\sin\phi)^2} d\phi{=}$$

* ניתן לרשום כי:

$$\sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2} = \sqrt{a^2((\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2)}$$
$$= \{(\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2 = 1\} = a$$

ואז נקבל:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a d\phi = a\phi|_0^{\frac{\pi}{2}} = a\frac{\pi}{2}$$

אנו חשבנו את האינטגרל בגבולות מ־ 0 עד $\frac{\pi}{2}$ כלומר רבע של היקף האליפסה.

ולכן: היקף האליפסה זה ארבע פעמים האינטגרל שקבלנו .

מסקנה:

היקף האליפסה P:

$$P = 4L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2}d\phi$$

ובמקרה הספציפי של המעגל b=a נקבל : $P=4(a\frac{\pi}{2})=2\pi a$.

נסמן : $J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2}d\phi$, J(a,b) נקרא אינטגרל אליפטי מהסוג השני.

ולכן:

P=4J(a,b)

4.טענה: $J(a,b) = J(b,a)$.

הערה:

לטענה הזו יש משמעות גיאומטרית שמסבירה שהיקף האליפסה מהסוג הראשון (ציר ה־ x הוא הציר הגדול) שווה להיקף האליפסה מהסוג השני (ציר ה־ y הוא הציר הגדול)

הוכחה:

* סימנו קודם :

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2}d\phi$$

* נבצע החלפת משתנים:

נחליף ϕ ב־ $\frac{\pi}{2} - \phi$ ואז $d\phi = -d\phi$

אז גבולות האינטגרל : $\frac{\pi}{2} - \phi : \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\sin\phi)^2 + (b\cos\phi)^2}d\phi$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\Big(\sqrt{(\mathrm{a}^2\cos(\tfrac{\pi}{2}-\phi)^2 + (\mathrm{b}^2\sin(\tfrac{\pi}{2}-\phi)^2}\Big)\mathrm{d}\phi$$

* נשתמש בשתי נוסחאות טריגונומטריות:

א. $\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos\phi$

ב. $\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi$

$J(b,a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{bcos}\phi)^2 + (\mathrm{asin}\phi)^2} d\phi = J(b,a)$

5. ניתן להניח כי $0 < b < a$, כי זה לא משפיע על התוצאה שלנו לפי מה שהוכחנו בשלב 4.

סיכום:

הראינו כי את היקף האליפסה P ניתן לקבל ע"י האינטגרל :

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{acos}\phi)^2 + (b\sin\phi)^2} d\phi$$

שאלה מספר 2- למה שווה אורך (L) גרף הפונקציה של סינוס (sin)

1. נגדיר את פונקצית הסינוס : $y = \sin x$

2. לחישוב אורך הגרף של הפונקציה מ- 0 עד 2π, נשתמש באותה שיטה שבה השתמשנו לחישוב היקף האליפסה בשאלה 1.

כלומר: נבצע אינטגרציה לאורך המסלול מ- 0 עד $\frac{\pi}{2}$ (רבע המחזור השלם של פונקצית הסינוס) בצורה הבאה:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{dx}{dx})^2 + (\frac{dy}{dx})^2}\mathrm{dx} = \left[y = \sin x, \frac{dy}{dx} = \cos x\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1)^2 + (\cos x)^2}\mathrm{dx}$$

* נציב במקום 1 את הזהות הידועה: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x)^2 + (\cos x)^2 + (\cos x)^2}\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\mathrm{dx}$$

* ננסה לסדר האינטגרל שיהיה דומה ל- $J(a,b)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sqrt{2})^2(\cos x)^2 + (1)^2(\sin x)^2}\mathrm{dx} = \left[a = \sqrt{2}, b = 1\right]$$

* נזכיר כי : $J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2}d\phi$

אצלנו: $a = \sqrt{2}\,, b = 1$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sqrt{2})^2(\cos x)^2 + (1)^2(\sin x)^2}\mathrm{dx} = J(\sqrt{2}, 1)$$

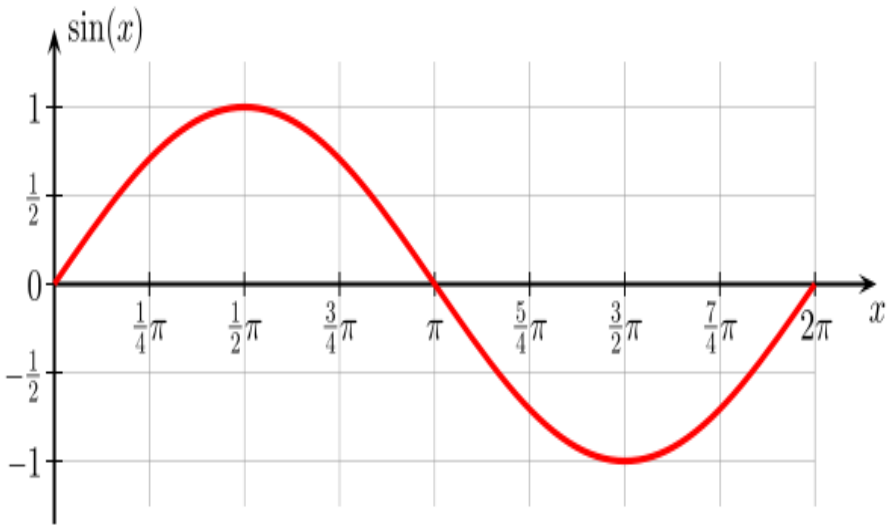
חשבנו את אורך המסלול מ- 0 עד $\frac{\pi}{2}$ כלומר רבע המסלול.

3. כדי לחשב את אורך כל המסלול (כלומר מחזור שלם של פונקצית הסינוס) מ- 0 עד 2π, נכפיל פי 4 את האינטגרל המחושב:

נקבל:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sqrt{2})^2(\cos x)^2 + (1)^2(\sin x)^2}\mathrm{dx} = 4J(\sqrt{2}, 1)$$

גרף של פונקצית הסינוס־ מחזור שלם:



סיכום:

הראינו כי אורך גרף הפונקציה של sin במחזור שלם שווה ל־ :

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sqrt{2})^2(\cos x)^2 + (1)^2(\sin x)^2}\mathrm{dx} = 4J(\sqrt{2}, 1)$$

שאלה מס' 3: מהו זמן המחזור T של תנועת המטוטלת הפשוטה?

הגדרת הבעיה:

נתונה מטוטלת תלויה על מסמר, אורך החוט שבו תלויה המטוטלת שווה ל־ L.

מותחים את החוט בהתחלה בזווית התחלתית δ שזאת בעצם האמפליטודה.

בכל זמן תנועת המטוטלת, משתנה הזווית כתלות בזמן t, נסמן אותה $\theta(t)$.

לכן המהירות הזוויתית היא: $\theta'(t)$.

מהירות המטוטלת = המהירות הזוויתית מוכפלת בגובה החוט :

$$v(t) = \theta'(t)L.$$

<u>השאלה:</u> מהו הזמן של המטוטלת למחזור שלם בתנועה שלה?

<u>פתרון:</u>

לפי חוקי הפיזיקה קיימות במערכת שתי אנרגיות: אנרגיה קינטית + אנרגיה פוטנציאלית.

<u>האנרגיה הקינטית:</u>

$\frac{1}{2}\mathrm{mv(t)}^2$, כאשר $v(t)$ היא המהירות של המטוטלת בזמן t.

ולכן האנרגיה הקינטית היא: $\frac{1}{2}m(\theta'(t)L)^2$.

<u>האנרגיה הפוטנציאלית:</u>

נגדיר $h(t)$: הפרש בין גובה המטוטלת בזמן t בתנועה שלה לבין גובה של המסמר שבו תלויה המטוטלת.

אנרגיה פוטנציאלית: $-mgh(t)$.

האנרגיה בסימן מינוס מכיוון ש: ככל ש־ h גדול יותר אז המטוטלת נמוכה יותר (למטה) ואז האנרגיה הפוטנציאלית תהיה קטנה יותר.

<u>אבל במה תלוי $h(t)$?</u>

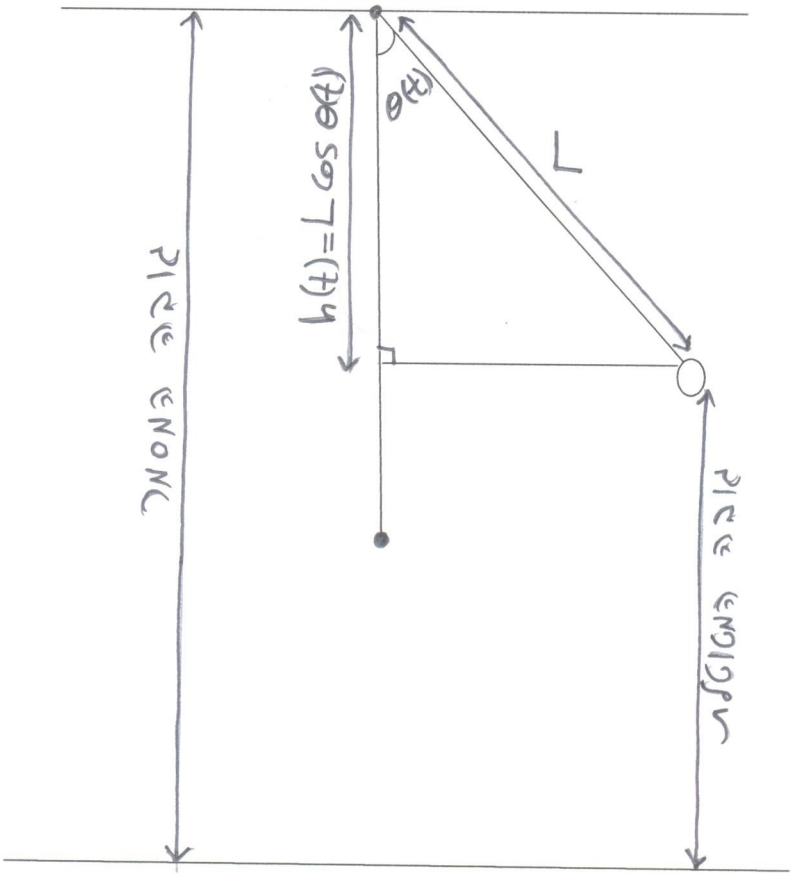
אם נעביר אנך ממקום המטוטלת הנוכחי בכל זמן t עד לחוט במצב התחלתי לפני המתיחה, נקבל משולש ישר זווית.

ואז אם נחשב $\cos\theta(t)$ במשולש ישר זווית נקבל: $\cos\theta(t) = \frac{h(t)}{L}$

כלומר:

$$h(t) = L\cos\theta(t) .$$

תיאור גראפי :



נציב באנרגיה הפוטנציאלית: $-mgh(t) = -mgL\cos\theta(t)$.

לפי חוק שימור האנרגיה:

אנרגיה קיניטית+אנרגיה פוטנציאלית = קבוע כלשהו C

$$\frac{1}{2}m(\theta'(t)L)^2 + (-mgL\cos\theta(t)) = C$$

* בכדי למצוא את הקבוע C נציב תנאי התחלה, כלומר $t = 0$.

