המכללה האקדמית להנדסה
אורט בראודה
ORT BRAUDE COLLEGE

Department of Mathematics

היחידה למתמטיקה

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

פיתוח אסימפטוטי לפתרון המשוואה הדיפרנציאלית של מודל "רודף – נרדף" בסביבת נקודה סינגולרית

חיים כהן

Asymptotic Expansion of Solution of a Linear Differential Equation in a Neighborhood of a Singular Point in the Pursuer-Evader model

Haim Cohen

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

פיתוח אסימפטוטי לפתרון המשוואה הדיפרנציאלית של מודל "רודף – נרדף" בסביבת נקודה סינגולרית

חיים כהן

Asymptotic Expansion of Solution of a Linear Differential Equation in a Neighborhood of a Singular Point in the Pursuer-Evader model

Haim Cohen

Advisor:
Prof. Valery Glizer

מנחה:
פרופ' ולרי גליזר

Karmiel **כרמיאל**

2011

תוכן עניינים

1 מבוא

אחד המודלים המתמטיים המעניינים והחדשניים הוא מודל "רודף - נרדף". מודל זה מתאר את תנועת גוף אחד, "רודף", ואת תנועת הגוף השני, "נרדף", כאשר הרודף שואף להשיג את הנרדף והנרדף שואף להתחמק מן הרודף. כאשר משתמשים במודל מתוך עיני הרודף, ומגדירים לרודף פונקציית בקרה ספציפית, מודל זה מיוצג כבעיית התחלה אי הומוגנית מסדר ראשון הבאה.

$$\begin{gathered}\frac{dz}{dt} = -h_1(t)\frac{f(t)}{(t_f - t)^{\alpha}}z + h_2(t)v(t), \quad t \in [0, t_f) \\ z(0) = z_0 \quad , \quad \lim_{t \to t_f} = -h_1(t)\frac{f(t)}{(t_f - t)^{\alpha}} = -\infty\end{gathered} \tag{1.1}$$

לאחר הגדרת המודל, נראה כי קיימת בעייה לפתור את הבעייה כאשר מתקרבים לזמן הפגיעה $t \to t_f$. כלומר הנקודה $t = t_f$ היא נקודה סינגולרית מכיוון שהמקדם של z שואף למינוס אינסוף בזמן זה, מה שמקשה על פתרון הבעייה בסביבת נקודה זו בדרכים נומריות. בעבר, ניסה הסטודנט אופיר חזן בעבודתו בהנחיית פרופ' גליזר למצוא פתרון למשוואה בסביבת נק' זו בשימוש במספר שיטות נומריות. הפיתרון אכן היה טוב במרחק מה מהנק' הסינגולרית אך לא בסביבתה.

מסיבה זו עלה הצורך לחפש שיטות אחרות לפתור את בעייה זו. הדרך בה נדון בחיבור זה היא שיטת הפיתוח לטור סביב הנקודה הסינגולרית. לשם כך נפתח בהגדרת המודל והבעייה הנובעת ממנו, לאחר מכן נעסוק בשיטות ובדרכים המופיעים בספרות לפתרון משוואות דיפרנציאליות סביב נקודה סינגולרית באמצעות פיתוח לטור חזקות. ולסיום נעסוק בבעייה(1.1) כאשר נבחן את הפיתרון והתנהגותו, בשלבים, צעד אחר צעד, עד אשר נגיע לפתרון המשוואה הרצויה. על מנת לבחון את הפתרון ולהשוות אותו עם שיטות נומריות תוצג סימולציה המשווה בין השניים.

