אורט בראודה
ORT Braude College

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

רמאות במבחן: מנקודת מבט אופטימיזציה ותורת המשחקים

רים טאפש

Cheating at the exam: the viewpoint of optimization and game theory

Reem Tafish

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

רמאות במבחן: מנקודת מבט אופטימיזציה ותורת המשחקים

ריס טאפש

Cheating at The Exam: The Viewpoint of Optimization and Game Theory

Reem Tafish

Advisor:

Prof. Vladimir Turetsky

מנחה:

פרופ׳ ולדימיר טורצקי

Karmiel

כרמיאל

2021

תוכן עניינים

רשימת איורים

1 מבוא

אי יושר אקדמי מצד סטודנטים היא תופעה שכיחה ברחבי העולם כולו, אשר הולכת וגדלה עם השנים ועלולה לגרום לנזק כבד למוסדות להשכלה גבוהה בכלל ולהוראה והלמידה בפרט [2]. משום כך, תופעה זו אמורה להטריד את אנשי האקדמיה בכלל הדרגים והתפקידים - אנשי סגל, אנשי מנהלה וסטודנטים.

חוסר יושר אקדמי הוא בעיה רצינית ונרחבת בעולם. למרות שניתן למצוא נוהג זה במוסדות בכל דרגות ההשכלה, הוא מתועד טוב יותר במכללות ובאוניברסיטאות.

תופעת אי היושר האקדמי תופסת נדבך מרכזי בחיים האקדמיים ובאה לידי ביטוי בקשת רחבה של התנהגויות מצד הסטודנטים, החל בתרגומי מאמרים משפת המקור וכלה בהעתקות במבחנים ועבודות וכן פנייה לאנשי האקדמיה השונים בצורה הנתפסת בעיניהם כעזות פנים וחוצפה. מחקר שנערך בתשע פקולטות למשפטים באוניברסיטאות ומכללות מובילות בארץ, מצא כי 90% מהסטודנטים בממוצע היו מעורבים בעבירות קלות, כ־ 60$\%$ היו מעורבים בעבירות של העתקה בעבודות, וכ־60% היו מעורבים בהעתקות במבחנים [3] .

במאמר [1] אנו מציעים את המודל המתמטי של תופעת אי היושר האקדמי (כלומר, העתקה) של סטודנטים. המודל הזה מנוסח כמשחק סטטי לשלושה שחקנים עם מידע מלא על מנת למדל את הקשר האסטרטגי העומד בבסיס ההחלטה האישית של הסטודנט לרמות בכיתה. המסגרת שלנו מורכבת משני סטודנטים ופרופסור, שעליו לבחור כמה מאמצים להשקיע בניסיון לתפוס סטודנטים מעתקים. במודל הבסיס, שבו שני סטודנטים זהים, ממצאינו מדגישים את תפקיד ההסתברות שהפרופסור יתפוס חוסר יושר בהנעת החלטת הסטודנט (בין אם להעתיק או לא). למשל, שיווי משקל שבו שני הסטודנטים בוחרים לא לרמות מחייב שההסתברות שייתפסו בביצוע העבירה תהיה גדולה מספיק. זה בתורו דורש מאמץ גדול של הפרופסור, שנקבע בעיקר על ידי חוסר יכולת המאמץ הניתן לכיתה הוגנת ־ ללא רמאות ־ בתועלתו.

הגישה התיאורטית במשחק שאנו מציעים מאפשרת לנו להסיק מסקנות חיוביות ונורמטיביות כאחד. ראשית, המודל שלנו מתאים למספר עובדות שנמצאו על ידי מחקרים אמפיריים, כמו השפעת העונשים הגבוהים יותר בהפחתת השכיחות של העתקה, והקשר ההפוך בין ממוצע הציונים לבין התנהגות הרמאות. שנית, הוא גם מספק תובנות שיכולות לעזור בהפחתת ההעתקה בקמפוסים. כמה מהם כבר נמצאו יעילים על ידי הספרות, כגון עונשים קשים שהוטלו על ידי המוסד והמרצה. אחרים, לעומת זאת, לא זכו לתשומת לב רבה, כולל העסקת מרצים בעלי מאמץ גבוה, שמעריכים הוגנות בכיתה. כפי שנראה להלן, תנאי הכרחי לקיומו של שיווי משקל טוב (ללא העתקה) הוא שהמרצה לא יהיה רחמני. בחלק הבא אנו מציגים את מודל הבסיס שלנו, שמורכב משני סטודנטים זהים ומרצה. אנו דנים בתמריצים העומדים בפני כל אחד מהם ומתארים את תהליכי בחירתם. סעיף זה קובע גם תנאים הכרחיים ומספיקים לקיומו של שיווי משקל נאש ללא העתקה.

לסיכום, למדתי על המודל המתמטי, הוכחתי את הטענות, מצאתי דוגמאות מספריות שממחישות את הבעיה, ומצאתי את נקודות שיווי המשקל של נאש שמראות את הבחירה הכי טובה מצד הסטודנטים (בין אם להעתיק או לא) ומצד המרצה (בין אם להתאמץ כדי לתפוס העתקה בכיתה או לא).

2 תיאור מודל כללי

(שני סטודנטים ומרצה, סטודנטים מעתיקים או לא מעתיקים, ומרצה מקפיד על העתקות או לא (רחמני או קפדני))

המודל הבסיסי שלנו מורכב משני סטודנטים זהים, A ו־ B, ופרופסור אחד . תתקיים בחינה בקורס שהפרופסור אחראי עליו. על כל סטודנט לבחור את רמת המאמץ שלו בלימוד לבחינה ועל הפרופסור לבחור את מאמציו לזהות ולהעניש רמאות בכיתה. בכל פעם שתלמיד בוחר להעתיק, הוא לא לומד לבחינה, כך שרמת המאמץ שלו בלימוד שווה לאפס. כל הפעולות הללו נבחרות לפני שהבחינה מתרחשת, אין תקשורת בין השחקנים והמידע שלם, כך שנוכל למדל מצב אסטרטגי זה כמשחק סטטי לשלושה שחקנים.

3 שתי בעיות אופטמיזציה

3.1 אופטמזציה מצד סטודנט

פונקציית תועלת של סטודנט

פונקציית התועלת של הסטודנט היא פונקציה רציפה C^2 וניתנת על ידי $U_i(N_i, e_i)$, כאשר: $N_i \in [0, 100]$ ־ הציון שלו במבחן, $e_i \in [0, \infty)$ ־ רמת המאמץ שלו בלימוד. $i = A; B$. בהינתן האפשרות להעתקה, ציון סטודנט i, תלוי במאמץ שלו, וציונו של הסטודנט האחר, תלוי בהסתברות להיתפס מעתיק $p \in [0; 1]$, ובעיקר באסטרטגיה שנבחרה, בין אם להעתיק או לא (או לשחק הוגן). יתר על כן, בהתחשב בכך שהסטודנטים זהים, יש להם אותה פונקציית תועלת כמו כן אותה פונקציית ציון.

ישנם ארבעה מקרים שניתן לקחת בחשבון:

1. שני הסטודנטים A ו־ B בוחרים לרמות (להעתיק): במקרה זה אף אחד מהם לא מתאמץ בלימוד לבחינה (רמת המאמץ שלהם שווה לאפס), הציונים שלהם שווים לאפס, $N_A = N_B = 0$.
2. שני התלמידים A ו־ B בוחרים לא להעתיק (`לשחק הוגן`): במקרה זה כל שחקן מפעיל את המאמץ האופטימלי שלו$e_i > 0$, כך שהציונים הם $N_A(e_A)$ו־ $N_B(e_B)$, בהנחה שהסטודנטים זהים, $N_A(e_A) = N_B(e_B)$.
3. סטודנט A לא מעתיק (משחק הוגן) וסטודנט B מעתיק: ציון הסטודנט A, הוא $N_A(e_A)$, ואילו הציון הצפוי של סטודנט B ,הוא $N_B = N_A(e_A) \cdot (1 - p)$
4. סטודנט A מעתיק וסטודנט B לא מעתיק (משחק הוגן): כאן יש לנו ההפך מהמקרה 3, כך שהציון של סטודנט A הוא $N_A = N_B(e_B) \cdot (1 - p)$ וציון סטודנט B, הוא $N_B(e_B)$.

ציון הסטודנט עולה במאמציו ללמוד. עם זאת, הגדלת הציון הולכת וקטנה עם הגדלת המאמץ. אנו מניחים גם תנאים אחרים לגבי התנהגות פונקציה זו. ההנחה שלהלן מסכמת את התכונות של פונקציית הציון.

הנחה 1

הציון של הסטודנט היא פונקציה רציפה C^2 של המאמץ שלו e_i, הניתנת על ידי $N_i : [0,\infty) \to [0,100]$, ומקיימת את התנאים הבאים:

$$N_i'(e_i) > 0, \quad N_i''(e_i) < 0, \quad N_i(0) = 0,$$

$$lim_{e_i \to +\infty} N\,\acute{}_i(e_i) = 0, \quad lim_{e_i \to 0} N\,\acute{}_i(e_i) = +\infty$$

בכל פעם שסטודנט i בוחר לשחק הוגן, עליו למקסם את תועלתו על ידי בחירת רמת המאמץ האופטימלית e_i^*. הנגזרת הראשונה בבעיה שלו ניתנת על ידי:

$$\frac{dU_i}{de_i} = \frac{\partial U_i}{\partial N_i} N_i' + \frac{\partial U_i}{\partial e_i} = 0 \tag{1}$$

שניתן להבין אותה כשוויון התועלת השולית של המאמץ, עם העלייה בציון הסטודנט, וחוסר המאמץ השולי.

תכונות

$\frac{\partial U}{\partial N} > 0$: **אם ציון יותר גבוה, שביעות רצון יותר גבוהה**

$\frac{\partial^2 U}{\partial N^2} > 0$: **הגדלת שביעות רצון הולכת וקטנה**

$\frac{\partial U}{\partial e} < 0$: **אם מאמץ יותר גדול, שביעות רצון יותר נמוכה**

$\frac{\partial^2 U}{\partial e^2} < 0$: **הפחתת שביעות רצון הולכת וגדלה**

$\frac{\partial^2 U}{\partial N \partial e} \leq 0$: **בהגדלת מאמץ הגדלת שביעות רצון מהציון הולכת וקטנה**

$N = N(e)$: **ציון תלוי במאמץ**

$N'(e) > 0$: **אם מאמץ יותר גבוה, ציון גם יותר גבוה**

$lim_{e \to +\infty} N\,\acute{}(e) = 0$: **שינוי בציון דועך עם הגדלת מאמץ**

$lim_{e \to 0} N\,\acute{}(e) = +\infty$: **תנאי טכני**

הגדלת ציון הולכת וקטנה עם הגדלת מאמץ: $N''(e) < 0$

אין מאמץ - ציון מינימלי : $N(0) = 0$

תנאי הזה מעודד את הסטודנט למאמץ: $\frac{dU(0,0)}{de} = \frac{\partial U(0,0)}{\partial N}N'(0) + \frac{\partial U(0,0)}{\partial e} > 0$

משפט 1 (משפט קיום פתרון של בעיית מקסימיזציה)

נניח שלפונקציית התועלת של הסטודנט יש את התכונות הנוספות הבאות:

1.

$$\frac{dU_i(0,0)}{de_i} > 0$$

2.

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial e_i^2} < 0 \quad , \frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i \partial e_i} \leq 0 \quad , and \quad \frac{\partial^2 U}{\partial N^2} > 0$$

3.

$$lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial N_i} < +\infty \qquad and \qquad lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial e_i} = -\infty$$

ואז לנגזרת הראשונה בבעית הסטודנט (1), יש מקסימום מיקומי יחיד בנקודה פנימית כלשהי e_i^*.

הוכחה

כדי להוכיח את הטענה נשתמש בתנאי הראשון (1) מהנחה 1 :

$$\frac{dU_i}{de_i} = \frac{\partial U_i}{\partial N_i} N_i' + \frac{\partial U_i}{\partial e_i}$$

כעת נרצה להבחין את המצב שבו רמת המאמץ של הסטודנט i שואפת ל- ∞:

$$lim_{e_i \to +\infty} \frac{dU_i}{de_i} = lim_{e_i \to +\infty} \left(\frac{\partial U_i}{\partial N_i} N_i' \right) + lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial e_i}$$

כעת, לפי תכונה 3. במשפט מתקיים:

$$lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial N_i} < +\infty \qquad , \qquad lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial e_i} = -\infty$$

ולפי הנחה 1 מתקיים:

$$lim_{e_i \to +\infty} N'{}_i(e_i) = 0$$

לכן נקבל:

$$lim_{e_i \to +\infty} \frac{dU_i}{de_i} = \underbrace{\left(lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial N_i} < +\infty \cdot lim_{e_i \to +\infty} N_i' \to 0 \right)}_{=0} + lim_{e_i \to +\infty} \frac{\partial U_i}{\partial e_i}$$

ומכאן נקבל כי:

$$\frac{dU_i}{de_i} = \frac{\partial U_i}{\partial e_i} = -\infty$$

ונזכור כי פונקציה U_iהיא פונקציה C^2, כך ש- $\frac{dU_i}{de_i}$ רציפה.