מתקיים: $\theta'(0) = 0,\ \theta(t) = \delta$

$$\frac{1}{2}m(\theta'(0)L)^2 + (-mgL\cos\theta(0)) = C$$

$$0 + (-mgL\cos\delta) = C \implies C = -mgL\cos(\delta)$$

נציב C במשוואה של שימור האנרגיה :

$$\frac{1}{2}m(\theta'(t)L)^2 + (-mgL\cos\theta(t)) = -mgL\cos(\delta)$$

$$\frac{1}{2}m(\theta'(t)L)^2 = mgL(\cos\theta(t) - \cos(\delta))$$

נשתמש בזהות טריגונומטרית ידועה: $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

ולכן: $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

נשתמש בזהות ונרשום כי :

$$\cos\theta - \cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\delta}{2} = 2(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

ולכן: $\frac{1}{2}m(\theta'(t)L)^2 = 2mgL(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$.

נחלץ את $\theta'(t)$:

$$\theta'(t) = -\sqrt{\frac{2mgL(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}{\frac{1}{2}mL^2}} = -\sqrt{\frac{4g(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}{L}}$$

לקחנו סימן מינוס בשורש כי המהירות הזוויתית שלילית בתנועת המטוטלת.

* נחלק בשורש $-\sqrt{\frac{4g(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}{L}}$ משני הצדדים ונקבל :

$$\frac{-\theta'(t)}{\sqrt{\frac{g}{L}(\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}} = 2$$

* נבצע אינטגרציה בשני האגפים על מנת לחלץ את $\theta(t)$ ולהיפטר מהנגזרת:

גבולות האינטגרל מ 0 עד $\frac{T}{2}$: חצי מחזור של מטוטלת, רק הליכה בלי חזרה.

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{-\theta'(t)dt}{\sqrt{\frac{g}{L}(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}} = \int_0^{\frac{T}{2}} 2dt = 2(\frac{T}{2}-0) = T$$

* $\theta'(t)dt = \frac{d\theta}{dt}dt = d\theta$

* גבולות האינטגרל:

$$t:\ 0 \longrightarrow \frac{T}{2}$$

$$\left[\theta(\frac{T}{2}) = -\delta,\ \theta(0) = \delta\right] \longleftarrow \theta:\ \theta(0) \longrightarrow \theta(\frac{T}{2})$$

לכן: $\theta : \delta \longrightarrow -\delta$

$$\int_\delta^{-\delta} \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L}(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}} = T$$

ניתן להחליף את גבולות האינטגרציה ולהכפיל במינוס :

$$\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}} = T$$

הפונקציה :$\sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}$ היא פונקציה זוגית.

כלומר : ניתן לרשום גבולות האינטגרל מ 0־ עד δ ולהכפיל את האינטגרל ב־ 2.

נקבל:

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\delta} \frac{d\theta}{\sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}}$$

מטרתנו היא: להגיע לצורת אינטגרל ידוע במתמטיקה בשביל להשתמש בו אחר כך ביחס לנושא שלנו (הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס)

למטרה הזו נבצע כמה שלבים :

נעשה החלפת משתנים באינטגרל שקבלנו T:

$$\cos\phi d\phi = \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}d\theta \text{ ו־ } \sin\phi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

ואז גבולות האינטגרל ישתנו בהתאם:

$$\theta : 0 \longrightarrow \delta \implies \sin\phi : 0 \longrightarrow 1 \implies \phi : 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

חישובי עזר:

1. $\sin\phi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} \implies \sin\phi\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\theta}{2} \implies \sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$

2. $\cos\phi d\phi = \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}d\theta \implies \cos\phi d\phi(\sin\frac{\delta}{2}) = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta \implies$

$d\theta = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}d\phi$

3. $\cos^2\frac{\theta}{2} = 1-\sin^2\frac{\theta}{2} \implies \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}}$

*ניקח את הביטוי במכנה של האינטגרל T ונציב את חישוב העזר 1 שעשינו :

$\sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})} = \sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2})}$

$= \sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}(1-\sin^2\phi)} = \sin\frac{\delta}{2}\cos\phi$

*לפי חישובי עזר 2+3 נקבל כי :

$d\theta = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}d\phi \implies d\theta = \frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}}}$

* נציב הכל בתוך האינטגרל T:

$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\delta}\frac{d\theta}{\sqrt{(\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\frac{\delta}{2}\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}}}\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}\cos\phi}$

$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}}}$

חישוב עזר 4:

$\cos^2\phi+\sin^2\phi = 1$

אז ניתן לרשום:

$1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2} = \cos^2\phi+\sin^2\phi-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}$

$= \cos^2\phi+\sin^2\phi(1-\sin^2\frac{\delta}{2}) = \cos^2\phi+\sin^2\phi\cos^2\frac{\delta}{2}$

נציב חישוב עזר 4 במכנה האינטגרל של T נקבל:

$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos^2\phi+\sin^2\phi\cos^2\frac{\delta}{2}}}$

נסמן $a^2 = 1$ ו־ $b^2 = cos^2\frac{\delta}{2}$ ונקבל האינטגרל הבא:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

והאינטגרל שאנו הולכים לעסוק בו בהמשך הוא האינטגרל :

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$ נסמן אותו ע"י $I(a,b)$.

$I(a,b)$ נקרא אינטגרל אליפטי מהסוג הראשון.

כלומר: $I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$ ו־ $T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(a,b)$.

<u>הערה:</u> אם נשאף את δ לאפס ז"א זווית התחלתית די קטנה, מה שאומר תנודות ממש קטנות, אז $\cos^2\frac{\delta}{2} \longrightarrow 1$.

אז במכנה האינטגרל T נשאר עם הביטוי $\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$ ולכן:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\phi = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\frac{\pi}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

זו נוסחה לחישוב זמן מחזור מטוטלת בתנודות קטנות כפי שידוע בפיזיקה.

סיכום:

זמן מחזור T של תנועת המטוטלת הפשוטה :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(a,b)$$

פרק 3 ־ הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס

בפרק זה נגדיר את הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס, ונראה איך שתי סדרות מתכנסות לאותו מספר שהוא בעצם הממוצע החשבוני־הנדסי של שתי הסדרות.

הגדרה:

הממוצע החשבוני של שני מספרים x ו־ y הוא: $\frac{x+y}{2}$.

הממוצע הנדסי של שני מספרם חיוביים x ו־ y הוא: $\sqrt{xy}$.

הערה:

ממוצע חשבוני של מספר עם עצמו שווה למספר עצמו כלומר:

$$\frac{x+x}{2} = x$$

ממוצע הנדסי של מספר עם עצמו שווה למספר עצמו כלומר:

$$\sqrt{x^2} = x$$

טענה:

אי־ שוויון בין ממוצע החשבוני לבין הממוצע ההנדסי: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

אם: $x \neq y$ אז: $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$.

הוכחה:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

* נוסיף משני הצדדים : $2xy$

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 2xy + 2xy \Longleftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\frac{(x+y)}{4}^2 \geq xy \Longleftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$$

* שורש משני הצדדים:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{xy}$$ מש"ל.

אם $x \neq y$ אז שלבי ההוכחה אותם שלבים רק נשנה את הסימן:

$(x-y)^2 > 0$ ומזה נגיע ל־ $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$.

כמעט לפני מאתיים שנים, גאוס חקר את תהליך האטרציה הבא עבור שני מספרים $0 < b < a$ כלשהם.

1. עבור k=0 , בחר : $a_0 = a$, $b_0 = b$.
2. עבור k=1 חישב גאוס ממוצע חשבוני וגם ממוצע הנדסי לשני המספרים שבחר :

$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ (הממוצע החשבוני של שני המספרים) .

$b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$ (הממוצע ההנדסי של אותם שני מספרים).

3. עבור $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ו־ $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

כלומר בכל אטרציה גאוס לקח את הממוצע החשבוני וההנדסי של זוג המספרים הקודם a_n ו־ b_n

ומהם קיבל שני ממוצעים חדשים a_{n+1} ו־ b_{n+1}.

טענה 1 : $\forall n \in N$, מתקיים כי : $a_n > b_n$.

הוכחה:

עבור $n = 0$:

$$a_0 = a > b_0 = b$$

וזאת הייתה ההנחה שלנו בהגדרת הממוצע החשבוני־ הנדסי בתחילת הפרק הזה.

נבדוק את האי־ שוויון עבור $n = 1$:

$$a_1 = \frac{a+b}{2} > b_1 = \sqrt{ab}$$

וזה נכון כי ממוצע חשבוני של שני מספרים חיוביים שונים תמיד גדול מממוצע הנדסי של אותם שני מספרים.

ולכן עבור $n = k$

$$a_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2} > b_k = \sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$$

כי: $\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ ממוצע חשבוני של שני מספרים חיוביים שונים.

ו־ $\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$ ממוצע הנדסי של אותם שני מספרים

ומתקיים כי ממוצע חשבוני $>$ מממוצע הנדסי

טענה 2 : $a_{n+1} < a_n$

הוכחה:

$$a_n > b_n \Longrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} < \frac{a_n+a_n}{2} = a_n \Longrightarrow a_{n+1} < a_n$$

מסקנה:

a_n סדרה מונוטונית יורדת.

טענה 3 : $b_{n+1} > b_n$

הוכחה:

$$a_n > b_n \Longrightarrow b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > \sqrt{b_n b_n} \Longrightarrow b_{n+1} > b_n$$

מסקנה:

b_n סדרה מונוטונית עולה.

* נזכר במשפט היסודי הבא:

משפט:

נתונה סדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה (יורדת) ,אז :

אם הסדרה חסומה מלמעלה (מלמטה), אזי :

היא מתכנסת וגבול של הסדרה שווה ל־ $supremum$ / $infimum$ שלה.

לפי המשפט הזה ומהטענות 2+3 נובע כי שתי הסדרות a_n ו־ b_n, הן סדרות מתכנסות .

נגדיר מספר c_n כמדד של הבדל בין a_n ל־ b_n בצורה הבאה :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$$

טענה 4: $c_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - b_{n-1}\right)^2$

הוכחה:

ננסה לשחק קצת עם השוויון המגדיר את c_n:

נעלה בריבוע את שני הצדדים :

$$c_n^2 = \left(\sqrt{a_n^2 - b_n^2}\right)^2 \Longleftrightarrow c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$$

חישוב עזר 1: $a_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)^2$ ו־ $b_n^2 = a_{n-1}b_{n-1}$

ולכן :

$$c_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}+b_{n-1}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1}$$

$$= \frac{1}{4}a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}a_{n-1}b_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}^2 - a_{n-1}b_{n-1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2\right) - \frac{1}{2}a_{n-1}b_{n-1} = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)^2$$

מסקנה: $c_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)^2$ מש"ל.

טענה 5: $c_n^2 < \frac{1}{4}c_{n-1}^2$

הוכחה:

הגדרנו קודם כי: $c_{n-1}^2 = a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2$.

וראינו גם: $a_{n-1} > b_{n-1} > 0$, $\forall n \geq 1$.

קבלנו כי : $c_n^2 = \frac{1}{4}\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)^2$, נכפיל ונחלק את c_n^2 ב־ c_{n-1}^2 :

$$c_n^2 = \frac{\frac{1}{4}(a_{n-1}-b_{n-1})^2 c_{n-1}^2}{c_{n-1}^2} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2 c_{n-1}^2}{4\left(a_{n-1}^2-b_{n-1}^2\right)}$$

$$\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})(a_{n-1}-b_{n-1})c_{n-1}^2}{4(a_{n-1}-b_{n-1})(a_{n-1}+b_{n-1})} = \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})c_{n-1}^2}{4(a_{n-1}+b_{n-1})}$$

$$0 < \frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} < 1 \Longleftarrow a_{n-1}+b_{n-1} > a_{n-1}-b_{n-1} \Longleftarrow b_{n-1} > -b_{n-1}$$

כלומר מתקיים:

$$\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})c_{n-1}^2}{4(a_{n-1}+b_{n-1})} < \frac{1}{4}c_{n-1}^2$$

ולכן:

$c_n^2 < \frac{1}{4}c_{n-1}^2$ מש"ל.