מקור הבעיה

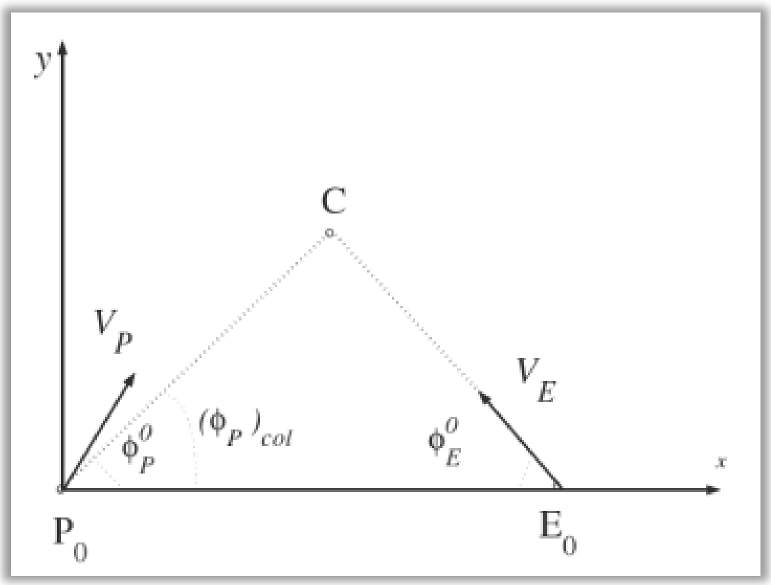
1.1 תיאור המודל

המודל בו נעסוק מתאר את היחס בין שני גופים נעים, רודף ונרדף. ניתן לראות זאת כבעיה המתארת יירוט של טיל (נרדף) על ידי טיל (רודף), כאשר מטרת הנרדף להתחמק מן הרודף ומטרת הרודף היא לפגוע בנרדף בטרם יגיע לקרקע. המודל המתואר מאפשר לנו להניח את ההגבלות הבאות.

- התרחיש המתואר מתקיים במישור.
- מהירויות שני הגופים הינן קבועות כאשר התמרון באמצעות תאוצות רדיאליות מוגבל.
- ניתן לבטא את הדינמיקה של כל אחד מן הגופים על ידי פונקציית תמסורת מסדר ראשון.
- מסלולי שני הגופים ניתנים ללינאריזציה ביחס לגיאומטריה הנומינלית של הפגיעה.
- ניתן לדעת את מיקומי הגופים בכל שלב בדיוק רב

באיור 1 ניתן לראות את משולש ההתנגשות, כאשר ציר ה $-x$ מתואם עם קו הראיה ההתחלתי ו- P_0 ו-E_0 מתארים את מיקומם ההתחלתי של הרודף והנרדף בהתאמה. ראשית הצירים מוגדרת כמיקומו ההתחלתי של הרודף . הזווית $(\phi_p)_{col}$ היא הזווית היוצרת את משולש ההתנגשות, כלומר מתקיים התנאי הבא :

$$V_p \sin(\phi_p)_{col} = V_e \sin \phi_e^0 \qquad (2.1)$$

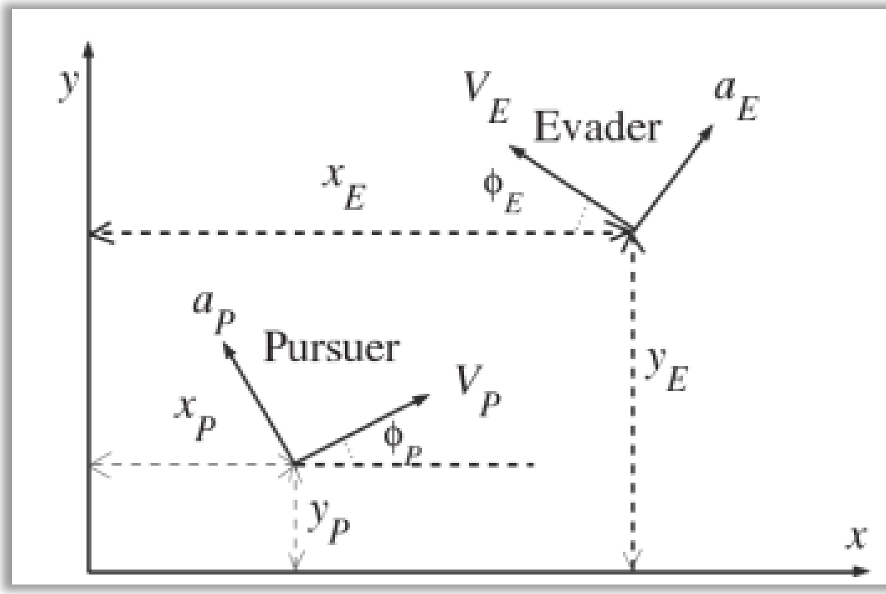


איור1:השרטוט מתאר את משולש ההתנגשות . כאשר E_0 ו $-P_0$ מייצגות את מיקומם ההתחלתי של הנרדף והרודף בהתאמה.