בנוסף לכך לפי תכונה 1. במשפט

$$\frac{dU_i(0,0)}{de_i} > 0$$

לכן ניתן להפעיל את משפט ערך הביניים על פונקציית הנגזרת הראשונה של התועלת $\left(\frac{dU_i}{de_i} = \frac{\partial U_i}{\partial N_i} N_i' + \frac{\partial U_i}{\partial e_i} \right)$ כיוון ש- $\frac{dU_i}{de_i}$ פונקציה רציפה בקטע סגור ,אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה פנימית, נקרא לה e_i^*, בקטע הסגור שמספקת את כל התנאי של פונקציית הנגזרת הראשונה (1).

כעת, נותר לנו להראות שהנקודה הפנימית e_i^*, היא נקודת מקסימום מקומי יחיד של בעיית האופטימיזציה של הסטודנט.

לצורך זה נמצא את הנגזרת החלקית מסדר 2 של פונקציית התועלת U_iלפי רמת המאמץ e_i:

$$\frac{d^2U_i}{de_i^2} = \left(\frac{dUi}{de_i} \right)'$$

$$\frac{d^2U_i}{de_i^2} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i^2}(N_i')^2 + \frac{\partial U_i}{\partial N_i} N_i'' + 2 \cdot \frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i \partial e_i} \cdot N_i' + \frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i^2}$$

נעשה שימוש בתכונה 2. :

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial e_i^2} < 0 \quad , \frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i \partial e_i} \leq 0 \quad , and \quad \frac{\partial^2 U}{\partial N^2} > 0$$

והנחה 1 :

$$N_i'(e_i) > 0, \quad N_i''(e_i) < 0$$

והתכונה :

$$\frac{dUi}{de_i} > 0$$

ונקבל כי:

$$\frac{d^2U_i}{de_i^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i^2} < 0 (N_i')^2{}_{>0}\right) + \left(\frac{\partial U_i}{\partial N_i} > 0 N_i''{}_{<0}\right) + \left(2\frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i \partial e_i} \leq 0 N_i'{}_{>0}\right) + \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial N_i^2} < 0\right)\right] < 0$$

כלומר, $\frac{d^2U_i}{de_i^2} < 0$ לכל e_i.

מזה נובע כי הפונקציה U_iקעורה לחלוטין בנקודה e_i. ולפי כך, הנגזרת הראשונה של U_i לפי e_iמספיקה כדי להבטיח שהנקודה e_i^* היא נקודת המקסימום.

דוגמה לפונקציית תועלת של הסטודנט

$$N_i(e_i) = 100 \cdot (1 - e^{-\alpha e_i})$$

$$U_i(N_i(e_i), e_i) = U_i(N_i, e_i) = N_i - e_i^2 = 100 \cdot (1 - e^{-\alpha e_i}) - e_i^2$$

$i = A, B$

נראה שהפונקציות אכן מקיימות את כל התכונות:

$$N(0) = 100(1 - e^{-\alpha \cdot 0}) = 100(1 - 1) = 0$$

$$N'(e_i) = 100\alpha \cdot^{-\alpha e_i} > 0$$

$$N''(e_i) = -100\alpha^2 \cdot^{-\alpha e_i} < 0$$

$$\lim_{e_i \to \infty} N'(e_i) = 100\alpha \cdot e_{\to 0}^{-\alpha \cdot \infty} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 1 < 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial N^2} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial e} = -2e < 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial N \partial e} = 0$$

$$\frac{dU(0,0)}{de} = \left(\frac{\partial U(0,0)}{\partial N} \textcolor{red}{> 0} N'(0) \textcolor{red}{> 0} + \frac{\partial U(0,0)}{\partial e} \textcolor{red}{= 0} \right) > 0$$

פונקצית התועלת של סטודנט A

$U_A\left(e_A\right) = 100\left(1 - e^{-\alpha e_A}\right) - e_A^2$ כאשר־ $\alpha = 0.6$

פונקצית התועלת של סטודנט B

$U_B\left(e_B\right) = 100\left(1 - e^{-\alpha e_B}\right) - e_B^2$ כאשר־ $\alpha = 0.4$

משפט 2 (תכונות נוספות לפונקציית התועלת של הסטודנט)

רמת המאמץ האופטימלית של הסטודנט e^* היא פונקציה ש:

1.יורדת לפי $\left|\frac{\partial U}{\partial e}\right| = -\frac{\partial U}{\partial e}$

2. יורדת לפי $\frac{\partial U}{\partial N}$

3. עולה לפי N'

איור 1: פונקציית התועלת של סטודנט A - שביעת הרצון של הסטודנט מהציון שלו כתלות במאמץ שלו e_A

הוכחה

הטענה עוסקת עם המאמץ האופטימלי e^* כפתרון של המשוואה:

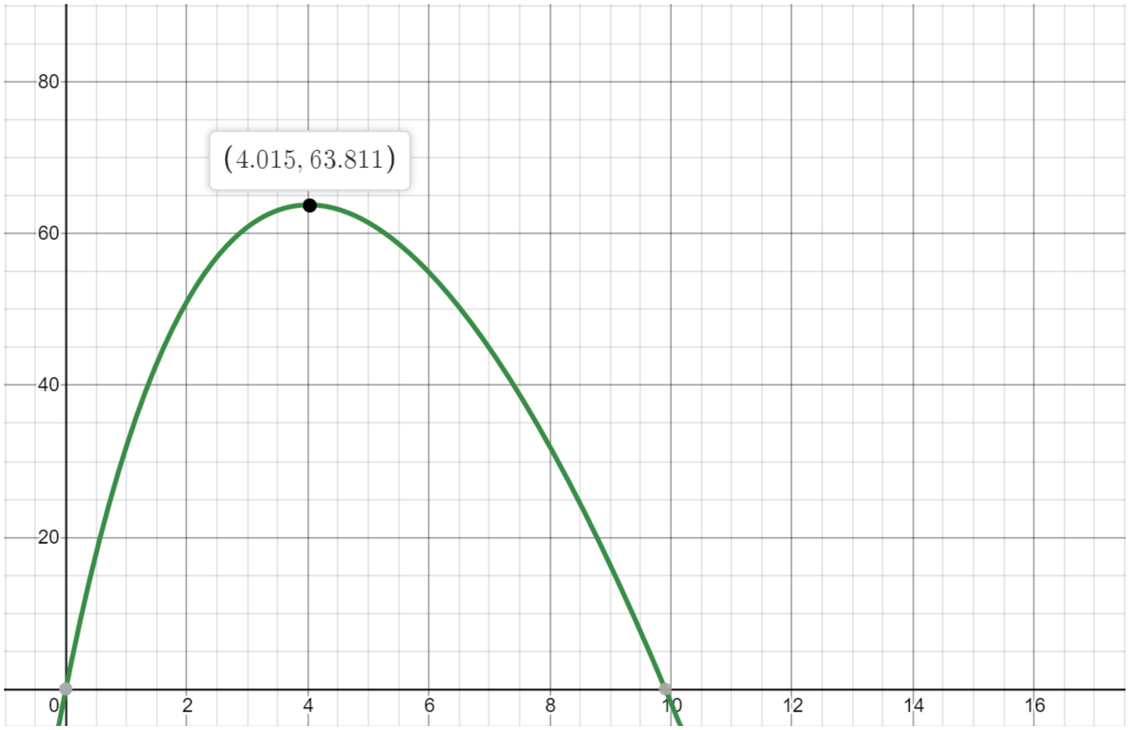
$$\frac{dU}{de} = f(e, p', \frac{\partial U}{\partial e}, \frac{\partial U}{\partial N}, N') = \frac{\partial U}{\partial N} \cdot N' + \frac{\partial U}{\partial e} = 0$$

לפי משפט הנגזרת של פונקציה סתומה:

$$\frac{\partial e^*}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)}{\frac{d^2 U}{de^2}(e^*)}$$

$$\frac{\partial e^*}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)}{\frac{d^2 U}{de^2}(e^*)}$$

$$\frac{\partial e^*}{\partial \left(N'\right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(N'\right)}{\frac{d^2 U}{de^2}(e^*)}$$



איור 2: פונקציית התועלת של סטודנט B - שביעת הרצון של הסטודנט מהציון שלו כתלות במאמץ שלו e_B

ניזכר ש- $\frac{d^2U}{de^2} < 0$ לכן,

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)} = N' > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(N'\right)} = \frac{\partial U}{\partial N} > 0$$

אז מכאן נובע ש-

$$\frac{\partial e^*}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)} > 0, \frac{\partial e^*}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)} > 0, \frac{\partial e^*}{\partial N'} > 0,$$

דוגמאות (של התכונות של המשפט)

הדוגמה הבסיסית היא:

$$N(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}), U(N, e) = N - e^2$$

נצור שלוש "משפחות" של $N_k(e), U_k(N, e)$ עם פרמטר k כך ש־

(i) $N'_k, \frac{\partial U_k}{\partial N_k}$ קבועות לפי k, $\frac{\partial U_k}{\partial e}$ תלויה ב־ k מונוטונית.

(ii) $N'_k, \frac{\partial U_k}{\partial e}$ קבועות לפי k, $\frac{\partial U_k}{\partial N_k}$ תלויה ב־ k מונוטונית.

(iii) $\frac{\partial U_k}{\partial e}, \frac{\partial U_k}{\partial N_k}$ קבועות לפי k, N'_k תלויה ב־ k מונוטונית.

נעשה זאת באופן הבא:

(i) $$N_k(e) = N(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}), U_k(N, e) = N - ke^2$$

(ii) $$N_k(e) = N(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}), U_k(N, e) = kN - e^2$$

(iii) $$N_k(e) = 100(1 - e^{-k\alpha e}), U_k(N, e) = U(N, e) = N - e^2$$

תכונה (i)

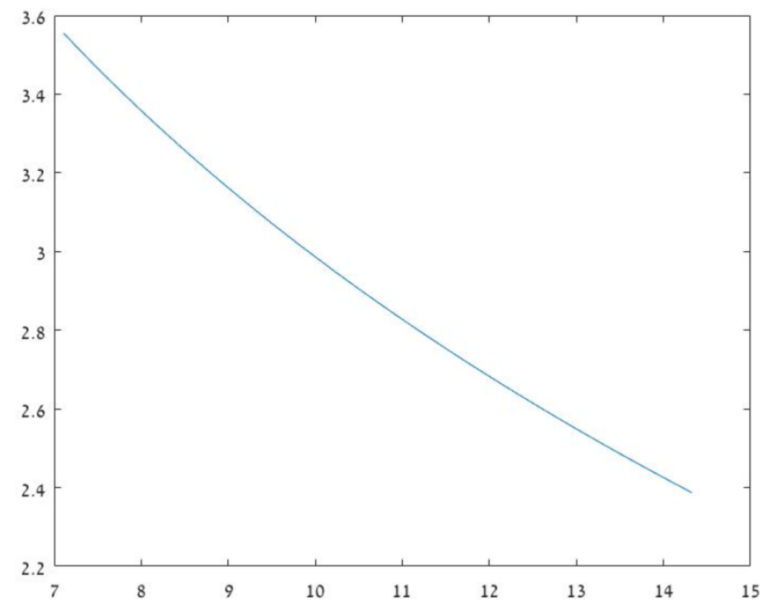
מאמץ אופטימלי e^* קטן כאשר חוסר תועלת שולית לפי המאמץ $-\frac{\partial U}{\partial e}$ גדלה.

$$N(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}), U_k(N, e) = N - ke^2$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial e} = -2ke < 0, U_k(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}) - ke^2$$

מאמץ אפטימלי e^* מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dU_k}{de} = 100\alpha e^{-\alpha e} - 2ke = 0$$



איור 3: הגרף של e^* כפונקציה של $-\frac{\partial U_k}{\partial e}(e^*) = 2ke^*$ עבור $k \in [1,3]$

לפי הגרף ניתן לראות כי הפונקציה יורדת מונוטונית .