טענה 6 : $c_n^2 \to_{n\to\infty} 0$

הוכחה:

נבצע כמה אטרציות עבור: $c_k^2 < \frac{1}{4}c_{k-1}^2$

$$k = 1 \Longrightarrow c_1^2 < \frac{1}{4}c_0^2$$

$$k = 2 \Longrightarrow c_2^2 < \frac{1}{4}c_1^2 < \frac{1}{4}\frac{1}{4}c_0^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$k=3 \Longrightarrow c_3^2 < \frac{1}{4}c_2^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 c_0^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 c_0^2$

נמשיך כך עד ל־ $k=n$

$k=n \Longrightarrow c_n^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n c_0^2$

אם נשאף את $n \to \infty$ אז נקבל את הגבול הבא:

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n c_0^2\right] = c_0^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n} = 0$

משפט: (כלל הסנדביץ')

אם סדרה מתכנסת ל־ 0 , אז סדרה יותר קטנה

ממנה גם כן מתכנסת ל־ 0 , כאשר $n \longrightarrow \infty$.

מסקנה: $c_n^2 \to_{n\to\infty} 0 \Longleftarrow c_n^2 < c_0\left(\frac{1}{4}\right)^n$

במקרה שלנו הסדרה $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ מתכנסת לאפס עבור $n \longrightarrow \infty$:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

ולכן מכיוון ש־ $c_n < \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$, אז גם $c_n \to_{n\to\infty} 0$.

מסקנה: $c_n^2 \to_{n\to\infty} 0$ ו־ $c_n \to_{n\to\infty} 0$.

הראינו כי: $c_n^2 \to_{n\to\infty} 0$, מה זה בעצם אומר?

הגדרנו קודם : $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$, ולכן : $(a_n^2 - b_n^2) \to_{n\to\infty} 0$.

טענה 7:

נתון כי: $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$ כך ש־ $c_n^2 \longrightarrow_{n\longrightarrow\infty} 0$ וגם a_n^2 ו־ b_n^2 שתי סדרות מתכנסות, אז a_n^2 ו־ b_n^2 שואפות לאותו מספר כאשר: $n \longrightarrow \infty$.

הוכחה:

נתון כי: $\lim_{n\longrightarrow\infty} c_n^2 = 0$ ו־ $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$

נתון גם כי a_n^2 ו־ b_n^2 שתי סדרות מתכנסות כלומר :

$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n^2 = A$ ו־ $\lim_{n\longrightarrow\infty} b_n^2 = B$, כך ש־ A ו־ B מספרים סופיים.

ולכן:

$$0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} c_n^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n^2 - b_n^2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n^2 - \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n^2$$
$$= A - B$$

קבלנו כי $A = B \iff A - B = 0$.

מסקנה : שתי סדרות a_n^2 ו־ b_n^2 שואפות לאותו מספר סופי כאשר $n \to \infty$.

מ.ש.ל.

לכן ניתן לומר ששתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול .

הגבול הזה נקרא הממוצע האריתמטי־גאומטרי או הממוצע החשבוני־הנדסי של ערכים התחלתיים a ו־ b.

נסמן את הממוצע הזה ע"י $M(a,b)$.

הערה:

ממוצע חשבוני־הנדסי של מספר עם עצמו שווה למספר עצמו כלומר:

$$M(a,a) = a$$

<u>דוגמא לחישוב $M(a,b)$:</u>

הראינו קודם כי אורך גרף הפונקציה של $\sin$ במחזור שלם שווה ל־ :

$$L = 4\mathrm{J}(\sqrt{2},1)$$

בפרקים הבאים נראה שהאינטגרל $J(\sqrt{2},1)$ קשור לממוצע החשבוני־הנדסי $M(\sqrt{2},1)$ ולכן:

ניקח את $M(\sqrt{2},1)$ כדוגמא לממוצע של גאוס ונחשב אותו לפי אטרציות:

נתחיל מ־ $a_0 = \sqrt{2}\ , b_0 = 1$

(נרשום את התוצאות בדיוק של 9 ספרות אחרי הנקודה)

$n = 0 \quad a_0 = \sqrt{2} \qquad b_0 = 1$

$n = 1 \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207106781 \qquad b_1 = \sqrt{\sqrt{2} * 1} = 1.182907115$

$n = 2 \quad a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1.198156948 \qquad b_2 = \sqrt{a_1 * b_1} = 1.198123521$

$n = 3 \quad a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1.198140235 \qquad b_3 = \sqrt{a_2 * b_2} = 1.198140234$

ולכן אנו רואים כי a_3 ו־ b_3 שווים בדיוק של 8 ספרות אחרי הנקודה.

המספר הזה הוא בעצם הממוצע החשבוני־ הנדסי של שני המספרים $a = \sqrt{2} \qquad b = 1$.

ניתן לרשום $M(\sqrt{2},1) \approx 1.19814023$.

פרק 4 ־ הקשר בין הממוצע האריתמטי־גאומטרי **לבין** האינטגרל $I(a,b)$

הקדמה:

בפרק זה אנו חוקרים את הממוצע החשבוני ־ הנדסי של גאוס אשר הגדרנו אותו בפרק הקודם ונוכיח קשר מאוד חזק בינו לבין האינטגרל שהתעסקנו בו בפרק 2 ,האינטגרל האליפטי $I(a,b)$.

ציינו קודם כי האינטגרל הזה בלתי פתיר אנליטית, אבל דרך הקשר המפורסם הזה בינו לבין הממוצע של גאוס, יהיה ניתן לחשב אותו .

גאוס גילה קשר בין הממוצע $M(a,b)$ לבין האינטגרל $I(a,b)$:

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$$

הקשר הזה הוא:

משפט:

$$M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}$$

ולכן, מכיוון שקל לחשב את הממוצע $M(a,b)$ כפי שראינו, בעזרת הקשר הזה ניתן לחשב את האינטגרל $I(a,b)$ שאי אפשר לחשב אותו באמצעות החישובים של האינטגראליים הידועים.

<u>הוכחה</u> :

שלב 1 ־ החלפת משתנים באינטגרל $I(a,b)$

נתון האינטגרל : $I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$.

נציב: $t=b\tan\phi$, ואז גבולות האינטגרל יהיו :

$t=\frac{\pi}{2}\to b\tan\frac{\pi}{2}=\infty$ ו־ $t=0\to b\tan 0=0$.

חישובי עזר:

(חישוב עזר 1) $\tan^2\phi=\frac{t^2}{b^2}$ ו־ $d\phi=\frac{\cos^2\phi dt}{b}\Longleftarrow dt=\frac{bd\phi}{\cos^2\phi}$.

לפי זהות טריגונומטרית : $\cos^2\phi=\frac{1}{1+\tan^2\phi}$, ולכן מתקיים:

$d\phi = \frac{dt}{b(1+\tan^2\phi)} = \frac{dt}{b\left(1+\frac{t^2}{b^2}\right)} = \frac{dt}{b+\frac{t^2 b}{b^2}} = \frac{dt}{\frac{b^2+t^2}{b}}$

קיבלנו כי :

$$d\phi = \frac{bdt}{b^2+t^2} \tag{1}$$

(חישוב עזר 2) נשתמש בזהויות הטריגונומטרית : $\tan^2\phi = \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}$

ו־ $\cos^2\phi = \frac{1}{1+\tan^2\phi}$ ונחשב למה שווה $b^2\sin^2\phi$

$b^2\sin^2\phi = b^2\tan^2\phi\cos^2\phi = \frac{b^2\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi} = b^2\frac{\frac{t^2}{b^2}}{1+\frac{t^2}{b^2}} = \frac{t^2}{1+\frac{t^2}{b^2}} = \frac{t^2}{\frac{b^2+t^2}{b^2}}$

כלומר : $b^2\sin^2\phi = \frac{b^2t^2}{b^2+t^2}$

$$b^2\sin^2\phi = \frac{b^2t^2}{b^2+t^2} \tag{2}$$

(חישוב עזר 3) נחשב למה שווה $a^2\cos^2\phi$

$a^2\cos^2\phi = a^2\frac{1}{1+\tan^2\phi} = \frac{a^2}{1+\frac{t^2}{b^2}} = \frac{a^2}{\frac{b^2+t^2}{b^2}}$

כלומר: $a^2\cos^2\phi = \frac{b^2a^2}{b^2+t^2}$

$$a^2\cos^2\phi = \frac{b^2a^2}{b^2+t^2} \tag{3}$$

נציב את חישובי העזר שעשינו (1) +(2)+ (3) בתוך האינטגרל $I(a,b)$:

$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\infty} \frac{bdt}{(b^2+t^2)\sqrt{\frac{b^2a^2}{b^2+t^2}+\frac{b^2t^2}{b^2+t^2}}}$

הערה :

הנחנו בתחילת ההגדרה של ממוצע חשבוני הנדסי כי $b > 0$

והביטוי במכנה השבר שבתוך האינטגרל $I(a,b)$ הוא ביטוי חיובי מכיוון

שיש בו שורש (תמיד חיובי) ומוכפל בביטוי ריבועי $(b^2+t^2) > 0$.

הפונקציה בתוך האינטגרל היא פונקציה זוגית (נסמן אותה ב־ $f(t)$)

ולכן מתקיים:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)dt$$

נשתמש בעובדה הזו ונקבל:

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{bdt}{(b^2+t^2)\sqrt{\frac{b^2a^2}{b^2+t^2}+\frac{b^2t^2}{b^2+t^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{bdt}{\left(\sqrt{(b^2+t^2)}\right)\left(\sqrt{(b^2+t^2)}\right)\sqrt{\frac{b^2a^2+b^2t^2}{b^2+t^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{bdt}{\left(\sqrt{(b^2+t^2)}\right)\left(\sqrt{(b^2+t^2)}\right)\frac{\sqrt{b^2a^2+b^2t^2}}{\sqrt{b^2+t^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{bdt}{\sqrt{(b^2+t^2)(b^2a^2+b^2t^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{bdt}{\sqrt{b^2(b^2+t^2)(a^2+t^2)}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(a^2+t^2)}}$$

קיבלנו כי : $I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(a^2+t^2)}}$.

שלב 2 :

טענה:

האינטגרל $I(a_n,b_n)$ הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב־ n:

$$\forall n \geq 1,\ I(a_n,b_n) = I(a,b)$$

תזכורת:

a_n ממוצע חשבוני של שני מספרים.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

b_n ממוצע הנדסי של שני מספרים.