כאשר $\mathrm{V_p}$ ו- V_e הן מהירויות הגופים שכפי שהזכרנו הינן קבועות. ϕ_e^0 היא הזוית ההתחלתית שבין וקטור המהירות של הנרדף וקו הראיה. ו ϕ_e^0 היא הזוית ההתחלתית שבין וקטור המהירות של הרודף וקו הראיה. ההנחה היא שההפרש בין ϕ_p^0 ו- $(\phi_p)_{col}$ הוא קטן מאוד. כלומר מתקיים :

$$\left|\phi_p^0 - (\phi_p)_{col}\right| \ll 1 \quad (2.2)$$

באיור הבא ניתן לראות תיאור של הרודף והנרדף במהלך מסלולם .



איור2: הרודף והנרדף במהלך מסלולם.

הקואורדינטות (x_p, y_p), (x_e, y_e) מציינות את מיקומם של הרודף והנרדף בהתאמה ברגע נתון. a_p, a_e הן התאוצות הצידיות של הרודף והנרדף בהתאמה. ϕ_p , ϕ_e הן הזויות שבין מהירויות הרודף והנרדף בהתאמה, לבין קו הראיה (ציר ה x). ההנחה היא כי וקטור המהירות של הרודף נשאר קרוב לקו ההתנגשות, כלומר, התמרון שלו מתבצע בסביבה הקרובה של קו ההתנגשות ומתקיים :

$$\left|\phi_p(t) - (\phi_p)_{col}\right| \ll 1 \quad (2.3)$$

כמו כן מניחים כי וקטור המהירות של הנרדף נשאר קרוב וקטור המהירות ההתחלתי :

$$\left|\phi_e(t) - \phi_e^0\right| \ll 1 \quad (2.4)$$

כתוצאה משתי ההנחות האחרונות ניתן לבצע לינאריזציה למהירות הסגירה בין שני הגופים בכיוון ציר ה x :

$$V_c = V_p \cos\phi_p(t) - V_e \cos\phi_e(t) \cong V_p \cos(\phi_p)_{col} - V_e \cos\phi_e^0 \qquad (2.5)$$

כלומר מהירות הסגירה V_c שהיא המהירות היחסית בין הגופים בכיוון ציר ה- x היא קבועה, ולכן היא מאפשרת לנו לקבוע את הזמן בו תתבצע ההתנגשות עבור תנאי ההתחלה הנתונים :

$$t_f = r_0/V_c. \qquad (2.6)$$

כאשר r_0 הוא המרחק ההתחלתי בין שני הגופים ברגע $t_0 = 0$. כעת, לאחר שלב ההנחות נוכל לתאר את המודל על ידי מערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2\,, && x_1(0) = 0\\
\dot{x}_2 &= x_3 - x_4\,, && x_2(0) = x_{20} = V_e \sin\phi_e^0 - V_p \sin\phi_p^0\\
\dot{x}_3 &= (a_e^c - x_3)/\tau_e\,, && x_3(0) = 0\\
\dot{x}_4 &= (a_p^c - x_4)/\tau_p\,, && x_4(0) = 0
\end{aligned} \qquad (2.7)$$

כאשר $x_1 = y_e - y_p$ הוא המרחק היחסי בכיוון הנורמלי לקו הראיה (בכיוון ציר ה y–)בין הרודף לנרדף,x_2היא המהירות היחסית הנורמלית, x_3 ו x_4– הן התאוצות הצידיות הנורמליות של הנרדף והרודף בהתאמה. ו τ_e–, τ_p הם קבועי הזמן המתאימים לנרדף ולרודף בהתאמה. את התאוצות הצדדיות a_e^c ו- a_p^c ניתן לנרמל על ידי הערכים המקסימלים שלהם ולייצג אותם באופן הבא :

$$a_e^c(t) = a_e^{\max} v(t)\,, \quad a_p^c(t) = a_p^{\max} u(t) \qquad (2.8)$$

כאשר הפונק׳ $u(t)$ ו $v(t)$– הן הבקרות של הרודף והנרדף בהתאמה, ומתקיים :

$$|v(t)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_f \qquad (2.9)$$

$$|u(t)| \leq 1. \quad 0 \leq t \leq t_f \qquad (2.10)$$

כלומר, פונקציות הבקרה הן מדידות וחסומות בטווח הזמן $[o, t_f]$.