תכונה (ii)

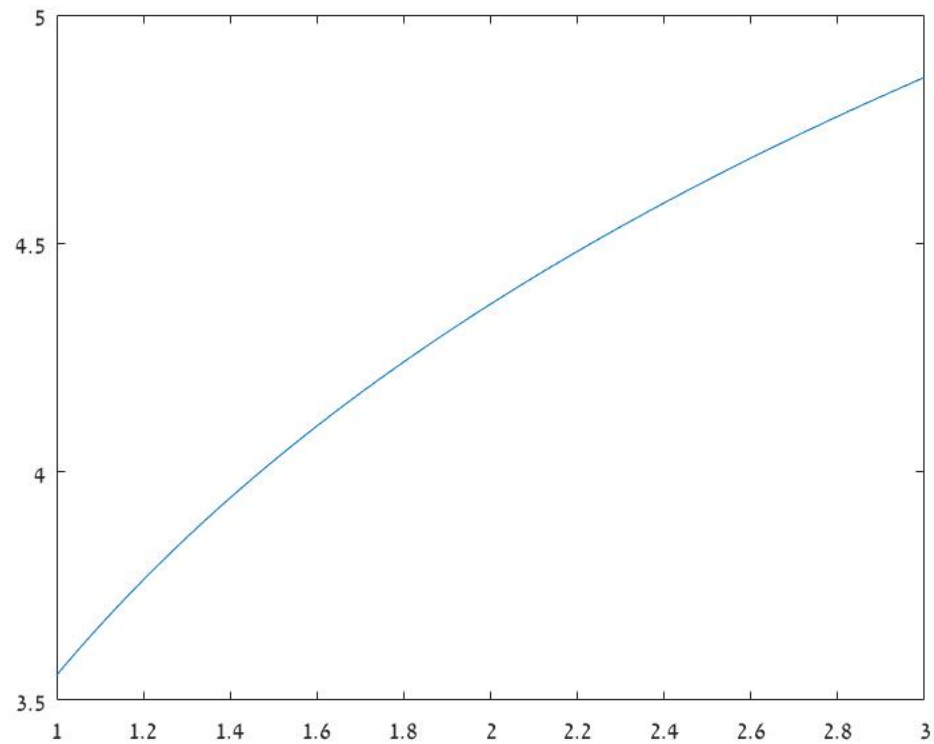
מאמץ אופטימלי e^* גדל כאשר תועלת שולית לפי הציון $\frac{\partial U}{\partial N}$ גדלה.

$$N(e) = 100(1 - e^{-\alpha e}), U_k(N, e) = kN - e^2$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial N_k} = k > 0, U_k(e) = 100k(1 - e^{-\alpha e}) - e^2$$

מאמץ אפטימלי e^* מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dU_k}{dN_k} = 100\alpha k e^{-\alpha e} - 2e = 0$$



איור 4: הגרף של e^* כפונקציה של $k = \frac{\partial U_k}{\partial N_k}(e^*)$ עבור $k \in [1,3]$

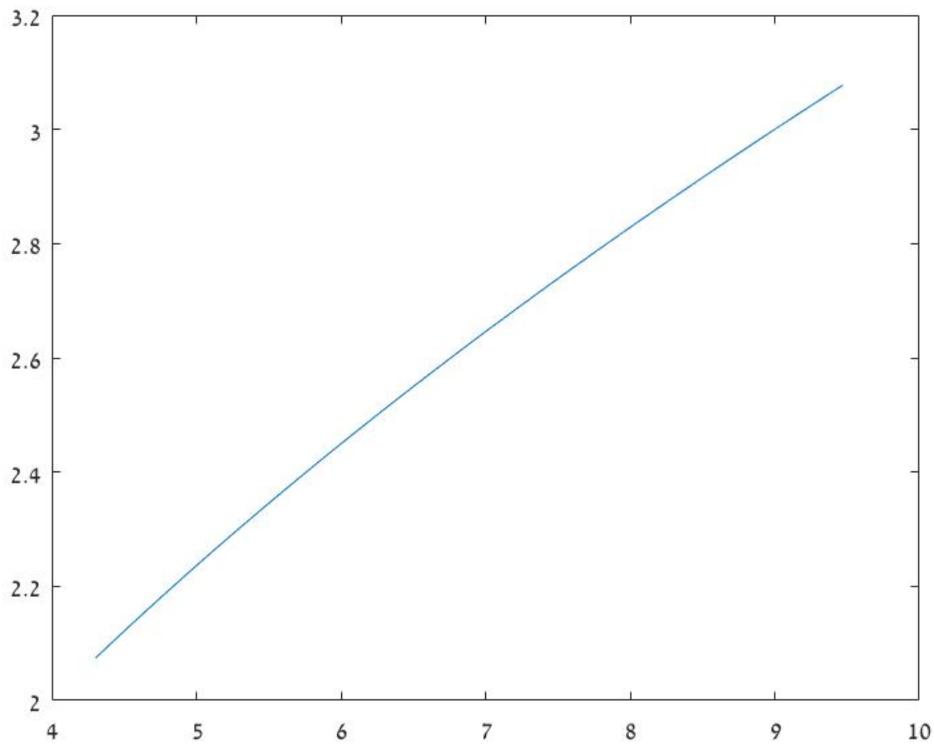
תכונה (iii)

מאמץ אופטימלי e^* גדל כאשר חוזרים על המאמץ בציונים הגבוהים N'.

$$N_k(e) = 100(1 - e^{-\alpha k e}), U(N,e) = N - e^2$$

מאמץ אפטימלי e^* מתקבל מהמשוואה:

$$100\alpha k e^{-\alpha k e} - e^2 = 0$$



איור 5: הגרף של e^* כפונקציה של $N_k'(e^*) = 100\alpha k e^{-\alpha k e^*}$ עבור $k \in [1,3]$

לפי הגרף ניתן לראות כי הפונקציה עולה מונוטונית .

3.2 אופטמיזציה מצד המרצה

פונקציית התועלת של המרצה

התועלת של המרצה תלויה בציונים של סטודנטים A, B - $N_A, N_B \in [0, 100]$, בהסתברות לתפוס סטודנטים מעתיקים בכיתה$p \in [0,1]$, ובמאמץ שלו לתפוס רמאות בכיתה $\theta \in [0, \infty)$. ממדלים אותה כפונקציה C^2 הניתנת על ידי $W(N_A, N_B, p, \theta)$. אנו מניחים שהתועלת של המרצה עולה ככל שציוני הסטודנטים עולים, כלומר $\frac{\partial W}{\partial N_B} = \frac{\partial W}{\partial N_A} > 0$. יש גם חוסר תועלת של מאמץ, כך ש- $\frac{\partial W}{\partial \theta} < 0$. לבסוף, המרצה מעדיף את הכיתה ההוגנת ביותר, מה שאומר שהתועלת השולית של ההסתברות לתפוס רמאות של סטודנטים חיובית,$\frac{\partial W}{\partial p} > 0$.

הנחה 2

פונקציית התועלת של המרצה כוללת את התכונות הנוספות הבאות:

1. היא קעורה לחלוטין עבור כל רמות המאמץ ,כלומר, $\frac{d^2 w}{d\theta^2} < 0$ לכל $\theta \in [0, +\infty)$
2. $\lim_{\theta \to +\infty} \frac{dW}{d\theta} = -\infty$

הנחה 3

ההסתברות לתפוס אחד הסטודנטים מעתיק (מרמה) היא פונקציה C^2 של רמת המאמץ של הפרופסור θ וניתנת ע`י: $p:[0,\infty)\rightarrow[0,1]$ ומקיימת את התכונות הבאות:

$$p'(\theta)>0$$

$$p''(\theta)<0$$

$$p(0)=0$$

$$lim_{\theta\rightarrow+\infty}p'(\theta)=0 \qquad and \qquad lim_{\theta\rightarrow 0}p'(\theta)=+\infty$$

תכונות

$\frac{\partial W}{\partial N_A}>0\ ,\ \frac{\partial W}{\partial N_B}>0$ **- מרצה יותר מרוצה כשציונים של סטודנטים יותר גבוהים.**

$\frac{\partial U}{\partial \theta}<0$**: אם מאמץ יותר גדול, שביעות רצון יותר נמוכה.**

$\frac{\partial U}{\partial p}>0$**: אם הסתברות לתפוס את ההעתקה יותר גדולה, שביעות רצון יותר גבוהה.**

$\frac{d^2w}{d\theta^2}<0,\ \theta\in[0,+\infty)$**:פונקציית תועלת של המרצה קעורה חזק.**

$\lim_{\theta\rightarrow+\infty}\frac{dW}{d\theta}=-\infty$**:תנאי טכני.**

$p=p(\theta)$**: הסתברות תלויה במאמץ.**

$p'(\theta)>0$**: מאמץ יותר גבוה, הסתברות גם יותר גבוהה.**

$p''(\theta)<0$**: הגדלת הסתברות הולכת וקטנה עם הגדלת מאמץ.**

$p(0)=0$: אין מאמץ - הסתברות אפסית.

$lim_{\theta\rightarrow+\infty}p'(\theta)=0$**: שינוי בהסתברות דועך עם הגדלת מאמץ.**

$lim_{\theta\rightarrow 0}p'(\theta)=+\infty$**: תנאי טכני.**

שני סוגים של מרצה

1. מרצה רחמני (Lenient): $\frac{dW^L(a,b,0,0)}{d\theta} \leq 0$ עבור כל $a,b \in [0,100]$ קבועים.. אז, למרצה כזה רמת המאמץ היא $\theta^*=0$ (מעדיף לא להשקיע מאמץ כדי לתפוס העתקה).
2. מרצה קפדני (Severe): $\frac{dW^S(a,b,0,0)}{d\theta} > 0$ עבור כל $a,b \in [0,100]$ קבועים. (מרצה כזה בוחר את המאמץ הממקסם את התועלת).

לדוגמה, נניח שרק אחד מהסטודנטים מעתיק והשני לא, למשל סטודנט A מעתיק, וסטודנט B לא מעתיק.

אז סטודנט B מקבלת את הציון : $b=N_B(e_B^*)$, כאשר e_B^*- רמת המאמץ שלו שממקסמת את פונקציית התועלת שלו - $U_B=U_B(N_B(e_B),e_B)$.

הציון של סטודנט A הופך להיות משתנה מקרי : עם ההסתברות p הציון שלו הוא 0 (זאת אומרת שהמרצה זיהה שהוא מעתיק) ועם ההסתברות $1-p$, הוא יקבל את הציון של סטודנט B, כלומר $N_B(e_B^*)$.

אז התוחלת של הציון של סטודנט A היא:

$$a=N_A(e_A^*)=p\cdot 0+(1-p)\cdot N_B(e_B^*)=(1-p)\cdot N_B(e_B^*)$$

במקרה הזה, $W^S=W^S(N_A(p(\theta)),N_B,p(\theta),\theta)$ונגזרת מלאה לפי θ היא:

$$\frac{dW^S}{d\theta}=\frac{\partial W^S}{\partial N_A}\cdot \underbrace{\frac{\partial N_A}{\partial p}}_{=-N_B}\cdot p'+\frac{\partial W^S}{\partial p}\cdot p'+\frac{\partial W^S}{\partial \theta}=$$

$$=p'\left(\frac{\partial W^S}{\partial p}-\frac{\partial W^S}{\partial N_A}N_B\right)+\frac{\partial W^S}{\partial \theta}$$

במקרה הזה, המקסימום מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dW^S}{d\theta}=p'\left(\frac{\partial W^S}{\partial p}-\frac{\partial W^S}{\partial N_A}N_B\right)+\frac{\partial W^S}{\partial \theta}=0 \qquad (2)$$

משפט 3 (משפט קיום לפתרון בעיית מקסימיזציה)

נניח שפונקציית התועלת של המרצה הקפדני מקיימת את ההנחה 2. אז לנגזרת הראשונה של הבעיה שלו (2) יש מקסימום גלובלי (מקומי) יחיד בנקודה פנימית כלשהי $\theta^*>0$.

הוכחה

לפי תכונה 1. בהנחה 4 :

פונקציית התועלת של המרצה היא קעורה לחלוטין עבור כל רמת מאמץ, כלומר $\frac{d^2W^S}{d\theta^2} < 0$, $\forall\theta \in [0, +\infty)$.

זה מרמז על כך ש־ $\frac{dw^S}{d\theta}$יורדת ממש לכל θ.

־כעת, לפי ההגדרה של המרצה הקפדני: $\frac{dW^S(a,b,0,0)}{d\theta} > 0$, כאשר $\theta^* = 0$.

־ולפי תכונה 2. בהנחה 4:

מתקיים כי, $\lim_{\theta\to+\infty} \frac{dW^S}{d\theta} = -\infty < 0$

כעת בהתחשב בכך ש־ W היא פונקציה C^2, אז הנגזרת שלה רציפה.

לכן, ניתן להפעיל את משפט ערך הביניים על פונקציית הנגזרת של W לפי θ:

$$\frac{dW^S}{d\theta} = \frac{\partial W^S}{\partial N_A} \cdot \underbrace{\frac{\partial N_A}{\partial p}}_{=-N_B} \cdot p' + \frac{\partial W^S}{\partial p} \cdot p' + \frac{\partial W^S}{\partial \theta} =$$

$$= p'\left(\frac{\partial W^S}{\partial p} - \frac{\partial W^S}{\partial N_A} N_B\right) + \frac{\partial W^S}{\partial \theta} = 0$$

כיוון ש־ $\frac{dW^S}{d\theta}$ פונקציה רציפה בקטע סגור אז לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה פנימית (נקרא לה θ^*) בקטע הסגור שמספקת את כל התנאים של פונקציית הנגזרת.

כעת, נותר לנו להראות שהנקודה הפנימי θ^*, היא נקודת מקסימום מקומי יחיד של בעיית האופטמיזציה של המרצה הקפדני.

מכיוון ש־ W קעורה לחלוטין (לפי תכונה 1 בהנחה 4) אז הנגזרת הראשונה של W^Sלפי θ מספיקה כדי להבטיח שהנקודה θ^* היא נקודת מקסימום מוחלט יחיד.