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

אשר הזכרנו אותם בתחילת פרק 3

הוכחה:

נחשב $I(a_n, b_n)$, $n \geq 1$

* נתחיל לחשב $I(a_1, b_1)$

תזכורת : $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ו־ $b_1 = \sqrt{ab}$.

$$I(a_1, b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(a_1^2+t^2\right)\left(b_1^2+t^2\right)}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{4}+t^2\right)\left((\sqrt{ab})^2+t^2\right)}}$$

נבצע החלפת משתנים : $t = \frac{x^2-ab}{2x} \Longleftarrow t = \frac{1}{2}(x - \frac{ab}{x})$

נחקור את הפונקציה $t(x)$:

נגזור את t לפי x: $\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{ab}{2x^2} = \frac{x^2+ab}{2x^2}$

אנו רואים כי הנגזרת חיובית עבור כל x

נבדוק גבולות של t בשני מקרים ($x \geq 0$): 1. $x \longrightarrow \infty$ 2. $x \longrightarrow 0$

1. עבור $x \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} t(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-ab}{2x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x}{2} - \frac{ab}{2x}\right)$$

$$= [\infty - 0] = \infty$$

2. עבור $x \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} t(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-ab}{2x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \left(\frac{x}{2} - \frac{ab}{2x}\right)$$

$$= [0 - \infty] = -\infty$$

ולכן אחרי החלפת המשתנים נשנה באינטגרל שלנו את :

1־ גבולות של x:

$$x \longrightarrow 0 \Longleftarrow t \longrightarrow -\infty$$

$$x \longrightarrow \infty \Longleftarrow t \longrightarrow \infty$$

ולכן לפי החלפת המשתנים שלנו, גבולות האינטגרל עבור המשתנה x הם :

$x : 0 \longrightarrow \infty$

2-

$$dt = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx \Longleftarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\frac{ab}{x^2}\right)dx$$

3-

$$t^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{2xab}{x} + (\frac{ab}{x})^2\right) \Longleftarrow t^2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{ab}{x}\right)^2$$

$$t^2 = \frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}$$

נציב את השינויים שבצענו מ- 1 עד 3 ב- $I(a_1,b_1)$:

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+\frac{(a+b)^2}{4}\right)\left(t^2+(\sqrt{ab})^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx}{\sqrt{\left(\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+\frac{(a+b)^2}{4}\right)\left(\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+ab\right)}}$$

חישובי עזר לשני הגורמים של המכנה:

הסוגר הראשון :

$$\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2} + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2} + \frac{(a^2+2ab+b^2)}{4}$$

$$= \frac{x^4-2abx^2+a^2b^2+a^2x^2+2abx^2+b^2x^2}{4x^2} = \frac{x^4+a^2b^2+a^2x^2+b^2x^2}{4x^2} = \frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}$$

הסוגר השני :

$$\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2} + ab = \frac{x^4-2abx^2+a^2b^2+4abx^2}{4x^2} = \frac{x^4+2abx^2+a^2b^2}{4x^2} = \frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}$$

נציב את שני הסוגריים שפתחנו בתוך האינטגרל שלנו :

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx}{\sqrt{\left(\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+\frac{(a+b)^2}{4}\right)\left(\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+ab\right)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx}{\sqrt{\left(\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}\right)\left(\frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}\right)}} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx}{\left(\frac{1}{4x^2}\right)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(x^2+ab)}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\left(x^2+ab\right)dx}{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}(x^2+ab)} = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

אנו רואים כי הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$ שבתוך האינטגרל היא פונקציה זוגית

ועבור כל פונקציה $f(x)$ זוגית מתקיים :

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

ולכן ניתן לרשום כי:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = I(a,b)$$

קבלנו כי :

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = I(a,b)$$

הערה:

אם נציב $I(a_2,b_2)$ כך ש־ $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ו־ $b_2 = \sqrt{a_1b_1}$ נקבל:

$$I(a_2,b_2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+\frac{(a_1+b_1)^2}{4}\right)\left(t^2+(\sqrt{a_1b_1})^2\right)}}$$

ואם נבצע בדיוק אותם שלבים נקבל כי :

$$I(a_2,b_2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2+\frac{(a_1+b_1)^2}{4}\right)\left(t^2+(\sqrt{a_1b_1})^2\right)}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a_1^2)(x^2+b_1^2)}} = I(a_1,b_1)$$

והוכחנו קודם כי:

$$I(a_1,b_1) = I(a,b)$$

ולכן :

$$.I(a_2,b_2) = I(a_1,b_1) = I(a,b)$$

ואם נציב $I(a_n,b_n)$ כך ש־ $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ ו־ $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$

ושוב נבצע אותם שלבים נקבל כי :

$$I(a_n,b_n) = I(a_{n-1},b_{n-1}).....= I(a_2,b_2) = I(a_1,b_1) = I(a,b)$$

מש"ל

נזכור שכאשר $n \longrightarrow \infty$ מתקיים : $a_n \longrightarrow M(a,b)$ ו־ $b_n \longrightarrow M(a,b)$.

שלב 3:

נציב ב־ I את a_n ו־ b_n ונשאף את $n \longrightarrow \infty$:

$$I(a,b) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(a,b) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(a_n,b_n)$$
$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a_n^2\cos^2\phi + b_n^2\sin^2\phi}}$$

ואם $n \longrightarrow \infty$ אז בתוך האינטגרל מתקיים:

$$b_n \longrightarrow M(a,b) \text{ ו־ } a_n \longrightarrow M(a,b)$$

נציב באינטגרל :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a_n^2\cos^2\phi + b_n^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{M^2(a,b)\cos^2\phi + M^2(a,b)\sin^2\phi}}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{M^2(a,b)\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{M(a,b)\sqrt{\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{M(a,b)}$$

$M(a,b)$ לא תלוי ב־ ϕ ולכן:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{M(a,b)} = \frac{1}{M(a,b)} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{M(a,b)}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

הוכחנו כי :

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)} \text{ מ.ש.ל.}$$

חישוב זמן המחזור של מטוטלת:

אחרי הוכחת הקשר $I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$, ניתן לחשב את אורך זמן המחזור T של המטוטלת הפשוטה ,כלומר ניתן לענות על שאלה מס' 3 שלנו.

במקרה ש־ $a = 1$ ו־ $b = \cos\frac{\delta}{2}$:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(1, \cos\tfrac{\delta}{2}) = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\pi}{2M(1,\cos\frac{\delta}{2})}$$

שזה בעצם תלוי ב־ δ ו־ L.

אם נשאף את δ לאפס נקבל $M(1,1)$ שזה שווה ל־ 1.

באטרציה מס' 1 :

$$b_1 = \sqrt{1^2} = 1 \text{ ו־ } a_1 = \frac{1+1}{2} = 1$$

כלומר:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} I(1,\cos 0) = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\pi}{2M(1,1)} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\pi$$

זמן מחזור של מטוטלת פשוטה עבור $\delta \longrightarrow 0$ שווה ל־ $T = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\pi$ שזה תלוי באורך המטוטלת L.

דוגמא מספרית :

ניקח מטוטלת באורך $L = 2\,m$ עם זווית התחלתית $\delta = 120^0$

אז זמן המחזור של המטוטלת לפי הנוסחה שקבלנו :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\frac{\pi}{2M(1,\cos\frac{\delta}{2})} = 4\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\pi}{2M(1,\cos\frac{120}{2})}$$

אנו צריכים לחשב את : $M(1,\cos\frac{120^0}{2}) = M(1,\cos(60^0)) = M(1,0.5)$

<u>נבצע אטרציות:</u>

$n = 0:$

$a_0 = 1 \qquad b_0 = 0.5$

$n = 1:$

$a_1 = \frac{1+0.5}{2} = 0.75 \qquad b_1 = \sqrt{1*0.5} = 0.7071067812$

$n = 2:$

$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0.7285533906 \qquad b_2 = \sqrt{a_1*b_1} = 0.7282376576$

$n = 3$

$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 0.7283955241 \qquad b_3 = \sqrt{a_2*b_2} = 0.728395507$

קבלנו כי $a_3 = b_3$ בדיוק של 7 ספרות אחרי הנקודה.

ואם נבצע עוד אטרציות נקבל דיוק יותר חזק.

אנו נסתפק בדיוק הזה, ונרשום כי: $M(1,0.5) = 0.7283955$

ואז אורך זמן המחזור של המטוטלת בדוגמא שלנו: $(g = 9.81)$

$$T = 4\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\pi}{2M(1,0.5)} \approx 4\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\pi}{2(0.7283955)}$$

$$T \approx \sqrt{\frac{2}{g}}\,(8.626062774) = 3.894871$$

מסקנה לדוגמא שלנו:

אורך זמן המחזור של המטוטלת הוא: $T \approx 3.894871\ sec$

מסקנה:

בתנודות קטנות יצא כי $T \approx 2\sqrt{\frac{L}{g}}\pi$ אם נציב $L = 2\,m$ לפי הדוגמא שלנו

נקבל כי: $T \approx 2\sqrt{\frac{L}{g}}\pi \approx 2.8384$

כלומר קבלנו בזווית יותר קטנה, תנודות יותר קטנות ו־ T (זמן מחזור) יותר קטן מאשר ה־ T בדוגמא שלנו עם זווית יותר גדולה.

פרק 5 - חישוב האינטגרל $J(a,b)$

<u>שאלה מס' 1 הייתה: למה שווה ההיקף P של האליפסה?</u>

והוכחנו כי : $P = 4J(a,b)$.

<u>שאלה מס' 2 הייתה: למה שווה אורך (L) גרף הפונקציה</u>

<u>של סינוס (sin)?</u>

והוכחנו כי : $L = 4J(\sqrt{2},1)$.

כאשר (בצורה כללית): $J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\mathrm{a}\cos\phi)^2 + (b\sin\phi)^2} d\phi$.

אבל אין לנו פתרון לאינטגרל $J(a,b)$ שיאפשר לנו לתת תשובה מספרית לשתי השאלות $1+2$, לעומת זאת את האינטגרל $I(a,b)$ אנחנו יכולים לחשב ע"י הקשר שהוכחנו:

$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$, כלומר ע"י הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס.

ולכן: מה שאפשר לעשות בשביל לענות על השאלות $1+2$, זה למצוא קשר בין שני האינטגרלים $I(a,b)$ ו־ $J(a,b)$ ורק אז ניתן לקשר בין $J(a,b)$ לבין $M(a,b)$ ולחשב ערכים מספריים ל־ $J(a,b)$ בשביל לענות על השאלות שלנו. זה מה שנעשה בפרק זה.

<u>שלב 1:</u> נציג את $I(a,b)$ בצורה אחרת

טענה:

נגדיר את האינטגרל $L(a,b)$ בצורה הבאה:

$$L(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

אזי:

$$L(b,a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\phi) d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi) + a^2\cos^2(\phi)}}$$

הוכחה:

נעשה החלפת משתנים : $\left[\phi \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\phi \implies d\phi \longrightarrow -d\phi\right]$ ואז גם גבולות האינטגרל ישתנו: $0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$

ניתן להוסיף סימן מינוס ולהפוך את גבולות האינטגרל.

נציב באינטגרל:

$$L(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\phi)(-d\phi)}{\sqrt{a^2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\phi)+b^2\sin^2(\frac{\pi}{2}-\phi)}}\implies$$

נשתמש בזויות טריגונומטריות ידועות :

$\sin(\frac{\pi}{2}-\phi)=\cos\phi$ ו־ $\cos(\frac{\pi}{2}-\phi)=\sin\phi$

$$L(a,b)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\phi)(-d\phi)}{\sqrt{a^2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\phi)+b^2\sin^2(\frac{\pi}{2}-\phi)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\phi)d\phi}{\sqrt{a^2\sin^2(\phi)+b^2\cos^2(\phi)}}$$

התחלנו מ־ $L(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$

והוכחנו אחרי החלפת המשתנים כי: $L(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\phi)d\phi}{\sqrt{a^2\sin^2(\phi)+b^2\cos^2(\phi)}}$.