את מערכת המשוואות ניתן לרשום בצורה מטריציונית. כאשר הסימון T מייצג שיחלוף של מטריצה או וקטור *(transposition)*.

$$\dot{x} = Ax + bu + cv, \qquad x(0) = x_0, \qquad (2.11)$$

כאשר $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_0^T = (0, x_{20}, 0,0)$,

$$c^T = (0,0, a_e^{\max}/\tau_e, 0)\ ,\ b^T = (0,0,0, a_p^{\max}/\tau_p) \qquad (2.12)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_p \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

1.2 הורדת סדר של מערכת המשוואות

על מנת להוריד את סדר המשוואה נחשב קודם את האקספוננט של המטריצה A (*transition matrix*).

מכיוון שהמטריצה A אינה לכסינה, נאלץ לחשב את המטריצה $e^{A(t_f-t)}$ ע״י פיתוח לטור. באופן כללי, ניתן לייצג אקספוננט של מטריצה באמצעות הטור הבא:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \cdots \qquad (2.14)$$

לצורך העניין נחשב את A^k , $(k = 2,3,4 \dots)$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 1/\tau_p \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1/\tau_p\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 1/\tau_p \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1/\tau_p\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\tau_e & 1/\tau_p \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^2 & -\left(1/\tau_p\right)^2 \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1/\tau_p\right)^3 \end{bmatrix}$$

ובאופן כללי עבור $k \geq 4$:

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1/\tau_e)^{k-2} & -\left(-1/\tau_p\right)^{k-2} \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^{k-1} & -\left(-1/\tau_p\right)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-1/\tau_e)^{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-1/\tau_p\right)^{k} \end{bmatrix}$$

כעת נחשב את האקספוננט של המטריצה

$$\phi(t_f,t)=e^{A(t_f-t)}=I+A(t_f-t)+\frac{A^2(t_f-t)^2}{2}+\frac{A^3(t_f-t)^3}{3!}+\frac{A^4(t_f-t)^4}{4!}+\cdots$$

לשם הנוחות נסמן $s=t_f-t$. ונחשב את $\phi(t_f,t)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & s & \frac{1}{2}s^2-\frac{1}{\tau_e}\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots & -\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{\tau_p}\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots \\ 0 & 1 & s-\frac{1}{\tau_e}\cdot\frac{s^2}{2}+\left(-\frac{1}{\tau_e}\right)^2\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots & -s+\frac{1}{\tau_p}\cdot\frac{s^2}{2}-\left(\frac{1}{\tau_p}\right)^2\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{\tau_e}s+\left(-\frac{1}{\tau_e}\right)^2\cdot\frac{s^2}{2}+\left(-\frac{1}{\tau_e}\right)^3\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{\tau_p}s+\left(-\frac{1}{\tau_p}\right)^2\cdot\frac{s^2}{2}+\left(-\frac{1}{\tau_p}\right)^3\cdot\frac{s^3}{3!}+\cdots \end{bmatrix}$$

כעת נגדיר משתנה מצב חדש המייצר את ה *zero-effort miss distance* , כלומר מהי מידת ההחטאה אם ימשיכו שני הגופים ללא שינוי בכיוון.

$$Z(t)=d^T\phi(t_f,t)x(t), \qquad (2.15)$$

כאשר

$$d^T=(1,0,0,0), \qquad (2.16)$$

$$d^T\phi\left(t_f,t\right) = \left[1 \quad s \quad \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{\tau_e}\cdot\frac{s^3}{3!} + \cdots \quad -\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{\tau_p}\cdot\frac{s^3}{3!} + \cdots\right]$$