דוגמה לפונקציית תועלת של המרצה

צורה כללית של הפונקציה:

$$W^s(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + k \cdot p(\theta) - \theta^2$$

כאשר־ $k \in N, k > N_A(e_A^*)$

$p(\theta)$ ־ פונקציית ההסתברות לתפוס סטודנט מעתיק

$$p(\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\theta} & \theta \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נראה שהפונקציות אכן מקיימות את כל התכונות:

$$p'(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} > 0$$

$$p''(\theta) = -\lambda^2 e^{-\lambda\theta} < 0$$

$$p(0) = 1 - e^{-\lambda \cdot 0} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{\theta\to\infty} p'(\theta) = \lim_{\theta\to\infty} \lambda e^{-\lambda\theta} = \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot\infty} = 0$$

$$\lim_{\theta\to 0} p'(\theta) = \lim_{\theta\to 0} \lambda e^{-\lambda\theta} = \lambda \cdot e^{-\lambda\cdot 0} = \lambda \cdot \frac{1}{e^{\lambda\cdot 0}} = \lambda$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial N_A} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial N_B} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial \theta} = -2\theta < 0$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial p} = 1 > 0$$

$$\frac{d^2W^S}{d\theta^2} \to \frac{dW^S}{d\theta} = \lambda e^{-\lambda\theta} - 2\theta \to \frac{d^2W^S}{d\theta^2} = -\lambda^2 e^{-\lambda\theta} - 2 < 0$$

$$\lim_{\theta\to+\infty} \frac{dW^S}{d\theta} = \lim_{\theta\to+\infty} \lambda e^{-\lambda\theta} - 2\theta = \lambda e^{-\lambda\cdot\infty} - 2\cdot\infty = -\infty$$

מקרה 1 - שני הסטודנטים A ו- B מעתיקים:

במקרה הזה הציונים שלהם הם 0 :

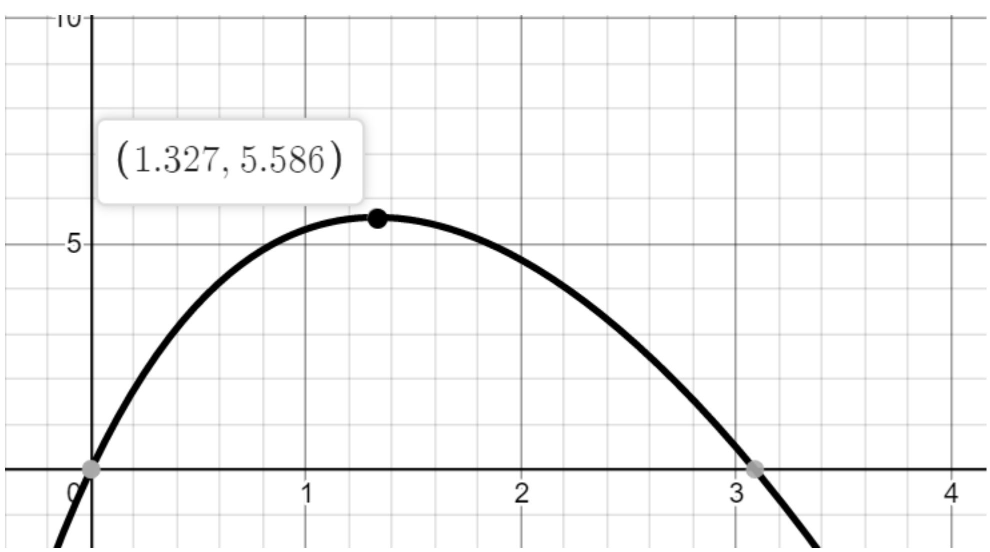
$$N_A(e_A^*) = N_B(e_B^*) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$U_A(0,0) = U_B(0,0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$W^s(0,0,p^*,\theta^*) = k \cdot p(\theta) - \theta^2$$



איור 6: גרף של פונקציית התועלת של המרצה הקפדן במקרה 1 - כאשר $\lambda = 1, k = 10$

מקרה 2 - סטודנט A מעתיק, סטודנט B לא מעתיק:

במקרה זה ציונו של סטודנט B הוא: $N_B(e_B^*) = 63.811$

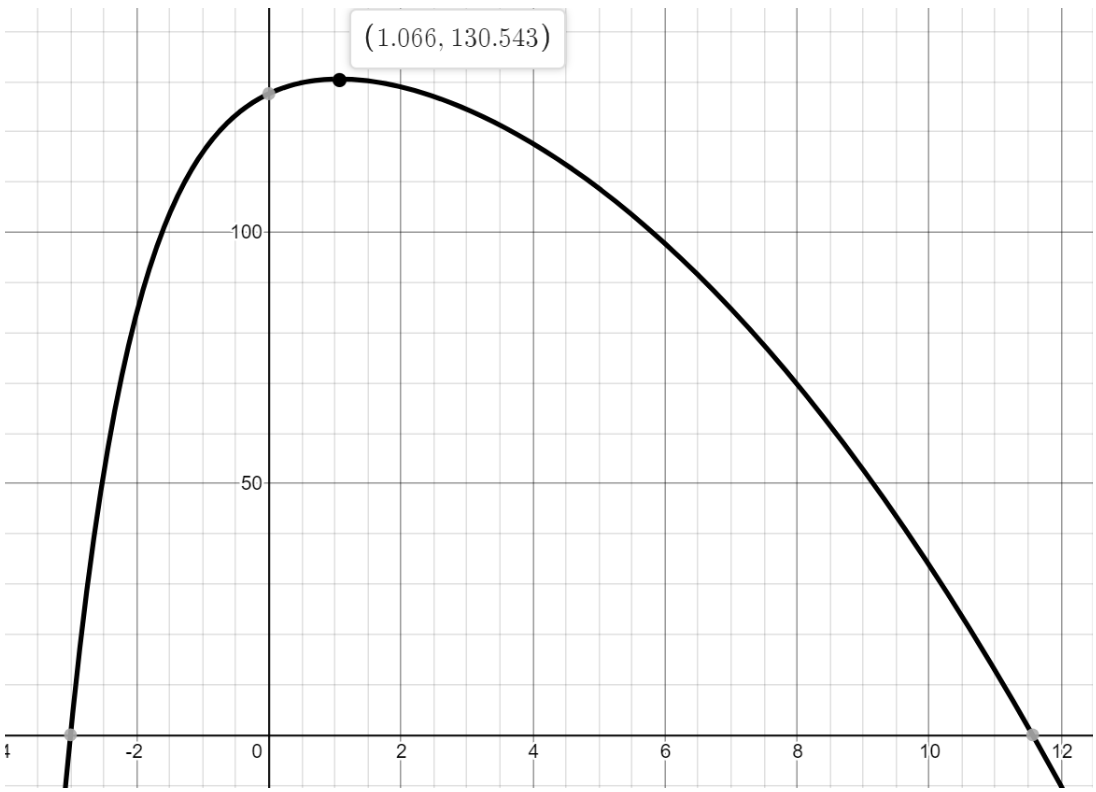
וציונו של סטודנט A הוא : $N_B(e_B^*) \cdot (1 - p(\theta))$

כלומר במקרה זה מתקיים־

$$U_A(N_B(e_B^*) \cdot (1-p(\theta)), 0)$$

$$U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

$$W^s(N_B(e_B^*) \cdot (1-p(\theta)), N_B(e_B^*), p^*, \theta^*) = N_B(e_B^*) \cdot (1-p(\theta)) + N_B(e_B^*) + k \cdot p(\theta) - \theta^2$$



איור 7: גרף של פונקציית התועלת של המרצה הקפדן במקרה 2 ־ כאשר $\lambda = 1, k = 70$

מקרה 3 ־ סטודנט A לא מעתיק, סטודנט B מעתיק:

באופן דומה למקרה 2 ־

במקרה 3 ציונו של סטודנט A הוא: $N_A(e_A^*) = 75.514$

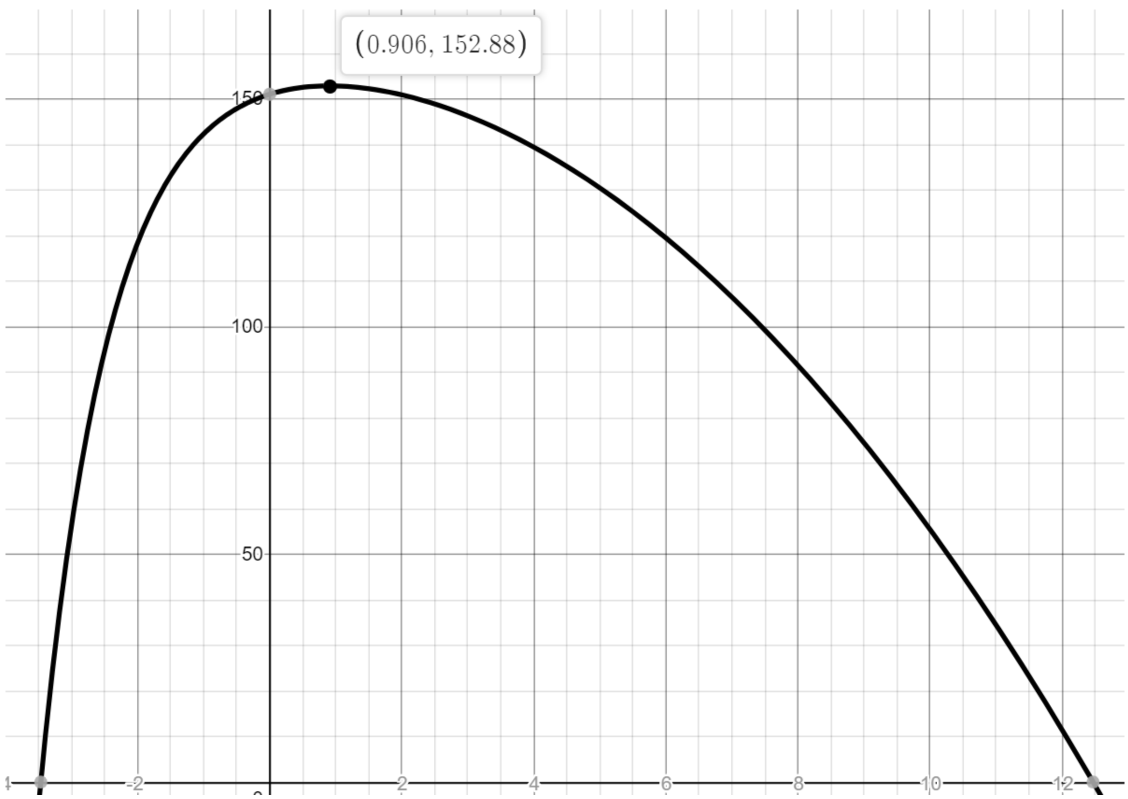
וציונו של סטודנט B הוא: $N_A(e_A^*) \cdot (1-p(\theta))$

כלומר מתקיים -

$$U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

$$U_B(N_A(e_A^*) \cdot (1 - p(\theta)), 0)$$

$$W^s(N_A(e_A^*), N_A(e_A^*) \cdot (1 - p(\theta)), p^*, \theta^*) = N_A(e_A^*) + N_A(e_A^*) \cdot (1 - p(\theta)) + k \cdot p(\theta) - \theta^2$$



איור 8: גרף של פונקציית התועלת של המרצה הקפדן במקרה 3 - כאשר $\lambda = 1, k = 80$

מקרה 4 - שני הסטודנטים A ו- B לא מעתיקים:

במקרה זה ציונו של סטודנט A הוא : $N_A(e_A^*) = 75.514$

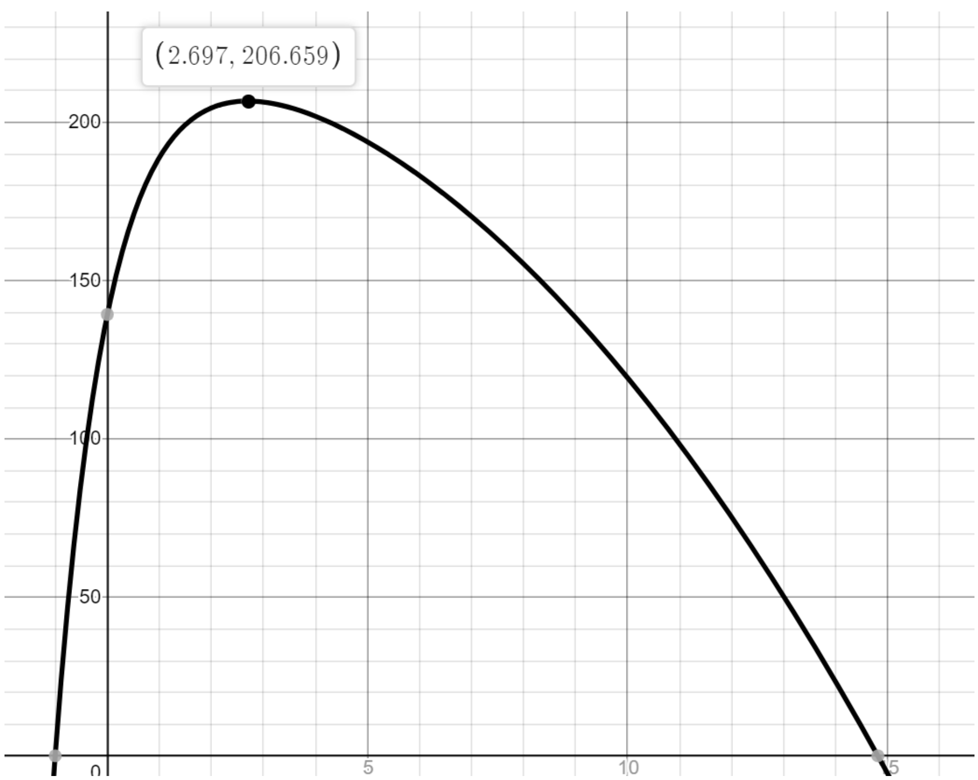
וציונו של סטודנט B הוא: $N_B(e_B^*) = 63.811$