ולכן ע"י החלפת סדר המשתנים נקבל:

$$L(b,a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\phi)d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi)}}$$

עכשיו נראה שיש קשר בין האינטגרל $I(a,b)$ לבין שני האינטגרלים $L(b,a)$ ו־ $L(a,b)$:

טענה 1:

$$I(a,b)=L(a,b)+L(b,a) \qquad (1)$$

הוכחה:

$$L(a,b)+L(b,a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(\phi)d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi)}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\cos^2\phi+\sin^2(\phi)]d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi)}}$$

נשתמש בזהות טריגונומטריות: $\cos^2\phi+\sin^2(\phi)=1$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[\cos^2\phi+\sin^2(\phi)]d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{b^2\sin^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi)}}=I(a,b)$$

הראינו כי : $L(a,b)+L(b,a)=I(a,b)$ מ.ש.ל.

<u>שלב 2:</u> דרך האינטגרל $L(a,b)$ והקשר (1) שהוכחנו , ננסה להגיע לקשר בין $J(a,b)$ לבין $I(a,b)$.

ניקח את האינטגרל שהגדרנו קודם : $L(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$

נבצע החלפת משתנים : $\left[t=b\tan\phi\,,dt=b\frac{d\phi}{\cos^2\phi}\right]$ ואז גבולות האינטגרל ישתנו :

$$0\longrightarrow\tan 0=0\,,\frac{\pi}{2}\longrightarrow\tan\frac{\pi}{2}=\infty$$

$$d\phi=\frac{\cos^2\phi dt}{b}$$

ידוע כי:

$$t=b\tan\phi\Longrightarrow\tan\phi=\frac{t}{b}\Longrightarrow\tan^2\phi=\frac{t^2}{b^2}\text{ ו־ }\cos^2\phi=\frac{1}{1+\tan^2\phi}$$

ואז:

$$\cos^2\phi=\frac{1}{1+\tan^2\phi}=\frac{1}{1+\frac{t^2}{b^2}}=\frac{1}{\frac{b^2+t^2}{b^2}}=\frac{b^2}{b^2+t^2}$$

$$d\phi=\frac{\cos^2\phi dt}{b}=\frac{b^2dt}{b(b^2+t^2)}=\frac{bdt}{(b^2+t^2)}$$

וגם:

$$\sin^2\phi=tan^2\phi\cos^2\phi=\frac{\tan^2\phi}{1+\tan^2\phi}=\frac{\frac{t^2}{b^2}}{1+\frac{t^2}{b^2}}=\frac{t^2}{b^2\left(1+\frac{t^2}{b^2}\right)}$$

$$=\frac{t^2}{b^2\left(\frac{b^2+t^2}{b^2}\right)}=\frac{t^2}{b^2+t^2}\Longrightarrow\sin^2\phi=\frac{t^2}{b^2+t^2}$$

קבלנו :

1. $\cos^2\phi = \frac{b^2}{b^2+t^2}$.

2. $\sin^2\phi = \frac{t^2}{b^2+t^2}$

3. $d\phi = \frac{bdt}{(b^2+t^2)}$.

4. גבולות האינטגרל: מ־ 0 עד ∞

נציב את מה שקבלנו באינטגרל:

$$L(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{b^2}{b^2+t^2}\left(\frac{bdt}{(b^2+t^2)}\right)}{\sqrt{a^2\left(\frac{b^2}{b^2+t^2}\right)+b^2\left(\frac{t^2}{b^2+t^2}\right)}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\frac{b^2}{b^2+t^2}\left(\frac{bdt}{(b^2+t^2)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a^2b^2+b^2t^2}{b^2+t^2}\right)}} = \int_0^{\infty} \frac{b^3dt}{(b^2+t^2)^2\sqrt{\left(\frac{b^2(a^2+t^2)}{b^2+t^2}\right)}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{b^3dt}{(b^2+t^2)^2 b\sqrt{\left(\frac{a^2+t^2}{b^2+t^2}\right)}} = \int_0^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)^2\sqrt{\left(\frac{a^2+t^2}{b^2+t^2}\right)}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)^2\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}}\right)\sqrt{a^2+t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a^2+t^2}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)\sqrt{b^2+t^2}\sqrt{a^2+t^2}}$$

אנו רואים כי הפונקציה שבתוך האינטגרל (נסמן אותה ב ־ $f(t)$) היא פונקציה זוגית כלומר : $f(-t) = f(t)$

ולכן באינטגרל שלנו ניתן לרשום:

$$L(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)\sqrt{b^2+t^2}\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2dt}{(b^2+t^2)\sqrt{b^2+t^2}\sqrt{a^2+t^2}}$$

ניקח את האינטגרל : $L(b_1,a_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_1^2dt}{\left(a_1^2+t^2\right)\sqrt{a_1^2+t^2}\sqrt{b_1^2+t^2}}$, כאשר :

$$b_1 = \sqrt{ab} \text{ ו־ } a_1 = \frac{a+b}{2}$$

ונבצע עבורו את החלפת המשתנים: $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{ab}{x}\right)$ אשר השתמשנו בה

קודם בהוכחת הקשר : $M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}$ אשר הוכחנו אותו בפרק 4

(נא לראות את שלבי החקירה של הפונקציה הזאת בהוכחה)

וראינו כי מההחלפה הזאת נקבל :

1- גבולות של x:

$$x=0 \implies t\longrightarrow -\infty$$

$$x\longrightarrow \infty \implies t\longrightarrow \infty$$

ולכן לפי החלפת המשתנים שלנו, גבולות האינטגרל עבור המשתנה x הם :

$$x:\ 0\longrightarrow \infty$$

2- $dt=\frac{1}{2}\left(1+\frac{ab}{x^2}\right)dx \Longleftarrow dt=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)dx$.

3- $t^2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{ab}{x}\right)^2 \Longleftarrow t^2=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{2xab}{x}+(\frac{ab}{x})^2\right)$

$$\Longleftarrow t^2=\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}$$

4- פתחנו גם את $b_1^2+t^2$ וראינו כי :

$$b_1^2+t^2=\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+ab=\frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}$$

5- וגם פתחנו את $a_1^2+t^2$ וראינו כי:

$$a_1^2+t^2=\left(\frac{x^4-2abx^2+a^2b^2}{4x^2}+\frac{(a+b)^2}{4}\right)=\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}$$

נציב את מה שקבלנו באינטגרל שלנו $L(b_1,a_1)$:

$$L(b_1,a_1)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_1^2dt}{\left(a_1^2+t^2\right)\sqrt{a_1^2+t^2}\sqrt{b_1^2+t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)\right)dx}{\left(\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}\right)\sqrt{\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}}\sqrt{\frac{(x^2+ab)^2}{4x^2}}}$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^2\int_0^{\infty}\frac{(a+b)^2\left(\left(\frac{x^2+ab}{x^2}\right)\right)dx}{\left(\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}\right)\sqrt{\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+ab)^2}{16x^4}}}$$

$$=\frac{1}{16}\int_0^{\infty}\frac{(a+b)^2\left(x^2+ab\right)dx}{(x^2)\left(\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{4x^2}\right)\left(\frac{1}{4x^2}\right)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+ab)^2}}$$

$$= \frac{(4)^2}{16} \int_0^\infty \frac{x^2(a+b)^2\left(x^2+ab\right)dx}{((x^2+a^2)(x^2+b^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+ab)^2}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^2(a+b)^2\left(x^2+ab\right)dx}{((x^2+a^2)(x^2+b^2))(x^2+ab)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

$$= (a+b)^2 \int_0^\infty \frac{x^2dx}{((x^2+a^2)(x^2+b^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

חישוב עזר:

ניקח את $x^2\left(a+b\right)^2$ ונכפיל אותו ב־ $\left(a+b\right)\left(a-b\right)$ ונחלק אותו באותו ביטוי :

$$x^2\left(a+b\right)^2 = x^2\left(a+b\right)^2 \frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = x^2\left(a+b\right)\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}$$

$$= x^2\left(a+b\right)\frac{\left(a^2-b^2\right)}{(a-b)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[x^2\left(a^2-b^2\right)\right]$$

$$= \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[x^2a^2 - x^2b^2\right] = \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[x^2a^2 + a^2b^2 - a^2b^2 - x^2b^2\right]$$

$$= \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[a^2(x^2+b^2) - b^2(x^2+a^2)\right]$$

ולכן אם ניקח מתוך האינטגרל את הביטוי $\frac{x^2(a+b)^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ ונציב במקום $x^2\left(a+b\right)^2$ את מה שקבלנו:

אז נקבל:

$$\frac{x^2(a+b)^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}\frac{\left[a^2(x^2+b^2)-b^2(x^2+a^2)\right]}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[\frac{a^2}{(x^2+a^2)} - \frac{b^2}{(x^2+b^2)}\right]$$

נציב בתוך האינטגרל את הביטוי שקבלנו:

$$L(b_1,a_1) = (a+b)^2\int_0^\infty \frac{x^2dx}{((x^2+a^2)(x^2+b^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

$$= \frac{(a+b)}{(a-b)}\int_0^\infty \frac{\left[\frac{a^2}{(x^2+a^2)} - \frac{b^2}{(x^2+b^2)}\right]dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

$$= \frac{(a+b)}{(a-b)}\left[\int_0^\infty \frac{a^2dx}{((x^2+a^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} - \int_0^\infty \frac{b^2dx}{((x^2+b^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\right]$$

תזכורת:

הגדרנו קודם כי : $L(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$ ואחרי כמה החלפת

משתנים וכמה שלבים הוכחנו כי

$$L(a,b)=\int_0^\infty \frac{b^2dx}{(b^2+x^2)\sqrt{(b^2+x^2)(a^2+x^2)}}$$

ו־

$$L(b,a)=\int_0^\infty \frac{a^2dx}{(a^2+x^2)\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}}$$

ולכן :

$$\left[\int_0^\infty \frac{a^2dx}{((x^2+a^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}-\int_0^\infty \frac{b^2dx}{((x^2+b^2))\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}\right]$$

$$=L(b,a)-L(a,b)$$

כלומר, קבלנו את היחס הבא:

טענה 2:

$$L(b_1,a_1)=\frac{(a+b)}{(a-b)}\left[L(b,a)-L(a,b)\right] \qquad (2)$$

כאשר:

$a_1=\frac{a+b}{2}$ ממוצע חשבוני

$b_1=\sqrt{ab}$ ממוצע הנדסי

<u>שלב 3:</u> נמצא קשר בין $L(a,b)$ לבין $I(a,b)$.

נחשב את $a_1^2-b_1^2$:

$$a_1^2-b_1^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{(a+b)^2-4ab}{4}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\Longrightarrow 4\left(a_1^2-b_1^2\right)=(a-b)^2$$

נכפיל את שני הצדדים ב־ $L(b_1,a_1)$:

$$L(b_1,a_1)4\left(a_1^2-b_1^2\right)=(a-b)^2\,L(b_1,a_1)$$

חישוב עזר:

1. נשתמש במשוואה (2) שהוכחנו בשלב 2 :

$$(a-b)^2 L(b_1,a_1) = (a-b)^2 \left[\frac{(a+b)}{(a-b)}\left[L(b,a)-L(a,b)\right]\right]$$
$$= (a-b)\left[(a+b)\left[L(b,a)-L(a,b)\right]\right]$$
$$= (a^2-b^2)\left(L(b,a)-L(a,b)\right)$$

2. נשתמש במשוואה (1) שהוכחנו בשלב 1:

$$I(a,b) = L(a,b) + L(b,a) \implies L(a,b) = I(a,b) - L(b,a)$$

לכן:

$$(a-b)^2 L(b_1,a_1) = (a^2-b^2)\left[L(b,a)-L(a,b)\right]$$
$$= (a^2-b^2)\left[L(b,a)-(I(a,b)-L(b,a))\right]$$
$$= (a^2-b^2)\left[2L(b,a)-I(a,b)\right]$$

אחרי חישובי העזר 2+1 נקבל כי:

$$4L(b_1,a_1)\left(a_1^2-b_1^2\right) = \left(a^2-b^2\right)\left[2L(b,a)-I(a,b)\right] \qquad (3)$$

<u>שלב 4:</u> ביצוע סכום אטרציות

תזכורת: $c_n = \sqrt{a_n^2-b_n^2}$ ואז $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$

במקרה $n=0$: $c_0^2 = a_0^2 - b_0^2$.