ניתן לראות כי

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{\tau_e}\cdot\frac{s^3}{3!} + \cdots = \tau_e^2\left(\frac{s}{\tau_e} - 1 + 1 - \frac{s}{\tau_e} + \left(-\frac{1}{\tau_e}\right)^2\cdot\frac{s^2}{2} + \left(-\frac{1}{\tau_e}\right)^3\cdot\frac{s^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= \tau_e^2\left(\frac{s}{\tau_e} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{s}{\tau_e}\right)^2\right) = \tau_e^2\left(\frac{s}{\tau_e} - 1 + e^{-s/\tau_e}\right)$$

ובאותה הדרך

$$-\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{\tau_p}\cdot\frac{s^3}{3!} + \cdots = -\tau_p^2\left(\frac{s}{\tau_p} - 1 + e^{-s/\tau_p}\right).$$

נסמן

$$h(\xi) = e^{-\xi} + \xi - 1 \qquad (2.17)$$

ונחשב את $Z(t)$.

$$Z(t) = \left[1 \quad (t_f - t) \quad \tau_e^2 h((t_f - t)/\tau_e) \quad -\tau_p^2 h((t_f - t)/\tau_p)\right]\cdot[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

$$Z(t) = x_1 + (t_f - t)\,x_2 + \tau_e^2 h\big((t_f - t)/\tau_e\big)x_3 - \tau_p^2 h\big((t_f - t)/\tau_p\big)x_4 \qquad 2.18)$$

כעת נגזור את משתנה החדש שקיבלנו, Z, לפי הזמן.

$$\dot{Z}(t) = \dot{x}_1 - x_2 + (t_f - t)\,\dot{x}_2 + \tau_e^2 \dot{h}\left(\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) x_3 + \tau_e^2 h\left(\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) \dot{x}_3 - \tau_p^2 \dot{h}\left(\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) x_4 - \tau_p^2 h\left(\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) \dot{x}_4$$

$$= x_2 - x_2 + (t_f - t)\,(x_3 - x_4) + \tau_e\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) - 1\right) x_3 + \tau_e\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) + \frac{t_f - t}{\tau_e} - 1\right)(a_e^c - x_3) - \tau_p\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) - 1\right) x_4 - \tau_p\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) + \frac{t_f - t}{\tau_p} - 1\right)(a_p^c - x_4)$$

$$= \tau_e\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) + \frac{t_f - t}{\tau_e} - 1\right) a_e^c - \tau_p\left(exp\left(-\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) + \frac{t_f - t}{\tau_p} - 1\right) a_p^c$$

$$\dot{Z} = \tau_e h\left(\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) a_e^c - \tau_p h\left(\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) a_p^c$$

$$\dot{Z} = -\tau_p h\left(\frac{t_f - t}{\tau_p}\right) a_p^{\max} u + \tau_e h\left(\frac{t_f - t}{\tau_e}\right) a_e^{\max} v \tag{2.19}$$

כפי שהזכרנו קודם לכן, Z מייצג את מרחק ההחטאה, ולכן כאשר אין בקרות לשני הגופים, $u(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$, נקבל כי Z קבוע לאורך טווח הזמן $[t_1\ t_f]$, $0 < t_1 \leq t_f$.

מנוסחה 2.15 מתקבל כי $z(t_f) = x_1(t_f)$.

לצורך הנוחיות נגדיר את היחסים הבאים: יחס התמרון בין הרודף והנרדף - $\mu = a_p^{\max}/a_e^{\max}$ ויחס קבועי הזמן של הרודף והנרדף $\epsilon = \tau_e/\tau_p$. מכפלה של שני הגורמים הללו $\mu\epsilon$ נותנת לנו את יחס הזריזות בין הרודף והנרדף, כלומר מהו עד מהו היחס בין יכולת התמרון שלכל אחד מהם בזמן קצר.
את המשוואה הדיפרנציאלית שקיבלנו ניתן לנרמל למשוואה חסרת יחידות על ידי הגדרת משתנה בלתי תלוי חדש