כלומר במקרה זה מתקיים־

$$U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

$$U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

$$W^s(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + k \cdot p(\theta) - \theta^2$$



איור 9: גרף של פונקציית התועלת של המרצה הקפדן במקרה 4 ־ כאשר $\lambda = 1, k = 80$

משפט 4

רמת המאמץ האופטימלית של המרצה θ^* היא פונקציה ש:

1.יורדת לפי $\frac{\partial W^s}{\partial \theta}$

2. יורדת לפי $\frac{\partial W^s}{\partial N}$

3. עולה לפי $\frac{\partial W^s}{\partial p}$
4.עולה לפי p'

במתמטיקה שימושית

הוכחה(תכונות נוספות לפונקציית התועלת של הסטודנט)

הטענה עוסקת עם המאמץ האופטימלי של המרצה לתפוס העתקה θ^* כפתרון של המשוואה:

-נתמקד במקרה כאשר סטודנט A מעתיק, וסטודנט B לא מעתיק.

$$\frac{dW^s}{d\theta} = f(\theta, p', \frac{\partial W^s}{\partial p}, \frac{\partial W^s}{\partial N_A}, N_B, \frac{\partial W^s}{\partial \theta}) = p' \cdot \left(\frac{\partial W^s}{\partial p} - \frac{\partial W^s}{\partial N_A} \cdot N_B \right) + \frac{\partial W^s}{\partial \theta} = 0$$

לפי משפט הנגזרת של פונקציה סתומה:

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial \theta} \right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial \theta} \right)}{\frac{d^2 W^s}{d\theta^2}(\theta^*)}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial N} \right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial N} \right)}{\frac{d^2 W^s}{d\theta^2}(\theta^*)}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial p} \right)} = -\frac{\partial f / \partial \left(\frac{\partial W^s}{\partial p} \right)}{\frac{d^2 W^s}{d\theta^2}(\theta^*)}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial (p')} = -\frac{\partial f / \partial (p')}{\frac{d^2 W^s}{d\theta^2}(\theta^*)}$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial (N)} = -\frac{\partial f / \partial (N)}{\frac{d^2 W^s}{d\theta^2}(\theta^*)}$$

ניזכר ש- $\frac{d^2 W^s}{d\theta^2} < 0$ לכן,

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial\theta}\right)} = 1 > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial N}\right)} = N' > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial p}\right)} = p' > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(p'\right)} = \frac{\partial W^s}{\partial p} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(N\right)} = \frac{\partial W^s}{\partial N} > 0$$

אז מכאן נובע ש־

$$\frac{\partial\theta^*}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial\theta}\right)} > 0, \frac{\partial\theta^*}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial N}\right)} > 0, \frac{\partial\theta^*}{\partial\left(\frac{\partial W^s}{\partial p}\right)} > 0, \frac{\partial\theta^*}{\partial p'} > 0, \frac{\partial\theta^*}{\partial N} > 0,$$

הערה: במקרים האחרים מגיעים לאותן התוצאות.

דוגמאות (של התכונות של המשפט)

הדוגמה הבסיסית היא:

(נתייחס למקרה בו סטודנט A מעתיק, וסטודנט B לא מעתיק)

$$p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, N_A(e_A^*) = N_B(e_B^*) \cdot (1 - p(\theta)),$$

$$W^s(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - \theta^2$$

כאשר, $l > N_B$

נצור ארבע "משפחות" של $p_k(\theta), W_k^s(N_A, N_B, p, \theta)$ עם פרמטר k כך ש־

(i) $\frac{\partial W_k^s}{\partial p_k}, p_k'$ קבועות לפי k, $\frac{\partial W_k^s}{\partial \theta}$ תלויה ב־ k מונוטונית.

(ii) $\frac{\partial W_k^s}{\partial \theta}, p_k'$ קבועות לפי k, $\frac{\partial W_k^s}{\partial N_i}$ תלויה ב־ k מונוטונית.

(iii) $\frac{\partial W_k^s}{\partial \theta}, \frac{\partial W_k^s}{\partial N_i}$ קבועות לפי k, $\frac{\partial W_k^s}{\partial p}$ תלויה ב־ k מונוטונית.

(iv) $\frac{\partial W_k^s}{\partial p_k}, \frac{\partial W_k^s}{\partial \theta}, \frac{\partial W_k^s}{\partial N_i}$ קבועות לפי k, p_k' תלויה ב־ k מונוטונית.

נעשה זאת באופן הבא:

$$
\begin{aligned}
(i) \quad & p_k(\theta) = p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - k\theta^2 \\
(ii) \quad & p_k(\theta) = p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = k(N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*)) + l \cdot p(\theta) - \theta^2 \\
(iii) \quad & p_k(\theta) = 1 - e^{-k\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = W^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - \theta^2 \\
(iv) \quad & p_k(\theta) = p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot kp(\theta) - \theta^2
\end{aligned}
$$

תכונה (i)

מאמץ אופטימלי θ^* של המרצה הקפדן קטן כאשר תועלת שולית לפי המאמץ $\frac{\partial W^s}{\partial \theta}$ גדלה.

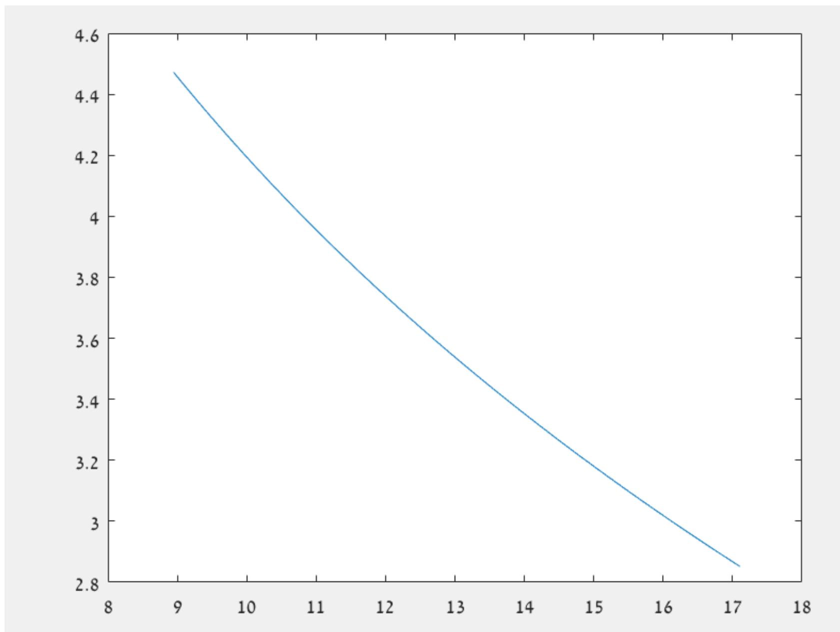
$$p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - k\theta^2$$

$$\frac{\partial W_k^s}{\partial \theta} = -2k\theta < 0,$$

$$W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_B(e_B^*) \cdot (e^{-\lambda\theta}) + N_B(e_B^*) + l \cdot (1 - e^{-\lambda\theta}) - k\theta^2$$

מאמץ אפטימלי θ^* מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dW^s}{d\theta} = -\lambda N_B(e_B^*) \cdot e^{-\lambda\theta} + l \cdot \lambda e^{-\lambda\theta} - 2k\theta = 0$$



איור 10: הגרף של θ^* כפונקציה של $\frac{\partial W_k^s}{\partial\theta}(\theta^*) = 2k\theta^*$ עבור $k \in [1,3]$

לפי הגרף ניתן לראות כי הפונקציה יורדת מונוטונית .

תכונה (ii)

מאמץ אופטימלי θ^* של המרצה הקפדן קטן כאשר תועלת שולית לפי הציון של הסטודנט A $\frac{\partial W^s}{\partial N_A}$ גדלה.

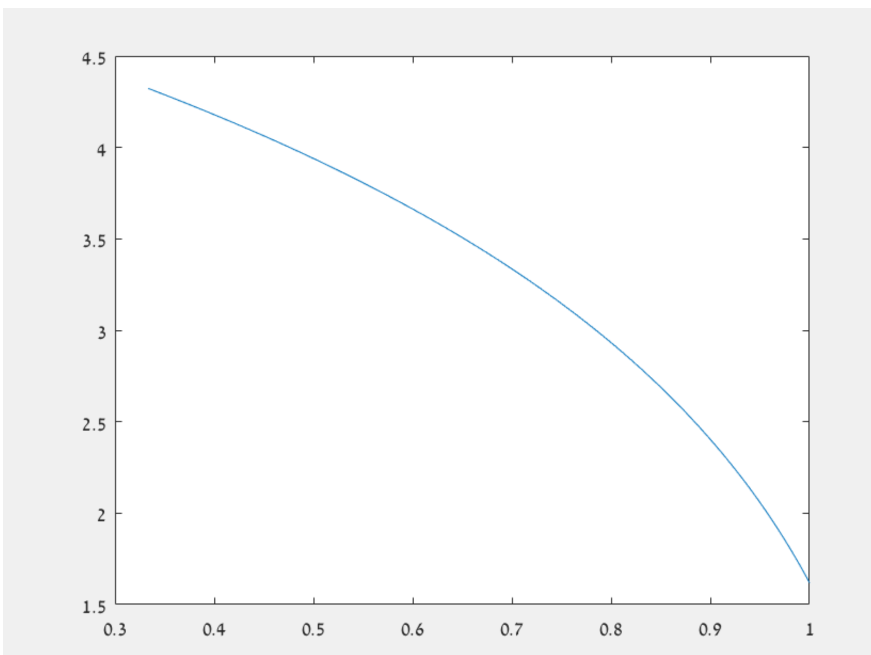
$$p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = \frac{k}{3}N(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - \theta^2$$

$$\frac{\partial W_k^s}{\partial N_A} = \frac{k}{3},$$

$$W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = \frac{k}{3} \cdot (N_B(e_B^*) \cdot (e^{-\lambda\theta}) + N_B(e_B^*)) + l \cdot (1 - e^{-\lambda\theta}) - \theta^2$$

מאמץ אפטימלי θ^* מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dW^s}{dN_A} = -\frac{k}{3} \cdot (N_B(e_B^*) \cdot e^{-\lambda\theta}) + le^{-\lambda\theta} - 2\theta = 0$$



איור 11: הגרף של θ^* כפונקציה של $\frac{\partial W_k^s}{\partial N_A}(\theta^*) = \frac{k}{3}$ עבור $k \in [1, 3]$

תכונה (iii)

מאמץ אופטימלי θ^* של המרצה הקפדן גדל כאשר תועלת שולית לפי ההסתברות לתפוס סטודנט מעתיק $\frac{\partial W^s}{\partial p}$ גדלה.

$$p_k(\theta) = 1 - e^{-k\lambda\theta}, W^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - \theta^2$$

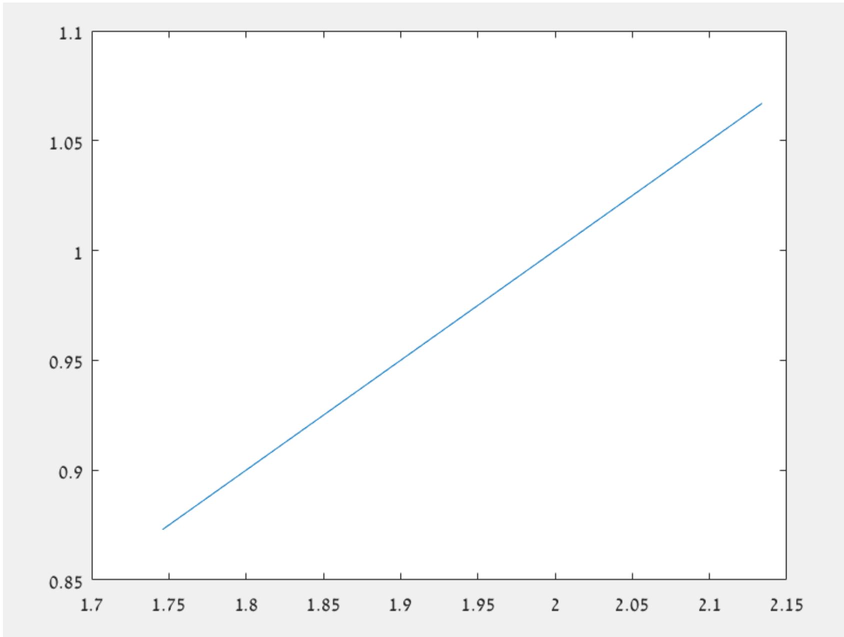
$$W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_B(e_B^*) \cdot (1 - p(\theta)) + N_B(e_B^*) + l \cdot kp(\theta) - \theta^2$$

$$\frac{\partial W_k^s}{\partial p} = -N_B(e_B^*) + l \cdot k,$$

$$W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_B(e_B^*) \cdot (e^{-\lambda\theta}) + N_B(e_B^*) + l \cdot k(1 - e^{-\lambda\theta}) - \theta^2$$

מאמץ אפטימלי θ^* מתקבל מהמשוואה:

$$\frac{dW^s}{dp} = k\lambda e^{-k\lambda\theta}(-N_B(e_B^*) + l) - 2\theta = 0$$



איור 12: הגרף של θ^* כפונקציה של $\frac{\partial W_k^s}{\partial p}(\theta^*) = k\lambda e^{-k\lambda\theta^*}(-N_B(e_B^*) + l)$ עבור $k \in [1,3]$

לפי הגרף ניתן לראות כי הפונקציה עולה מונוטונית .