במקרה $n=1$: $c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$.

נשתמש ב שוויון (3) שהוכחנו בשלב 3:

נציב במקום a^2-b^2 (ששווה ל־ $a_0^2-b_0^2$), את c_0^2.

נציב במקום $a_1^2-b_1^2$, את c_1^2, ונקבל:

$$4L(b_1,a_1)c_1^2 = c_0^2\left[2L(b,a)-I(a,b)\right]$$

נעביר אגפים ונחלק ב־ 2 ונקבל:

$$2c_0^2L(b,a) - 4L(b_1,a_1)c_1^2 = c_0^2\left[I(a,b)\right]$$
$$c_0^2L(b,a) - 2L(b_1,a_1)c_1^2 = \tfrac{1}{2}c_0^2\left[I(a,b)\right]$$

נזכור כי:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$b_1 = \sqrt{ab}$$

ואז לכל $k \in N$:

$$a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$$

$$b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}$$

ולכן ניתן לרשום בצורה כללית עבור כל $k \in N$:

שוויון (**):

$$c_k^2 L(b_k, a_k) - 2L(b_{k+1}, a_{k+1})c_{k+1}^2 = \frac{1}{2}c_k^2 \left[I(a_k, b_k)\right]$$

$$0 \leq k < \infty$$

* נפעיל כמה אטרציות עבור השוויון (**) :

הוכחנו כי השוויון (**) נכון לכל k, נכפיל את שני האגפים של (**) ב־ 2^k.

$$2^k \left[c_k^2 L(b_k, a_k) - 2c_{k+1}^2 L(b_{k+1}, a_{k+1})\right] = 2^k \frac{1}{2} c_k^2 I(a_k, b_k) = 2^k \frac{1}{2} c_k^2 I(a, b)$$

נפעיל כמה אטרציות מ־ $k = 0$ עד $k = n - 1$

$$k = 0: \quad 2^0 \left[c_0^2 L(b_0, a_0) - 2c_1^2 L(b_1, a_1)\right] = 2^0 \frac{1}{2} c_0^2 I(a, b)$$

נמשיך כמה אטרציות עד $k = n - 1$

$$k = 1: \quad 2^1 \left[c_1^2 L(b_1, a_1) - 2c_2^2 L(b_2, a_2)\right] = 2^1 \frac{1}{2} c_1^2 I(a, b)$$

הערה:

מכיוון שהוכחנו קודם כי : $I(a_n, b_n) = I(a, b)\ \forall n \in N$, אז ניתן להשאיר את $I(a, b)$ בכל האטרציות בלי לציין את מספר האטרציה ל־ a ו־ b.

$$k = 2: \quad 2^2 \left[c_2^2 L(b_2, a_2) - 2c_3^2 L(b_3, a_3)\right] = 2^3 \frac{1}{2} c_2^2 I(a, b)$$

ולכן ניתן לראות את החוקיות בצורה כללית ולרשום כי עבור $k = n - 1$:

$k = n - 1:$

$$2^{n-1} \left[c_{n-1}^2 L(b_{n-1}, a_{n-1}) - 2c_n^2 L(b_n, a_n)\right] = 2^{n-1} \frac{1}{2} c_{n-1}^2 I(a, b)$$

נסכם את כל האטרציות מ־ $k=0$ עד $k=n-1$

ולכן באגף ימין נקבל:

$$2^0\tfrac{1}{2}c_0^2I(a,b)+2^1\tfrac{1}{2}c_1^2I(a,b)+.....+2^{n-1}\tfrac{1}{2}c_{n-1}^2I(a,b)$$
$$=\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}c_k^2I(a,b)$$

ובאגף שמאל נקבל:

$$2^0\left[c_0^2L(b_0,a_0)-2c_1^2L(b_1,a_1)\right]+2^1\left[c_1^2L(b_1,a_1)-2c_2^2L(b_2,a_2)\right]+$$
$$2^2\left[c_2^2L(b_2,a_2)-2c_3^2L(b_3,a_3)\right]....+$$
$$+2^{n-1}\left[c_{n-1}^2L(b_{n-1},a_{n-1})-2c_n^2L(b_n,a_n)\right]$$
$$=c_0^2L(b,a)-2^nc_n^2L(b_n,a_n)$$

הערה:

אנו רואים כי באגף שמאל:

$-2c_1^2L(b_1,a_1)$ ו־ $2c_1^2L(b_1,a_1)$ מתבטלים .

$-2^2c_2^2L(b_2,a_2)$ ו־ $2^2c_2^2L(b_1,a_2)$ מתבטלים .

$-2^3c_3^2L(b_3,a_3)$ ו־ $2^3c_3^2L(b_3,a_3)$ מתבטלים .

וכך הלאה עד האיברים :

$-2^{n-2}c_{n-2}^2L(b_{n-2},a_{n-2})$ ו־ $2^{n-2}c_{n-2}^2L(b_{n-2},a_{n-2})$

שגם כן מתבטלים .

ומה שנשאר מכל המחוברים :

$$2^0c_0^2L(b,a)-2^nc_n^2L(b_n,a_n)$$

ולכן קבלנו השוויון הבא:

$$c_0^2L(b,a)-2^nc_n^2L(b_n,a_n)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}c_k^2\right)I(a,b) \qquad (4)$$

תזכורת:

1. הוכחנו בפרק 3 כי: $c_n^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n c_0^2$

2.והגדרנו את שני האינטגרלים:

$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$ ו־ $L(b,a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2 sin^2\phi}}$

3.והוכחנו בשלב 1 את השוויון (1) : $I(a,b) = L(a,b) + L(b,a)$

ומכאן ניתן לרשום כי : $I(a,b) > L(b,a)$

ומכיוון שהוכחנו קודם כי מתקיים: $I(a,b) = I(a_n,b_n)\ \forall n \in N$

אז: $I(a_n,b_n) > L(b_n,a_n)$.

<u>שלב 5:</u> גבול כאשר n שואף ל־ ∞

טענה:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n c_n^2 L(b_n,a_n) = 0$$

הוכחה:

נשתמש בתזכורת 1+3, ונחסום

$$2^n c_n^2 L(b_n,a_n) < 2^n \left(\frac{1}{4}\right)^n c_0^2 L(b_n,a_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0^2 L(b_n,a_n)$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0^2 I(b,a)$$

נחשב $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0^2 I(b,a)$:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n c_0^2 I(b,a) = c_0^2 I(b,a) \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= c_0^2 I(b,a)(0) = 0$$

הוכחנו כי: $\lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n c_n^2 L(b_n,a_n) = 0$ מ.ש.ל.

* ניקח את המשוואה (4) שהוכחנו בשלב 4

ונבצע גבול עבור $n \longrightarrow \infty$ משני צדדים נקבל:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[c_0^2 L(b,a) - 2^n c_n^2 L(b_n,a_n)\right]$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-1} c_k^2\right) I(a,b)\right]$$

הוכחנו כי : $\lim_{n\longrightarrow\infty} 2^n c_n^2 L(b_n, a_n) = 0$ ו־ $c_0^2 L(b,a)$ קבוע לא תלוי ב־ n.

ולכן:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left[c_0^2 L(b,a) - 2^n c_n^2 L(b_n, a_n)\right]$$
$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[c_0^2 L(b,a)\right] = c_0^2 L(b,a)$$
$$c_0^2 L(b,a) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1} c_k^2\right) I(a,b)$$

נסמן : $S(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k-1} c_k^2\right)$

הערה:

S תלוי ב־ a ו־ b מכיוון שהוא תלוי ב c_k (לפי הסכום $\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k-1} c_k^2\right)$)

ו־ c_k תלוי ב־ a_k ו־ b_k ע"י הקשר שהגדרנו קודם: $c_k^2 = a_k^2 - b_k^2$ ו־ a_k ו־ b_k תלויים ב־ a ו־ b.

ולכן אחרי הסימון שלנו ניתן לרשום כי:

$$c_0^2 L(b,a) = S(a,b) I(a,b) \tag{5}$$

*** הערה 1:**

נשתמש בשוויון (1) שהוכחנו בשלב 1.

$$c_0^2 L(a,b) = c_0^2 \left(I(a,b) - L(b,a)\right)$$

*** הערה 2:**

ובעזרת שוויון (5).

$$c_0^2 L(a,b) = c_0^2 I(a,b) - c_0^2 L(b,a)$$
$$= c_0^2 I(a,b) - S(a,b) I(a,b) = I(a,b)\left[c_0^2 - S(a,b)\right]$$

ולכן:

טענה:

$$c_0^2 L(a,b) = I(a,b)\left[c_0^2 - S(a,b)\right] \qquad (6)$$

<u>שלב 6 ואחרון:</u> מציאת הקשר בין I ל־ J

נשתמש בשוויון (5) ונציב :

$$c_0^2 = a^2 - b^2 \text{ ו־ } L(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

$$S(a,b)I(a,b) = c_0^2 L(b,a) = (a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

ננסה לפתח את הביטוי שבתוך האינטגרל: $\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$

נשתמש בזהות: $(1-\cos^2\phi) = \sin^2\phi$

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{a^2\sin^2\phi - b^2\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{a^2\left(1-\cos^2\phi\right) - b^2\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{a^2 - a^2\cos^2\phi - b^2\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} - \frac{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

קבלנו:

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} - \sqrt{\left(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi\right)}$$

נציב בתוך האינטגרל שלנו :

$$S(a,b)I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(a^2-b^2\right)\sin^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} - \sqrt{\left(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi\right)}\right] d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi\right)} d\phi$$

תזכורת:

הגדרנו קודם את שני האינטגרלים:

$$J(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}d\phi$$

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$$

ולכן :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi\right)}d\phi$$

$$=a^2I(a,b)-J(a,b)$$

קבלנו:

$$S(a,b)I(a,b)=a^2I(a,b)-J(a,b)$$

נעביר אגפים ונחלץ את $J(a,b)$:

$$S(a,b)I(a,b)=a^2I(a,b)-J(a,b)$$

$$\Longrightarrow J(a,b)=a^2I(a,b)-S(a,b)I(a,b)$$

$$J(a,b)=a^2I(a,b)-S(a,b)I(a,b)$$

$$\Longrightarrow J(a,b)=I(a,b)\left[a^2-S(a,b)\right]$$

תוצאה סופית:

קבלנו את הקשר בין שני אינטגרלים $I(a,b)$ ו־ $J(a,b)$

שנסכם אותו ע"י משפט.

משפט:

$$J(a,b)=I(a,b)\left[a^2-S(a,b)\right] \qquad (7)$$

נענה על השאלה מס' 2:

למה שווה אורך (L) גרף הפונקציה של סינוס (sin)

הוכחנו קודם (בפרק 4) כי $I(a,b)=\frac{\pi}{2M(a,b)}$

ולכן קל לחשב את $I(a,b)$ ע"י הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס $M(a,b)$

ובאותו הזמן הוכחנו כי: $c_n^2=a_n^2-b_n^2$ נדרש כדי לייצר את הטור שמגדיר

את S , ובזמן החישוב של M מחשבים את הטור שמגדיר את S בקלות .