$$\tau = (t_f - t)/\tau_p \tag{2.20}$$

ומשתנה מצב חדש שמנרמל את ה *zero-effort miss distance*,

$$z = Z/({\tau_p}^2 a_e^{\max}). \tag{2.21}$$

נחשב את הגורמים הבאים:

$$t = t_f - \tau\tau_p$$

$$\frac{dt}{d\tau} = -\tau_p$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{{\tau_p}^2 a_e^{\max}} \cdot \frac{dZ}{d\tau} = \frac{1}{{\tau_p}^2 a_e^{\max}} \cdot \frac{dZ}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-1}{\tau_p a_e^{\max}} \cdot \frac{dZ}{dt}$$

לאחר הנרמול נקבל את המשוואה

$$\frac{dz}{d\tau} = h_1(\tau)u - h_2(\tau)v \tag{2.22}$$

כאשר

$$h_1(\tau) = \mu(\exp(-\tau) + \tau - 1) = \mu h(\tau) \tag{2.23}$$

$$h_2(\tau) = \epsilon(\exp(-\tau/\epsilon) + \tau/\epsilon - 1) = \epsilon h(\tau/\epsilon) \tag{2.24}$$

ומתקיים

$$\tau_0 = t_f/\tau_p\ , \qquad z(\tau_0) = z_0 = x_{20}\tau_0/(\tau_p a_e^{\max}) \tag{2.25}$$

$$z(0) = x_1(t_f)/(\tau_p^2 a_e^{\max}) \tag{2.26}$$

כאשר כעת הבקרות $u(t)$ ו- $v(t)$ הופכות ל $u(t_f - \tau_p\tau)$ ו- $v(t_f - \tau_p\tau)$ ולכן ניתן לתאר אותן כפונק' של המשתנה τ, $u(\tau)$ ו-$v(\tau)$, כאשר מתקיימים התנאים :

$$|v(\tau)| \le 1, \quad 0 \le t \le \tau_0 \tag{2.27}$$

$$|u(\tau)| \le 1, \quad 0 \le t \le \tau_0 \tag{2.28}$$

מטרת הרודף היא להבטיח כי מרחק ההחטאה, $|x_1(t_f)|$, יהיה קטן ככל הניתן ולשם כך להתאים את הבקרה שלו $u(t)$ כנגד בקרת הנרדף $v(t)$.

1.3 הגדרת הבעיה

לאחר שהגדרנו את המודל של רודף-נרדף, ראינו גם כי מטרת הרודף להתאים את הבקרה שלו להקטנת z.

לצורך העניין נבחר בקרת רודף מהצורה הבאה,

$$.u = A\tau^{-\alpha}z \quad , \quad A > 0 \quad , \alpha > 0 \tag{2.29}$$

כאשר עבור בקרת הנרדף נניח את המקרה הקיצוני ביותר

$$.v = 1 \tag{2.30}$$

בפרק הקודם ראינו כי

$$\exp(-\tau) + \tau - 1 = -1 + \tau + \left(1 - \tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots$$

בשלב ראשון ניקח רק את הגורם הראשון של הטור וננסה לפתור את המשוואה, לאחר מכן נוסיף גם את הגורמים הנוספים.כתוצאה מכך המשוואה שנקבל היא

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= \mu\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)A\tau^{-\alpha}z \\ &\quad - \epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!} + \frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{2.31}$$

כאשר $\alpha \geq 3$ (כפי שנדרש במאמר של פרופ' גליזר וטורצקי, מקור מס' 1 בבבליוגרפיה) נקבל את הנקודה הסינגולרית $\tau = 0$. על מנת לנסות למצוא פיתרון למשוואה זו סביב הנקודה הסינגולרית יש להכיר כמה מושגים כגון נק' רגולרית, סינגולרית רגולרית וסינגולרית אי רגולרית ואת הדרכים לפתרון משוואה דיפרנציאלית בנק' אלו.לאחר שנבחן את הדרכים הללו נחזור לבעיה במטרה לפתור אותה.