תכונה (iv)

מאמץ אופטימלי θ^* של המרצה הקפדן גדל כאשר החזרה השולית של המאמץ על ההסתברות לתפוס העתקה p' גדלה.

$$p(\theta) = 1 - e^{-\lambda\theta}, W_k^s(N_A, N_B, p, \theta) = N_A(e_A^*) + N_B(e_B^*) + l \cdot kp(\theta) - \theta^2$$

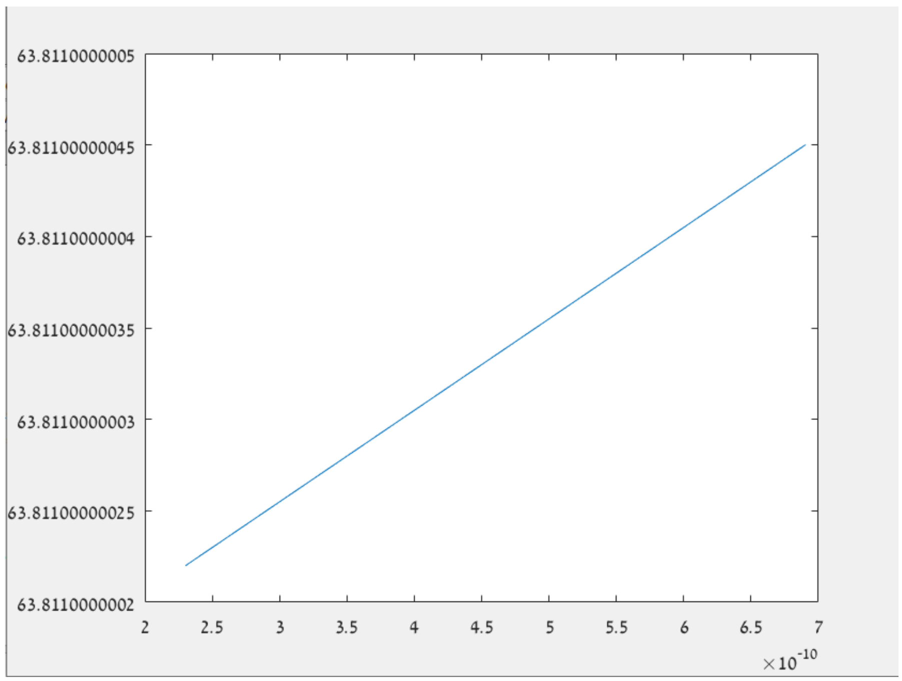
$$W^s(N_A, N_B, p, \theta) = N(e_B^*) \cdot (1 - p(\theta)) + N_B(e_B^*) + l \cdot p(\theta) - \theta^2$$

$$W^s(N_A, N_B, p, \theta) = N(e_B^*) \cdot (e^{-\lambda\theta}) + N_B(e_B^*) + l \cdot (1 - e^{-\lambda\theta}) - \theta^2$$

$$p' = \lambda e^{-\lambda\theta}$$

מאמץ אפטימלי θ^* מתקבל מהמשוואה:

$$N(e_B^*) \cdot (1 + \lambda e^{-\lambda\theta}) + N_B(e_B^*) + l \cdot k(\lambda e^{-\lambda\theta}) - 2\theta = 0$$



איור 13: הגרף של θ^* כפונקציה של $p'(\theta^*) = l \cdot k(\lambda e^{-\lambda\theta^*})$ עבור $k \in [1,3]$

לפי הגרף ניתן לראות כי הפונקציה עולה מונוטונית .

4 משחק של שלוש שחקנים

4.1 מושגי היסוד של תורת המשחקים [4]

נניח שיש לנו משחק עם N שחקנים ולכל שחקן $i = 1, 2, ..., N$ קיימת קבוצה של M_i אסטרטגיות $S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{M_i}\right\}$ - הקבוצות S_i הן קבועות. כל שחקן בוחר אסטרטגיה אחת - $s_i^{j_i}, j_i = 1, 2, ..., M_i$. הוקטור של האסטרטגיות הנבחרות $\left\{s_1^{j_1}, s_2^{j_2}, ..., s_N^{j_N}\right\}$, מוגדר על ידי הווקטור של המספרים $J = \{j_1, j_2, ..., j_N\}$.

נגדיר לכל שחקן פונקציית תשלום:

$$H_i(J) = H_i(j_1, j_2, ..., j_N) \quad , i = 1, ..., N$$

הפונקציה תלוי באסטרטגיות הנבחרות על ידי כל אחד מהשחקנים.

המטרה של כל שחקן היא למקסם את פונקציית התשלום שלו

נגדיר קבוצה ־ $J^* = \{j_1^*, j_2^*, ..., j_N^*\}$, הקבוצה נקראת שיווי משקל (או שיווי משקל נאש), אם לכל $j_i = 1, 2, ..., M_i$ מתקיימים האי־שיוויונים בהאים:

$$H_i(j_1^*, j_2^*, ..., j_N^*) \geq H_i(j_1^*, j_2^*, ..., j_{i-1}^*, j_i^*, j_{i+1}^*, ..., j_N^*), \quad i = 1, ..., N$$

האסטרטגיות המתאימות $s_i^* = s_j^{j_i^*},\ i = 1, ..., N$ ־ הן אסטרטגיות אופטימליות לפי נאש. כלומר, אם השחקן בוחר את האסטרטגיה הלא אופטימלית שלו הוא מפסיד.

4.2 משחק של שני סטודנטים ומרצה

המודל שלנו מסתמך כל משחק של שלושה שחקנים: $N = 3$. נניח: שסטודנט A ־ שחקן מספר 1, סטודנט B ־ שחקן מספר 2, והמרצה ־ שחקן מספר 3. לכל אחד מהשחקנים קיימות שתי אסטרטגיות $(M_1 = M_2 = M_3 = 2)$. קבוצות האסטרטגיות של הסטודנטים הן: להעתיק

$$S_1 = S_2 = \{play \quad fair, cheat\}$$

כאסטרטגיות של המרצה הן:

$$S_3 = \{\theta^* = 0, \theta^* > 0\}$$

מטריצות תשלומים

נבנה את מטריצות התשלומים כך ש־

סטודנט A שחקן שורה

סטודנט B שחקן עמודה

המרצה שחקן מטריצה

1. מטריצה 1 ־ המרצה בוחר $\theta^* = 0$

(a) $\boxed{\text{Professor chooses } \theta^* = 0}$

		Student B	
		cheat	fair play
Student A	cheat	$U_A(0,0)$ $U_B(0,0)$ $W(0,0,0,0)$	$U_A\left(N_B(e_B^*),0\right)$ $U_B\left(N_B(e_B^*),e_B^*\right)$ $W\left(N_B(e_B^*),N_B(e_B^*),0,0\right)$
	fair play	$U_A\left(N_A(e_A^*),e_A^*\right)$ $U_B\left(N_A(e_A^*),0\right)$ $W\left(N_A(e_A^*),N_A(e_A^*),0,0\right)$	$U_A\left(N_A(e_A^*),e_A^*\right)$ $U_B\left(N_B(e_B^*),e_B^*\right)$ $W\left(N_A(e_A^*),N_B(e_B^*),0,0\right)$

איור 14:

2. מטריצה 2 ־ המרצה בוחר $\theta^* > 0$

(b) $\boxed{\text{Professor chooses } \theta^* > 0}$

		Student B	
		cheat	fair play
Student A	cheat	$U_A(0,0)$ $U_B(0,0)$ $W\left(0,0,p^*,\theta^*\right)$	$U_A\left(N_B(e_B^*)(1-p^*),0\right)$ $U_B\left(N_B(e_B^*),e_B^*\right)$ $W\left(N_B(e_B^*)(1-p^*),N_B(e_B^*),p^*,\theta^*\right)$
	fair play	$U_A\left(N_A(e_A^*),e_A^*\right)$ $U_B\left(N_A(e_A^*)(1-p^*),0\right)$ $W\left(N_A(e_A^*),N_A(e_A^*)(1-p^*),p^*,\theta^*\right)$	$U_A\left(N_A(e_A^*),e_A^*\right)$ $U_B\left(N_B(e_B^*),e_B^*\right)$ $W\left(N_A(e_A^*),N_B(e_B^*),p^*,\theta^*\right)$

איור 15:

המטריצות הנ"ל נותנות את התשלומים של השחקנים בנפרד עבור שתי האסטרטגיות של המרצה, ואז, יכולים לזהות את נקודות שיווי המשקל עבור הסטודנטים, ועדיין לא לקחת בחשבון את ההתנהגותו של המרצה.

מטריצה 1:

עבור $j_3 = 1$ (המרצה בוחר $\theta^* = 0$):

<u>תשלומי סטודנט A:</u>

$$H_1(1,1,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_A(0,0) = 0$$

$$H_1(2,1,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

$$H_1(1,2,1) = \{Student\ A\,cheat, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = U_A(N_B(e_B^*), 0)$$

$$H_1(2,2,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

<u>תשלומי סטודנט B:</u>

$$H_2(1,1,1) = \{Student\ A\,cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_B(0,0) = 0$$

$$H_2(2,1,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_B(N_A(e_A^*), 0)$$

$$H_2(1,2,1) = \{Student\ A\,cheat, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

$$H_2(2,2,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

<u>תשלומי המרצה:</u>

$$H_3(1,1,1) = \{Student\ A\,cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = W(0,0,0,0) = 0$$

$$H_3(2,1,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = W(N_A(e_A^*), N_A(e_A^*), 0, 0)$$

$$H_3(1,2,1) = \{Student\ A\,cheat, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = W(N_B(e_B^*), N_B(e_B^*), 0, 0)$$

$$H_3(2,2,1) = \{Student\ A\,play\ fair, Student\ B\,play\ fair, \theta^* = 0\} = W(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), 0, 0)$$

־ישירות ניתן לראות שקיימות שתי נקודות שיווי משקל ביחס לאסטרטגיה של הסטודנטים שאחד מהם מעתיק והשני לא:

$$\begin{cases} j_1^* = 1, \quad j_2^* = 2 \\ j_1^* = 2, \quad j_2^* = 1 \end{cases}$$

עבור $j_1^* = 1,\ j_2^* = 2$:

$$H_1(j_1^*, j_2^*, 1) = H_1(1,2,1) = U_A(N_B(e_B^*), 0) > H_1(1,1,1) = U_A(0,0) = 0$$

$$H_2(j_1^*, j_2^*, 1) = H_1(1,2,1) = U_B(N_B(e_B^*), 0) > H_2(1,1,1) = U_B(0,0) = 0$$

עבור $j_1^* = 2,\ j_2^* = 1$:

$$H_1(j_1^*, j_2^*, 1) = H_1(2,1,1) = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) > H_1(1,1,1) = U_A(0,0) = 0$$

$$H_2(j_1^*, j_2^*, 1) = H_2(1,2,1) = U_B(N_A(e_A^*), 0) > H_2(2,2,1) = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

מטריצה 2:

עבור $j_3 = 2$ (המרצה בוחר $\theta^* > 0$):

<u>תשלומי סטודנט A:</u>

$$H_1(1,1,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\, cheat, \theta^* > 0\} = U_A(0,0) = 0$$

$$H_1(2,1,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\, cheat, \theta^* > 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

$$H_1(1,2,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\, play\ fair, \theta^* > 0\} = U_A(N_B(e_B^*) \cdot (1-p^*), 0)$$

$$H_1(2,2,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\, play\ fair, \theta^* > 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*)$$