נזכיר כי : $S(a,b)=\sum_{k=0}^{\infty}2^{k-1}c_k^2$.

לכן הקשרים שהוכחנו נותנים לנו שיטה מאוד יעילה לקירוב האינטגרל

$J(a,b)$.

ומכאן ניתן לענות על השאלה מספר 2 :

מהו אורך של גרף פונקצית ה־ sin במחזור שלם.

הוכחנו בשאלה 2 כי אורך גרף פונקצית ה־ sin שווה ל־ $4J(\sqrt{2},1)$

כאשר $a=\sqrt{2}$ ו־ $b=1$.

ואז ניתן להציב את a ו־ b הללו בנוסחה (7) :

$$J(a,b)=I(a,b)\left[a^2-S(a,b)\right]$$

וממנה לקבל את אורך הגרף של פונקצית ה־ sin במחזור שלם, נציב :

$$4J(a,b)=4I(a,b)\left[a^2-S(a,b)\right]\Longrightarrow\left[a=\sqrt{2}\quad b=1\right]$$

$$\Longrightarrow 4J(\sqrt{2},1)=4I(\sqrt{2},1)\left[2-S(\sqrt{2},1)\right]$$

נשתמש ביחס : $I(a,b)=\frac{\pi}{2M(a,b)}$ ונציב : $a=\sqrt{2}$ ו־ $b=1$

$\Longleftarrow$ $I(\sqrt{2},1)=\frac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}$, נציב את הביטוי הזה במקום $I(\sqrt{2},1)$

$$\Longrightarrow 4J(\sqrt{2},1)=\frac{4\pi}{2M(\sqrt{2},1)}\left[2-S(\sqrt{2},1)\right]=\frac{2\pi}{M(\sqrt{2},1)}\left[2-S(\sqrt{2},1)\right]$$

נזכיר את החישוב של הממוצע החשבוני־הנדסי $M(\sqrt{2},1)$ בעזרת

האיטרציות המגדירות אותו.

(נרשום את התוצאות בדיוק של 9 ספרות אחרי הנקודה)

$n=0 \quad a_0=\sqrt{2} \qquad b_0=1$

$n=1 \quad a_1=\frac{\sqrt{2}+1}{2}=1.207106781 \qquad b_1=\sqrt{\sqrt{2}*1}=1.182907115$

$n=2 \quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=1.198156948 \qquad b_2=\sqrt{a_1*b_1}=1.198123521$

$n=3 \quad a_3=\frac{a_2+b_2}{2}=1.198140235 \qquad b_3=\sqrt{a_2*b_2}=1.198140234$

ולכן אנו רואים כי a_3 ו־ b_3 מתקרבים לאותו מספר בדיוק של 8 ספרות אחרי הנקודה, והמספר הזה הוא הממוצע החשבוני־ הנדסי של שני המספרים $b=1 \qquad a=\sqrt{2}$.

כלומר : $M(\sqrt{2},1)=1.198140235$.

נחשב את $S(\sqrt{2},1)$ בכדי לחשב את $4J(\sqrt{2},1)$:

הגדרנו קודם: $S(a,b)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k-1}c_k^2\right)$

הסכום הוא אינסופי, כלומר ככל שנסכם יותר איברים המספר ילך ויתכנס לערך המדויק.

בכדי לקרב את הסכום, ניקח סכום חלקי :

$$S_2(\sqrt{2},1)=\sum_{k=0}^{2}2^{k-1}c_k^2$$

$S_2(\sqrt{2},1)=\sum_{k=0}^{2}\left(2^{k-1}c_k^2\right)=\frac{1}{2}c_0^2+2^0c_1^2+2^1c_2^2$

$c_0^2=a_0^2-b_0^2=2-1^2=1$

$c_1^2=a_1^2-b_1^2=0.04289321873$

$c_2^2=a_2^2-b_2^2=8.010046724*10^{-5}$

ולכן :

$S_2(\sqrt{2},1)=\frac{1}{2}(1)+(0.04289321873)+2(8.010046724*10^{-5})$
$=0.5430534197$

נציב את $S_2(\sqrt{2},1)$ ואת $M(\sqrt{2},1)$ ב־ $4J(\sqrt{2},1)$:

$4J(\sqrt{2},1)=\frac{2\pi}{M(\sqrt{2},1)}\left[2-S(\sqrt{2},1)\right]$

$=\frac{2\pi}{(1.198140235)}\left[2-0.5430534197\right]=7.640396$

כלומר אורך הגרף של פונקצית ה sin במחזור 2π שווה ל־ $4J(\sqrt{2},1)=7.640396$.

ביחס לשאלה מספר 1־למה שווה ההיקף P של האליפסה?

קבלנו כי היקף האליפסה שווה ל־ $P = 4J(a,b)$ נציב במקום $J(a,b)$ את $I(a,b)\left[a^2 - S(a,b)\right]$ ואז:

$$P = 4J(a,b) = 4I(a,b)\left[a^2 - S(a,b)\right] = \frac{2\pi\left[a^2 - S(a,b)\right]}{M(a,b)}$$

הערה: אם נפסיק את האיטרציות אחרי n צעדים בחישוב הממוצע החשבוני־הנדסי לשני המספרים a ו־ b, נקבל כי הממוצע קרוב למספרים a_n או b_n, ולכן במקום לרשום $M(a,b)$ ניתן לרשום a_n

$$P \cong \frac{2\pi\left[a^2 - S(a,b)\right]}{a_n}$$

* אם $a = b$ שזה מקרה פרטי של אליפסה "מעגל" נקבל כי :

$$S(a,b) = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} c_k^2$$

$$c_k = a^2 - a^2 = 0$$

$$S(a,a) = 0$$

טענה:

$M(a,a) = a$ ־ הממוצע החשבוני־הנדסי של אותו מספר שווה למספר עצמו.

הוכחה:

$$\frac{a+a}{2} = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

נחשב $M(a,a)$ לפי שיטת האטרציות שהשתמשנו בה קודם:

$$a_0 = a \qquad b_0 = a$$

$$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{a+a}{2} = a \qquad b_1 = \sqrt{a_0 b_0} = \sqrt{a^2} = a$$

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a+a}{2} = a \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1} = \sqrt{a^2} = a$$

וכך הלאה עד שנגיע ל־ a_n ו־ b_n

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{a+a}{2} = a \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \sqrt{a^2} = a$$

קבלנו כי : $M(a,a) = a$ מש"ל.

ולכן :

$$P \cong \frac{2\pi\left[a^2-0\right]}{a} = 2\pi a$$

$$P = 2\pi a$$

פרק 6: אלגוריתם לחישוב π

אנו זקוקים למרכיב אחרון לפני פיתוח אלגוריתם לחישוב π,

שזה היחס הבא בין $L(\sqrt{2},1)$ ל־ $I(\sqrt{2},1)$:

משפט:

$$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)=\frac{\pi}{4}$$

הוכחה (ב־ 6 שלבים)

1־ הגדרנו קודם את $L(a,b)$ בצורה הבאה:

$$L(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}$$

נציב $a=\sqrt{2}$ ו־ $b=1$:

$$L(\sqrt{2},1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{2\cos^2\phi+\sin^2\phi}}$$

נעשה החלפת משתנים :

$$x:0\longrightarrow 1,\ \phi:0\longrightarrow\frac{\pi}{2}\Longleftarrow dx=-\sin\phi d\phi\Longleftarrow x=\cos\phi$$

$$\sin^2\phi=1-\cos^2\phi=1-x^2$$

ואז : $\sin\phi=\sqrt{1-x^2}$ ו־ $dx=-\sin\phi d\phi=-\sqrt{1-x^2}d\phi$

ולכן: $d\phi=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

נציב ב־ $L(\sqrt{2},1)$:

$$L(\sqrt{2},1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\phi d\phi}{\sqrt{2\cos^2\phi+\sin^2\phi}}=-\int_0^1\frac{-x^2dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{2x^2+(1-x^2)}\right)}=$$

$$=\int_0^1\frac{x^2dx}{\left(\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}\right)}=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

נעשה החלפת משתנים:

$$t:0\longrightarrow 1,\ x:0\longrightarrow 1\Longleftarrow dt=4x^3dx\Longleftarrow t=x^4$$

(כלומר גבולות האינטגרל לא משתנות)

$$dx=\frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}\longleftarrow\sqrt{t}=x^2\longleftarrow x=t^{\frac{1}{4}}$$

נציב באינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}dt}{\left(4t^{\frac{3}{4}}\right)\left(\sqrt{(1-t)}\right)} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{4}}dt}{\left(\sqrt{(1-t)}\right)}$$

** חישוב עזר:

נגדיר פונקצית הבטה של אוילר :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

אצלנו באינטגרל $L(\sqrt{2},1)$ מתקיים:

$$y = \frac{1}{2} \Longleftarrow y-1 = -\frac{1}{2} \text{ ו־ } x = \frac{3}{4} \Longleftarrow x-1 = -\frac{1}{4}$$

ולכן : $L(\sqrt{2},1) = \frac{1}{4}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$

2 ־ הגדרנו גם את האינטגרל $I(a,b)$:

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}$$

נעשה החלפת משתנים: $x = \cos\phi$

ואז $dx = -\sin\phi d\phi$ ו־ $\sin^2\phi = 1-\cos^2\phi = 1-x^2$

ולכן: $d\phi = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

שינו בגבולות : $x: 0 \longrightarrow 1$, $\phi: 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

נציב באינטגרל $I(\sqrt{2},1)$

$$I(\sqrt{2},1) = -\int_0^1 \frac{-dx}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(\sqrt{2x^2+1-x^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

נעשה עוד החלפת משתנים :

$$x = t^{\frac{1}{4}} \longleftarrow dt = 4x^3dx \longleftarrow t = x^4$$

נציב:

$$I(\sqrt{2},1) = \int_0^1 \frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t}} = \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

לפי הגדרת פונקצית בטה של אוילר:

$$y = \frac{1}{2} \Longleftarrow y-1 = -\frac{1}{2} \text{ ו־ } x = \frac{1}{4} \Longleftarrow x-1 = -\frac{3}{4}$$

$$I(\sqrt{2},1) = \frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

3 - הגדרה:

$\Gamma(x)$ היא פונקצית גמא אשר מוגדרת בצורה הבאה :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

התוצאה החשובה ביותר שמשתמשים בה היא הקשר הבא:

טענה:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

4 - טענה:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

הוכחה:

לפי הגדרת פונקצית גמא: $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt$

נבצע אינטגרציה בחלקים

$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = [u = t^x,\ du = xt^{x-1},\ dv = e^{-t}dt,\ v = -e^{-t}]$

$= -t^x e^{-t}\ |_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}dt$

חישוב עזר (1):

$$\int_0^\infty e^{-t}xt^{x-1}dt = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

חישוב עזר (2):

$t^x e^{-t}\ |_0^\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} t^x e^{-t} + \lim_{t\longrightarrow 0} t^x e^{-t}$

נחשב כל אחד מהגבולות בנפרד:

$\lim_{t\longrightarrow 0} t^x e^{-t} = 0^x(\frac{1}{e^0}) = 0$

$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^x e^{-t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{t^x}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

קבלנו אי־וודאות מסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ולכן ניתן לבצע לופיטל