2 רקע תיאורטי

2.1 פתרון משוואות דיפרנציאליות ע"י שימוש בטורי חזקות

נניח משוואה דיפרנציאלית כללית מסדר שני :

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad a_2 \neq 0 \qquad (3.1)$$

נעביר את המשוואה לצורה הסטנדרטית :

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (3.2)$$

על ידי חלוקה במקדם המוביל $a_2(x)$.

כעת נגדיר את ההגדרה הבאה :

<u>נק׳ רגולרית ונק׳ סינגולרית</u> : נק׳ x_0 מוגדרת *נק׳ רגולרית (regular point)* של המשוואה הדיפרנציאלית (3.1), אם גם $P(x)$ וגם $Q(x)$בהצגה הסטנדרטית (3.2) הן אנליטיות בנק׳ x_0 . נק׳ שאינה עונה להגדרה זו נקראת *נק׳ סינגולרית (singular point)* של המשוואה.

<u>דוגמאות</u> :

א. עבור המשוואה הבאה : $y'' + (e^x)y' + (\sin x)y = 0$, כל ערך סופי של x הוא נק׳ רגולרית של המשוואה, ובפרט $x = 0$.

ב. עבור המשוואה $y'' + (e^x)y' + (\ln x)y = 0$, הנק׳ $x = 0$ היא נק׳ סינגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית וזאת מכיוון שהפונק׳ $\ln x$ אינה רציפה בנק׳ זו.

מקדמים פולינומיאלים–נדון במקרה שמקדמי המשוואה הדיפרנציאלית (3.1) הן פולינומים. את מקרה זה ניתן להכליל מאוחר יותר למקרים שהמקדמים הן פונקציות שונות, וזאת מכיוון שניתן יהיה לרשום את הפונקציות האלו כטור חזקות. פונקציות פולינומיאליות הן אנליטיות לכל x ופונקציות רציונאליות המוגדרות כחלוקה בין שני פולינומים הן אנליטיות מלבד נק׳ הקטבים (בהן המכנה מתאפס). לכן כאשר המקדמים a_2, a_1 ו- a_3 הם פולינומיאלים ללא גורמים משותפים, הפונקציות הרציונאליות $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$ ו- $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ אנליטיות מלבד הנק׳ בהן $a_2(x) = 0$. לכן עבור מקדמים פולינומיאלים הנק׳ $x = x_0$ היא נק׳ רגולרית של (3.1) אם $a_2(x_0) \neq 0$ בעוד $x = x_0$ היא נק׳ סינגולרית של (3.1) אם$a_2(x_0) = 0$.

<u>דוגמה</u> : הנק׳ הסינגולריות של המשוואה $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ הן פתרונות המשוואה $x^2 - 1 = 0$., כלומר $x_0 = \pm 1$.

2.1.1 משפט בדבר קיום פתרון למשוואה הדיפרנציאלית בצורת טור חזקות (ללא הוכחה):

אם $x = x_0$ היא נקי רגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית (3.1), ניתן תמיד למצוא שני פתרונות בלתי תלויים לינארית בצורת טור חזקות סביב הנקי x_0, כך ש

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \qquad (3.3)$$

טור זה מתכנס לפחות בתחום $|x - x_0| < R$, כאשר R הוא המרחק בין x_0 לנקי הסינגולרית הקרובה ביותר אליה.

<u>דוגמה</u>: הנקודות במישור המרוכב $x = 1 \pm 2i$ הן נקי סינגולריות של המשוואה $(x^2 - 2x + 5)y'' + xy - y = 0$. בעקבות משפט 1.1 נוכל לומר קיימים שני טורי חזקות המהווים פתרון למשוואה זו סביב הנקי הרגולרית $x = 0$. כל אחד מהפתרונות הוא מן הצורה: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. כמו כן ידוע לנו גם כי כל אחד מהטורים מתכנס לפחות עבור $|x| < \sqrt{5}$, מכיוון ש $R = \sqrt{5}$ הוא המרחק של הנקי הסינגולריות מהנקי סביבה אנו מפתחים את הטור.