תשלומי סטודנט B:

$$H_2(1,1,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_B(0,0) = 0$$

$$H_2(2,1,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_B(N_A(e_A^*) \cdot (1-p^*), 0)$$

$$H_2(1,2,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

$$H_2(2,2,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*)$$

תשלומי המרצה:

$$H_3(1,1,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = W(0,0,p^*,\theta^*) = 0$$

$$H_3(2,1,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = W(N_A(e_A^*), N_A(e_A^*) \cdot (1-p^*), p^*, \theta^*)$$

$$H_3(1,2,2) = \{Student\ A\, cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = W(N_B(e_B^*) \cdot (1-p^*), N_B(e_B^*), p^*, \theta^*)$$

$$H_3(2,2,2) = \{Student\ A\, play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = W(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), p^*, \theta^*)$$

קיימת נקודת שיווי משקל אחת ביחס לאסטרטגיות של הסטודנטים כאשר אחד מהם לא מעתיק השני בוחר לא להעתיק:

$$j_1^* = 2, j_2^* = 2$$

עבור $j_1^* = 2,\ j_2^* = 2$:

$$H_1(j_1^*, j_2^*, 2) = H_1(2,2,2) = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) > H_1(1,2,2) = U_A(N_B(e_B^*) \cdot (1-p^*), 0)$$

$$H_2(j_1^*, j_2^*, 2) = H_1(2,2,2) = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*) > H_2(2,1,2) = U_B(N_A(e_A^*) \cdot (1-p^*), 0)$$

דוגמה מספרית

טבלה 1:

<u>תשלומי סטודנט A:</u>

$$H_1(1,1,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_A(0,0) = 0$$

$$H_1(2,1,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) = 63.811$$

$$H_1(1,2,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = U_A(N_B(e_B^*), 0) = 62.875$$

$$H_1(2,2,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) = 62.875$$

<u>תשלומי סטודנט B:</u>

$$H_2(1,1,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_B(0,0) = 0$$

$$H_2(2,1,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = U_B(N_A(e_A^*), 0) = 75.514$$

$$H_2(1,2,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*) = 63.811 - 4.015^2 = 47.69$$

$$H_2(2,2,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*) = 47.69$$

<u>תשלומי המרצה:</u>

$$H_3(1,1,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = W(0,0,0,0) = 0$$

$$H_3(2,1,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* = 0\} = W(N_A(e_A^*), N_A(e_A^*), 0, 0) = 75.514 + 75.514 = 151.028$$

$$H_3(1,2,1) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = W(N_B(e_B^*), N_B(e_B^*), 0, 0) = 63.811 + 63.811 = 127.622$$

$$H_3(2,2,1) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* = 0\} = W(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), 0, 0) = 75.514 + 63.811 = 139.325$$

:$\theta^* = 0$

סטודנט A

סטודנט B		מעתיק	לא מעתיק
	מעתיק	0, 0, 0	63.811, 47.96, 127.622
	לא מעתיק	62.875, 75.514, 151.028	62.875, 47.69, 139.325

טבלה 1:

ניתן לראות שיש לנו שתי נקודות שיווי משקל נאש : 1.(סטודנט A מעתיק, סטודנט B לא מעתיק) = $(63.811,\ 47.96)$, 2.(סטודנט A לא מעתיק, סטודנט B מעתיק) = $(62.875,\ 75.514)$

טבלה 2:

<u>תשלומי סטודנט A:</u>

$$H_1(1,1,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_A(0,0) = 0$$

$$H_1(2,1,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) = 62.875$$

$$H_1(1,2,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_A(N_B(e_B^*) \cdot (1-p^*), 0) = 63.811 \cdot (1-(1-e^{-1 \cdot 1.066})) - 0^2 = 21.9$$

$$H_1(2,2,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) = 62.875$$

<u>תשלומי סטודנט B:</u>

$$H_2(1,1,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_B(0,0) = 0$$

$$H_2(2,1,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = U_B(N_A(e_A^*) \cdot (1-p^*), 0) = 75.514 \cdot (1-(1-e^{-1 \cdot 0.906})) = 30.518$$

$$H_2(1,2,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*) = 63.811 - 4.015^2 = 47.69$$

$$H_2(2,2,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = U_B(N_B(e_B^*), e_B^*) = 47.69$$

$\theta^* > 0$:

		סטודנט A	
		מעתיק	לא מעתיק
סטודנט B	מעתיק	0, 0, 5.586	21.97, 47.96, 130.543
	לא מעתיק	62.875, 30.518, 152.88	62.875, 47.69, 206.659

טבלה 2:

ניתן לראות שיש לנו נקודת שיווי משקל נאש יחידה: (סטודנט Aלא מעתיק , סטודנט B לא מעתיק) = (62.875, 47.69)

תשלומי המרצה:

$$H_3(1,1,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = W(0,0,p^*,\theta^*) = 5.586$$

$$H_3(2,1,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ cheat, \theta^* > 0\} = W(N_A(e_A^*), N_A(e_A^*)\cdot(1-p^*), p^*, \theta^*) = 152.88$$

$$H_3(1,2,2) = \{Student\ A\ cheat, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = W(N_B(e_B^*)\cdot(1-p^*), N_B(e_B^*), p^*, \theta^*) = 130.543$$

$$H_3(2,2,2) = \{Student\ A\ play\ fair, Student\ B\ play\ fair, \theta^* > 0\} = W(N_A(e_A^*), N_B(e_B^*), p^*, \theta^*) = 206.659$$

4.3 החלטת הסטודנט

נבחן את ההחלטה של הסטודנט A. מכיוון שאנו מניחים סימטריה, אותן תוצאות תקפות עבור סטודנט B. ראשית, נניח שהפרופסור בוחר $\theta^* = 0$ וסטודנט B בוחר להעתיק. במקרה זה, סטודנט A בוחר לא להעתיק (לשחק הוגן), כי:

$$U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) > 0 = U_A(0,0) \tag{3}$$

אם הפרופסור בוחר $\theta^* = 0$ וסטודנט B בוחר לא להעתיק (לשחק הוגן), אז במקרה זה עדיף לסטודנט A לבוחר להעתיק, כי:

$$U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) < U_A(N_B(e_B^*), 0) = U_A(N_A(e_A^*), 0) \tag{4}$$

כאשר אנו משתמשים שוב בהנחת הסימטריה.

נניח עכשיו שהפרופסור בוחר $\theta^* > 0$. אם סטודנט B בוחר להעתיק, סטודנט A בוחר לא להעתיק (לשחק הוגן), כי מכיוון שהתמורה שלו זהה לזו שניתנה על ידי(3). עם זאת, אם סטודנט B בוחר לא להעתיק (לשחק הוגן), כעת, הבחירה של סטודנט A תלויה בהסתברות p להיתפס מעתיק. למעשה סטודנט A בוחר לא להעתיק (לשחק הוגן), אם ורק אם:

$$U_A(N_A(e_A^*), e_A^*) \geq U_A(N_B(e_B^*)(1-p^*), 0) \tag{5}$$

טענה 1

קיימת הסתברות לתפוס העתקה $p^{min} \in (0,1)$ כך ש-

$$U_i(N_i(e_i^*), e_i^*) = U_i(N_j(e_j^*)(1-p^{min}), 0) \tag{6}$$

כאשר $A, B = i, j$ וגם $i \neq j$.

הוכחה:

ראשית, נגדיר פונקציה: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, שניתנת על ידי:

$$f(p) := U_i(N_i(e_i^*), e_i^*) - U_i(N_j(e_j^*)(1-p), 0)$$

ואז, נשים לב כי f רציפה כי גם כן U_i, וגם:

$$f'(p) = \frac{\partial U_i}{\partial N_i} p N_i > 0$$

כלומר, $f(p)$ גדל בהחלט עבור כל $p \in [0,1]$.

כעת, ניתן לחשב:

$$f(0) = U_i(N_i(e_i^*), e_i^*) - U_i(N_j(e_j^*), 0) = U_i(N_i(e_i^*), e_i^*) - U_i(N_i(e_i^*), 0) < 0$$

$$f(1)=U_i(N_i(e_i^*),e_i^*)-U_i(0,0)=U_i(N_i(e_i^*),e_i^*)>0$$

כך שאנו משתמשים בסימטריה של הסטודנטים ובעובדה כי $U_i(0,0)=0$. לכן, בהתחשב בכך ש־ $p\in[0,1]$, הרציפות של f ו־ $f'(p)>0$, לכן קיים $p^{min}\in(0,1)$ כך ש־ $f(p^{min})=0$, וזה מה שצריך להוכיח.

4.4 החלטת המרצה

נתחיל עם המרצה הרחמני. ניתן לראות בקלות שלטיפוס הזה של המרצה יש אסטרטגיה דומיננטית, כלומר $\theta^*=0$. ההנחה כי חוסר תועלת שולית שלו לפי המאמץ גבוהה יחסית מרמזת על כך ש־ $W^L(a,b,0,0)>W^L(a,b,P^*,\theta^*)$ לכל $a,b\in[0,1]$. כמו כן, $\partial W/\partial N_i>0$, גם מרמז על־ $W^L(a,a,0,0)>W^L(a,a(1-p^*),p^*,\theta^*)$. וזה מכסה את כל האפשרויות.

למרות המורכבות הגדולה בהתנהגותו של המרצה הקפדני, ישנם שני מקרים פשוטים.

ראשית, נניח ששני התלמידים בוחרים להעתיק. במקרה זה מתקיים $W^S(0,0,0,0)=0<W^S(0,0,p^*,\theta^*)$, כך שהבחירה הטובה ביותר שלו היא $\theta^*>0$.

כאשר שני הסטודנטים בוחרים לא להעתיק, הבחירה הטובה ביותר של המרצה היא שוב פעם $\theta=\theta^*>0$, כי

$W^S(N_A(e_A^*),N_B(e_B^*),0,0)<W^S(N_A(e_A^*),N_B(e_B^*),p^*,\theta^*)$, המשתמע מההנחה המגדירה את הטיפוס הקפדני של מרצה.

נניח כעת, שסטודנט A מעתיק וסטודנט B לא מעתיק (משחק הוגן). במקרה זה הבחירה הטובה ביותר של המרצה הקפדני היא $\theta^*>0$ אם ורק אם

$$W^S(N_B(e_B^*)(1-p^*),N_B(e_B^*),p^*,\theta^*)\geq W^S(N_B(e_B^*),N_B(e_B^*),0,0) \tag{7}$$

ניזכר שההגדרה של המרצה הקפדני קובעת ש־ $p'\cdot\partial W^S/\partial p+\partial W^S/\partial\theta>0$ כאשר $\theta=0$, כלומר המרצה הקפדני עושה מאמץ חיובי בכל פעם שאין לזה שום השפעה על ציוני התלמידים. לפיכך, עלינו לבדוק האם ההשפעה השולית של המאמץ על הציונים, כלומר ירידתם כתוצאה מהעלייה בהסתברות לתפוס תלמידים לא ישרים, מספיקה בכדי להתגבר על התועלת הנמדדת על ידי הנגזרת לעיל. באופן רשמי, הבחירה הטובה ביותר של המרצה הקפדני היא θ^* אם ורק אם

$$\left(p'\cdot\frac{\partial W^S}{\partial p}+\frac{\partial W^S}{\partial\theta}\right)|_{\theta=0}\geq\frac{\partial W^S}{\partial N_A}N_Bp'|_{\theta=0} \tag{8}$$

נשים לב שכאשר האי־שוויון הנ"ל הוא קפדני $\theta^* > 0$, שולט בהחלט $\theta^* = 0$, וכאשר מתקיים שוויון המרצה הוא אדיש בין שתי האסטרטגיות. יתר על כן, ניתן לראות בקלות שכאשר סטודנט A לא מעתיק (משחק הוגן) וסטודנט B מעתיק. הבחירה הטובה ביותר של המרצה הקפדני היא $\theta^* > 0$ אם ורק אם:

$$(p' \cdot \frac{\partial W^S}{\partial p} + \frac{\partial W^S}{\partial \theta})|_{\theta=0} > (\partial W^S \partial N_B N_A \cdot p')|_{\theta=0}$$

4.5 שיווי משקל נאש

כבר מצאנו את כל הבחירות הטובות ביותר של השחקנים. כעת אנו מסוגלים לחשב את כל האפשרויות לשיווי משקל נאש במשחק הבסיסי. עם זאת, מרבית התוצאות הללו כוללות לפחות רמאות (העתקה) של תלמיד אחד. בחלק זה אנו מעוניינים במיוחד למצוא תנאים להבטחת קיומם וייחודם של שיווי המשקל הטוב ביותר, שיווי משקל נאש בו שני התלמידים לא מעתיקים (משחקים הוגן).