אם x מספר שלם

$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{t^x}{e^t} = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{xt^{x-1}}{e^t}$

נראה כי השוויון נכון עבור $x = 1$ ו־ $x = 2$

$x = 1 \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^0}{e^t} = 0$

פעמים לופיטל

$x = 2 \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{2t^1}{e^t} = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{2t^0}{e^t} = 0$

עבור $x = n$

n פעמים לופיטל

$x = n \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{nt^{n-1}}{e^t} = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(1)t^0}{e^t}$

$= \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{n!t^0}{e^t} = 0$

אם x לא שלם ניקח למשל $x < n$ ו־ n הוא מספר שלם, אז $\forall t,\ t^x < t^n$

ולכן:

$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} < \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^n}{e^t} = 0$

ואז:

$t^x e^{-t} \mid_0^\infty = 0$

מסקנה: לפי חישובי עזר (1) +(2)

$\Gamma(x+1) = -t^x e^{-t} \mid_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} x t^{x-1} dt = 0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ מש"ל

5 ־ טענה 1:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

* p ו־ q שני משתנים כמו x ו־ y

הוכחה:

$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$

נעשה החלפת משתנים:

$$s = x^2$$

$$t = y^2$$

$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2p-1} y^{2q-1} exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right] dxdy$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$x^2 + y^2 = r$$
$$= 2\int_0^\infty (r^{2p+2q-1}exp(-r^2)dr)\left(2\int_0^{2\pi}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\right)$$

החלפת משתנים:

$$\tau = \cos^2\theta$$
$$\delta = r^2$$
$$= \int_0^\infty \delta^{p+q-1}e^{-\delta}d\delta\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau$$
$$= \Gamma(p+q)B(p,q)$$

הוכחנו כי : $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ מש"ל.

טענה 2:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$$

הוכחה:

בהגדרת הפונקציה $\Gamma(x)$:

נציב $x = \frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt \Longleftarrow$

נבציע החלפת משתנים : $u = \sqrt{t},\ du = 2udu \longleftarrow\ t = u^2$

גבולות האינטגרל: $t : 0 \longrightarrow \infty$ ואז: $u : 0 \longrightarrow \infty$

נציב באינטגרל:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-u^2}u^{-1}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

מכיוון שהפונקציה e^{-u^2} זוגית אז מתקיים:

$$2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \tfrac{1}{2}2\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du$$

קבלנו: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du$

נעלה את האינטגרל בריבוע:

$$\left(\Gamma(\tfrac{1}{2})\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv\right)$$
$$= \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}e^{-v^2}dudv = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-(u^2+v^2)}dudv \Longrightarrow$$

נשתמש בקארדינאטות קוטביות: $u = r\cos\theta\ , v = r\sin\theta\ , u^2 + v^2 = r^2$

גבולות האינטגרל: $r : 0 \longrightarrow \infty$ ו־ $\theta : 0 \longrightarrow 2\pi$

$$\Longrightarrow = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}rdr \Longrightarrow$$

חישוב עזר :

החלפת משתנים באינטגרל:

$\int_0^\infty e^{-r^2} rdr$: $r = \sqrt{t}$, $r^2 = t \Longleftarrow 2rdr = dt \Longleftarrow rdr = \frac{1}{2}dt$

נציב באינטגרל שבחרנו:

$\int_0^\infty e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\,|_0^\infty = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty} - e^{-0}\right) = \frac{1}{2}$

קבלנו : $\int_0^\infty e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$

ולכן:

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ מש"ל

6- השלב האחרון של הוכחת השוויון :

$$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1) = \frac{\pi}{4}$$

הוכחנו בשלב 1 כי:

$$L(\sqrt{2},1) = \frac{1}{4}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$$

ובשלב 2:

$$I(\sqrt{2},1) = \frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$$

ובשלב 5:

$$B(x+y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \Longleftarrow \Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x+y)$$

נכפיל $L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)$

$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1) = \frac{1}{4}B(\frac{3}{4},\frac{1}{2})\frac{1}{4}B(\frac{1}{4},\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} =$

$= \frac{1}{16}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{1}{16}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\left(\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})\right) =$

לפי מה שהוכחנו בשלב 4: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

אם $x = \frac{1}{4}$ אז: $\Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$

$= \frac{1}{16}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}\left(\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{16}\frac{\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2$

לפי מה שהוכחנו ב 5: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\frac{1}{4}\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

מסקנה סופית לכל השלבים מ- 1 עד 6 :

$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1) = \frac{\pi}{4}$ מש"ל

פרק 7: למה שווה π?

חישבנו קודם את הממוצע החשבוני־הנדסי לשני המספרים :

$a=\sqrt{2}$ ו־ $b=1$ וקבלנו:

$$M(\sqrt{2},1)\approx 1.19814023$$

חשבנו גם את c_0^2 של שני המספרים הללו:

$$c_0^2=a_0^2-b_0^2=2-1=1$$

הראינו בפרק 5 (בנוסחה מספר (7)) כי מתקיים:

$$c_0^2L(a,b)=(c_0^2-S(a,b))I(a,b)$$

ולכן אם נציב בשוויון הזה את : $a=\sqrt{2}$ ו־ $b=1$ ע"י $c_0^2=1$ נקבל:

$$L(\sqrt{2},1)=(1-S(a,b))I(\sqrt{2},1)$$

נכפיל שני האגפים ב־ $I(\sqrt{2},1)$:

$$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)=(1-S(a,b))I(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)$$

לפי מה שהוכחנו בפרק 6 :

$$L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)=\tfrac{\pi}{4} \text{ ו־ } I(\sqrt{2},1)=\tfrac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}$$

נקבל:

$$\tfrac{\pi}{4}=L(\sqrt{2},1)I(\sqrt{2},1)=(1-S(\sqrt{2},1))\left(I(\sqrt{2},1)\right)^2$$

$$=(1-S(\sqrt{2},1))\left(\tfrac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}\right)^2$$

קבלנו :

$$\tfrac{\pi}{4}=(1-S(\sqrt{2},1))\tfrac{\pi^2}{4M^2(\sqrt{2},1)}\implies 1=(1-S(\sqrt{2},1))\tfrac{\pi}{M^2(\sqrt{2},1)}$$

אם נבודד את π נקבל:

$$\pi=\tfrac{M^2(\sqrt{2},1)}{1-S(\sqrt{2},1)}$$

כאשר: $S(\sqrt{2},1)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k-1}c_k^2(\sqrt{2},1)\right)$

הנוסחה הזאת היא בעצם ביטוי למספר המפורסם π בעזרת הממוצע החשבוני־הנדסי של גאוס והסכום $S(\sqrt{2},1)$.

* נראה אלגוריתם ב־ $matlab$ לחישוב המספר π בעזרת הנוסחה $\pi = \frac{M^2(\sqrt{2},1)}{1-S(\sqrt{2},1)}$ בעמוד הבא

<u>הערה:</u>

אם ננסה לעשות 20 אטרציות כלומר נציב $n = 20$ נקבל דיוק של מליון ספרות למספר π וזה מראה התכנסות מאוד מהירה למספר π במספר אטרציות קטן וסופי.

אלגוריתם לחישוב π ע"י הנוסחה : $\pi = \frac{M^2(\sqrt{2},1)}{1-S(\sqrt{2},1)}$

pi.m

```
a=zeros(1,6);
b=zeros(1,6);
c_2=zeros(1,6);
a(1)=sqrt(2); % first number
b(1)=1; % second number
c_2(1)=1; % c_2=c^2
S=0.5;
fprintf('a=%f\nb=%f\nc=%f\nS=%f\n\n',a(1),b(1),c_2(1),S);
for i=2:6
    a(i)=(a(i-1)+b(i-1))/2;
    fprintf('a=%f\n',a(i));

    b(i)=sqrt(a(i-1)*b(i-1));
    fprintf('b=%f\n',b(i));

    c_2(i)=a(i)^2-b(i)^2;
    fprintf('c=%f\n',c_2(i));

    S=S+(2^(i-2)*c_2(i));
    fprintf('S=%f\n',S);
    fprintf('\n\n');
end
M=a(i);
fprintf('M(sqrt(2),1)=%f\nS(sqrt(2),1)=%f\n',M,S);
pi_M=M^2/(1-S);
fprintf('pi number is: %f\n',pi_M)
```

script Ln 25 Col 16

אחרי הרצת התוכנית ב־ *command window* נקבל:

.

```
Command Window
>> pi
a=1.414214
b=1.000000
c=1.000000
S=0.500000

a=1.207107
b=1.189207
c=0.042893
S=0.542893


a=1.198157
b=1.198124
c=0.000080
S=0.543053


a=1.198140
b=1.198140
c=0.000000
S=0.543053


a=1.198140
b=1.198140
c=0.000000
S=0.543053


a=1.198140
b=1.198140
c=0.000000
S=0.543053


M(sqrt(2),1)=1.198140
S(sqrt(2),1)=0.543053
pi number is: 3.141593
fx >> |
```

סיכום:

בפרויקט הזה חקרנו נושא מתמטי שגילה אותו גאוס, הממוצע החשבוני־ הנדסי ושימושיו, והראינו כי לממוצע הזה יש הרבה שימושים גם בתחום המתמטיקה וגם בתחומים אחרים כמו פיזיקה.

לא כולם יודעים על השימושים של הנושאים המתמטיים, וחושבים כי מתמטיקה אינו קשור בנושאים אחרים, אבל בחקירת הנושא שלנו ראינו כי מתמטיקה כן קשורה להרבה בעיות אחרות ועל ידיה ניתן לפתור בעיות מסוגים אחרים.

הדגשנו כי הממוצע החשבוני־הנדסי אשר סימנו אותו באות $M(a,b)$, מתקבל כגבול של תהליך אינסופי, אבל ניתן לקרב אותו על־ידי כמה איטרציות של שני ממוצעים: חשבוני והנדסי.

בעזרת הממוצע הזה ניפתרו הרבה בעיות מתמטיות שהן בלתי פתירות בצורה אחרת, למשל אינטגרלים שמבחינה אנליטית לא ניתן לפתור אותם, אבל בעזרת קשרים מתמטים (אשר הוכחנו אותם במהלך הפרויקט שלנו) בין הממוצע הזה $M(a,b)$ לבין האינטגרלים הללו, הצלחנו לפתור אותן.

רפלקציה אישית:

לסיום, אני מאוד נהניתי מהעבודה הזאת, ומחקירת נושא מתמטי מאוד מעניין, ומה שמשך אותי מאוד לנושא שלנו, זה שיש בו שימושים מתמטים ושימושים אחרים.

בפרויקט הזה למדתי גם איך ניתן להגיע לקשרים חשובים וחזקים במתמטיקה ע"י הוכחה בשלבים.

ביבליוגרפיה

אינטרנט:

1. הידען – היסטוריה של המדע - גאוס – נסיך המתמטיקאים:

www.hayadan.org.il

http://www.hayadan.org.il/prince-of-mathematitions-0808092/

2. ויקפדיה - קרל פרידריך גאוס –

http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%A8%D7%9C_%D7%A4%D7%A8%D7%99%D7%93%D7%A8%D7%99%D7%9A_%D7%92%D7%90%D7%95%D7%A1

מאמרים:

1. Almkvist, G., and Berndt, B., "Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, n and the Ladies Diary" American Mathematical Monthly, 95, 585-608 (1988).

2. Lord N. ,"Recent calculations of pi: the Gauss-Salamin algorithm ", The mathematical Gazette, 76(1992),231-242