ניתן להסביר את האינטרס שלנו בשיווי משקל זה בכך שהוא דומיננטי (שולט) כאשר$\theta^* > 0$:

ברגע שמגיעים לתוצאה זו, המרצה מפסיד בתועלתו אם ננסה להגדיל את הרווח של אחד הסטודנטים . למרות שזה לא המקרה כאשר $\theta^* = 0$, אנו יכולים לנמק את חשיבותו בטענה כי$\theta^* > 0$ הוא המקרה הנפוץ ביותר בפועל. על מנת לעשות זאת, ראשית אנו קובעים תנאי חשוב:

$$\left(p'\frac{\partial W^S}{\partial p} + \frac{\partial W^S}{\partial \theta}\right)|_{\theta=0} \geq \max\left\{\frac{\partial W^S}{\partial N_A}N_B p'|_{\theta=0}, \frac{\partial W^S}{\partial N_B}N_A p'|_{\theta=0}\right\} \tag{9}$$

אשר ניתן לראות שהוא שווה ל־ (6) כאשר הסטודנטים סימטריים במקרה זה $\partial W^S \partial N_B N_A \cdot p' = \partial W^S \partial N_A N_B \cdot p'$.

התוצאה העיקרית שלנו בחלק זה ניתנת על ידי הטענה הבאה.

טענה 2

במשחק הבסיס שישחקו סטודנט A ,סטודנט B והמרצה, יש את שיווי המשקל הטוב ביותר (הסגולי) אם ורק אם $p^* \geq p^{min}$, המרצה קפדני ותנאי (7) מתקיים. יתר על כן, אם אי השוויון הנ`ל הוא של מרצה קפדני ותנאי (7) מתקיים באי שוויון קפדני, אז שיווי המשקל הוא ייחודי.

הוכחה:

הרעיון העומד בבסיס התוצאה הנ`ל הוא כי שיווי המשקל הסגולי מתקיים רק אם המרצה נותן לסטודנטים תמריצים להתנהג בצדק. זה נעשה על ידי הגדלת ההסתברות לתפוס העתקה מעל סף p^{min}, מה שמאלץ את המרצה לעשות מאמץ חיובי, וזה בלתי אפשרי כאשר המרצה הוא רחמני. לפיכך, שיווי המשקל ללא העתקה אפשרי רק כאשר המרצה קפדני וחוסר תועלתו השולית מירידת הציונים נמוכה יחסית, כפי שקבע התנאי (7). התוצאה הטובה ביותר היא שיווי המשקל היחיד של נאש במשחק בכל פעם שאף אחד מהשחקנים אינו אדיש בין האסטרטגיות שלהם, דבר המובטח כאשר $p^* > p^{min}$ ותנאי (7) מסתפק באי שוויון קפדני.

אף על פי שיווי המשקל הסגולי שהוא הרלוונטי ביותר, חשוב ללמוד את שיווי המשקל האחר הכרוך בהעתקה. נתחיל מהמקרה בו המרצה בוחר $\theta^* = 0$, כלומר הוא רחמני או קפדני והתנאי(7) אינו מתקיים. כפי שניתן לראות במטריצת המשחק (שהוצגה בעמוד 50), שיוויי המשקל במקרה זה הם: 1. (סטודנט A מעתיק, סטודנט B לא מעתיק, $\theta^* = 0$(מרצה רחמני))

2. (סטודנט A לא מעתיק, סטודנט B מעתיק, $\theta^* = 0$(מרצה רחמני)).

ברגע שהמרצה אינו מעניש את הסטודנטים, נשללת האפשרות של שיווי משקל מוסרי. עם זאת, בהתחשב באותה הנחה שלא כוללת `סטודנטים עצלנים מאוד`, הלימוד עדיף תמיד על פני קבלת ציון השווה לאפס. מכיוון שהסטודנטים הם הומוגניים, קיימת בעיית תיאום בהגדרת מי יהיה הרמאי ומי יהיה הלומד.

אם המשחק היה חוזר על עצמו,אז חלק מהחלופות לפתרון בעיית התיאום יהיו לאפשר אסטרטגיות מעורבות ולשקול את השפעות הלמידה על התנהגויות הסטודנטים. עם זאת, במשחק סטטי כמו שלנו עלינו לשקול אפשרויות אחרות, כגון תקשורת בין סטודנטים לפני בחינה. נניח שיום אחד לפני תחילת הבחינה, התלמידים יכולים לדבר ולהגיע להסכם האכיפה העצמית לגבי מי ירמה (יעתיק) ומי ילמד. זה יפתור את הבעיה, אך שימו לב כי המאפיין שיקבע את תפקידי הסטודנטים חייב להיות כזה שלא נקח בחשבון בתועלת הסטודנטים, ואין זו משימה פשוטה, כפי שמראה דוגמה להלן.

משהו דומה קורה כאשר חושבים על אפשרויות של נקודות מרכזיות: חייב להיות מאפיין כלשהו שאינו בא לידי ביטוי ברווחתם הקריטריון לבחירה בין שני התלמידים. במשחק זריקה אחת בו השחקנים הומוגניים, לא קל למצוא מאפיין כזה. אפשר לחשוב שסטודנט אחד, נניח A, נותן יותר ערך לאתיקה מאשר בן כיתתו סטודנט B ושניהם יודעים זאת, כך שהנקודה המרכזית תציין את שיווי המשקל (סטודנט A לא מעתיק, סטודנט B מעתיק, $\theta^* = 0$(מרצה רחמני)). עם זאת, סביר לחשוב כי הבדל זה בין התלמידים חייב לבוא על ידי ביטוי בחוסר תועלת המאמץ שלהם או בתועלת הציונים.

חלופה אחרת היא לקחת בחשבון שלתלמידים עמדות ישיבה שונות בכיתה, ואחת מהן נמצאת במצב שמקל על ההעתקה. שוב זה עשוי לפתור את בעיית התיאום, אך עמדות שונות בכיתה עשויות גם להצביע על כך שההסתברויות להיתפס מעתיק הן גם שונות, מה שמרמז כי התלמידים אינם הומוגניים. אותם קשיי תיאום מתעוררים כאשר אנו בוחנים את שיווי המשקל האפשרי האחר.

לדוגמא, כאשר המרצה בוחר$\theta^* > 0$ אך $p^* < p^{min}$, אז יש לנו שני שיוויי משקל (סטודנט A לא מעתיק, סטודנט B מעתיק, $\theta^* > 0$(מרצה קפדני)) ו־ (סטודנט A מעתיק, סטודנט B לא מעתיק, $\theta^* > 0$(מרצה קפדני)), ואותו נימוק שהובא לעיל חל גם כאן. כאשר הבחירה שלו היא$\theta^* > 0$ ו־$p^* = p^{min}$, יש לנו אותם שני שיוויי המשקל הקודמים בנוסף לשיווי המשקל הסגולי. שוב יש בעיית תיאום ועכשיו היא עוד יותר חמורה, ברגע שהבחירה היא בין שלוש תוצאות שונות. נשים לב שבמקרה האחרון הזה, הריבוי מתעורר מכיוון שרמת העונש גורם לסטודנטים להיות אדישים בין משחק הוגן למשחק רמאות. נקודה מרכזית אפשרית אחת כאן היא קיומו של היבט תרבותי כלשהו הקובע כי לימוד מוערך יותר על ידי החברה מאשר רמאות. אף על פי כן, הקשיים האמורים נותרו.

לבסוף, ישנם תרחישים בהם המרצה הקפדני אדיש בין $\theta^* = 0$ ל־ $\theta^* > 0$. הפרשנות של תוצאות אלה זהה למדי לקודם. יתר על כן, כאשר זה המקרה, קיימת אפשרות לתוצאה עם חמש שיוויי משקל נאש, כלומר כאשר $p^* = p^{min}$. כעת, בעיית התיאום עוד יותר חמורה, אך אנו יכולים לחשוב על נקודה מרכזית הכרוכה בהיבט תרבותי כלשהו בהתנהגותו של המרצה. החברה עשויה להיחשב כמאמץ גבוה ראוי, מה שיוביל את המרצה והסטודנטים לבחור בשיווי המשקל הענקי.

5 סיכום

התרומה העיקרית של מודל זה היא להדגיש כי ניתן לראות רמאות כבחירה אסטרטגית, הכוללת ניתוח עלות תועלת. למעשה, המסגרת שלנו מספקת את היסודות המיקרו־כלכליים הן מבחירת התלמיד לרמות או לא, והן מבחירת הפרופסור לנסות לתפוס סטודנטים לא ישרים. על ידי יישום הכלים של תורת המשחקים, אנו מצליחים להבין טוב יותר את הקובעים של חוסר יושר אקדמי שנמצא בספרות, באופן דומה שהמודל התיאורטי של בקר (1968) עסק בכלכלה לפשע. הממצאים שלנו מספקים גם השלכות מדיניות נוספות על שליטת הרמאות בכיתה. בפרט, אנו מדגישים את החשיבות של פרופסורים להיות בעלי מוטיבציה טובה (עם חוסר יכולת נמוכה של מאמץ) ודואגים להגינות בכיתה. לסיום, אנו דנים בתפקיד חוסר הוודאות של התלמידים לגבי סוג הפרופסור וכיצד פרופסור במאמץ נמוך יכול לשלוח אותות ליצירת תמריצים להתנהגות כנה. המודל שלנו הוא הצעד הראשון לקראת טיפול קפדני ביחסים האסטרטגיים העומדים בבסיס הבחירה של התלמידים בבגידה או לא. לכן, ישנם מספר כיוונים בהם ניתן להרחיב אותו. אחת שאנחנו מאמינים שהיא מבטיחה היא לחקור עוד יותר את המודל עם מידע לא שלם. תלמיד עשוי להיות לא בטוח בנוגע לציון האמיתי של התלמיד האחר ־ או לרמת המאמץ האמיתית שלו, בסופו של דבר ־ אשר ניתן לדגם על ידי ההנחה שיש לו אמונה בלבד בכך. הרחבה כזו תאפשר לימוד נושאים כמו איתות, שמאפשר לנו להבין כיצד פרופסור יכול להשתמש במגע היומיומי עם הסטודנטים כדי למנוע רמאות. בעניין זה נראה כי משחקים חוזרים ונשנים הם אלטרנטיבה טובה למודל הדינמיקה של ההתנהגויות של הסטודנטים ושל הפרופסור, ובכך את הקשר היומיומי שלהם. הרחבה מעניינת אחרת כוללת לאפשר שיתוף פעולה בין הסטודנטים, הן במשימות הביתה והן במשימות בכיתה ־ כאשר אחד מנסה בכוונה לעזור לאחרים בבחינה, למשל, שתתרום לספרות התחלתית שהתחילה בריגס ואח '. (2013). אנו מאמינים כי גישה זו עשויה לספק פתרונות חלופיים לבעיות התיאום המצויות במודל שלנו.

רשימת מקורות

[1] Griebeler, Marcelo de C. "Crime and punishment in classroom: a game-theoretic approach for student cheating." Revista Brasileira de Economia 71.1 (2017): 43-65.

[2] Whitley Jr, Bernard E., and Patricia Keith-Spiegel. Academic dishonesty: An educator's guide. Psychology Press, 2001.

[3] יושר אקדמי במוסדות להשכלה גבוהה בארץ . יואל חשין. http://www.mentallica.co.il/article/unethical_behavior

Vladimir Mazalov. Mathematical Game Theory and Applications, Wiley, 2014 [4]

נספח

```
syms e

alpha=0.6;

k=1:0.01:3;

for i=1:length(k),ee(i)=vpasolve(100*alpha*exp(-alpha*e)-2*k(i)*e);
end

plot(2*k.*ee,ee)
```

```
syms e

alpha=0.6;

k=1:0.01:3;

for i=1:length(k)
    ee(i)=vpasolve(k(i)*100*(alpha)*(exp(-alpha*e))-2*e);
end

plot(k,ee)
```

```
syms e

alpha=0.6;

k=1:0.01:3;

for i=1:length(k)
    ee(i)=vpasolve(k(i)*100*alpha*(exp(-alpha*e*k(i)))-e^2);
end

plot((100*alpha*k.*(exp(-alpha*k.*ee))),ee)
```

```
syms theta

lambda=0.4;
N_B=63.811;
l=70;

k=1:0.01:3;
if(l > N_B)
for i=1:length(k)
    thta(i)=vpasolve(N_B*(lambda)*exp(-lambda*theta)+l*lambda*exp(-lambda*theta)-2
end
end

plot(2*k.*thta,thta)
```

```
syms theta

lambda=0.4;
N_B=63.811;
l=70;

k=1:0.01:3;
if(l > N_B)
for i=1:length(k)
    thta(i)=vpasolve(k(i)*lambda*exp(-lambda*k(i)*theta)*(l-N_B)-2*theta);
end
end

plot(lambda*k.*exp(-lambda*k.*thta)*(l-N_B),thta)

```

```
syms theta

lambda=0.4;
 N_B=63.811;
 l=70;

 k=1:0.01:3;
if(l > N_B)
 for i=1:length(k)
     thta(i)=vpasolve((-k(i)/3)*(exp(-lambda*theta)*N_B)+l*exp(-lambda*theta)-2*the
 end
end

 plot((k/3),thta)
```

```
syms theta

 lambda=0.4;
 N_B=63.811;
 l=70;

 k=1:0.01:3;
if(l > N_B)
 for i=1:length(k)
     thta(i)=vpasolve(N_B*(1+lambda*exp(-lambda*theta))+N_B+l*lambda*k(i)*exp(-lamb
 end
end

 plot(l*lambda*k.*exp(-lambda*thta),thta)
```