מכאן ואילך נתייחס לטור החזקות סביב הנקי הרגולרית $x_0 = 0$ בלבד, וזו מן הסיבה שכאשר נדרש לפתח טור חזקות לנקי $x_0 \neq 0$, ניתן להגיע על ידי הצבה פשוטה: $t = x - x_0$ לפתרון מהצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, ולאחר מכן ניתן להציב בפתרון בחזרה את $t = x - x_0$. כמובן שיש לשים לב לתחומי התכנסות הטור כאשר עושים החלפת משתנים.

2.1.2 דרך מציאת הפתרון למשוואה הדיפרנציאלית לפי פיתוח לטור חזקות

באופן כללי הדרך לפתרון המשוואה הדיפרנציאלית היא באופן הבא: מניחים על סמך המשפט שקיים פתרון למשוואה בצורת טור חזקות $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. מציבים את הפתרון במשוואה ומשווים את המקדמים של החזקות בשני אגפי המשוואה. מן הסתם במשוואה הומוגנית אגף ימין הינו אפס ולכן נדרוש שסכום המקדמים של כל גורם יהיה אפס.

<u>דוגמה</u>: נמצא פתרון למשוואת איירי: $y'' + xy = 0$.

מכיוון שלא קיימות נקודות סינגולריות עבור משוואה זו מובטח לנו שקיימים שני פתרונות בלתי תלויות לינארית, המיוצגים ע"י טורי חזקות סביב הנקי $x_0 = 0$ ומתכנסים לכל $|x| < \infty$. נקח את הפתרון $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ונחשב עבורו את הנגזרת השניה: $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$. נציב במשוואה הדיפרנציאלית:

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k$$

קיבלנו את המשוואה הבאה :

$$y'' + xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k = 0$$

נשווה את המקדמים של החזקות: $(k+1)(k+2)c_{k+2} + c_{k-1} = 0$ $\qquad c_2 = 0,$

כעת קיבלנו משוואה רקורסיבית : $k = 1,2,3 \ldots ..$, $\quad c_{k+2} = -\frac{c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$

נחשב כעת את המקדמים הראשונים של הטור :

$k = 1$ $\qquad c_3 = -\dfrac{c_0}{2 \cdot 3}$

$k = 2$ $\qquad c_4 = -\dfrac{c_1}{3 \cdot 4}$

$k = 3$ $\qquad c_5 = -\dfrac{c_2}{4 \cdot 5} = 0$

$k = 4$ $\qquad c_6 = -\dfrac{c_3}{5 \cdot 6} = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} c_0$

$k = 5$ $\qquad c_7 = -\dfrac{c_4}{6 \cdot 7} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} c_1$

$k = 6$ $\qquad c_8 = -\dfrac{c_5}{7 \cdot 8} = 0$

$k=7 \qquad c_9 = -\frac{c_6}{8\cdot 9} = \frac{-1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}c_0$

$k=8 \qquad c_{10} = -\frac{c_7}{9\cdot 10} = \frac{-1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}c_1$

$k=9 \qquad c_{11} = -\frac{c_8}{10\cdot 11} = 0$

נציב את המקדמים שמצאנו בטור:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1x + 0 - \frac{c_0}{2\cdot 3}x^3 - \frac{c_1}{3\cdot 4}x^4 + 0 + \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + 0 - \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9 - \frac{c_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10} + 0 + \cdots$$

לאחר סיכום של הגורמים המכילים את c_0 והגורמים המכילים את c_1 נקבל את הפתרון: $y = c_0y_1(x) + c_1y_2(x)$ כאשר:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot 3\cdots(3k-1)(3k)}x^{3k}$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}x^{10} + \cdots = x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3\cdot 4\cdots(3k)(3k+1)}x^{3k+1}$$

2.2 פתרון משוואות בעלות מקדמים שאינם פולינומיאלים:

לאחר שראינו איך פותרים משוואה דיפרנציאלית עם מקדמים פולינומיאלים בעזרת פיתוח לטור חזקות, ניתן לפתור גם משוואות שמקדמיהן אינם פולינומיאלים וזאת על ידי הצגת המקדמים כטור חזקות.

דוגמה: נמצא פתרון למשוואה $y'' + (\cos x) \cdot y = 0$.

הפונק׳ $\cos x$ אנליטית בנק׳ $x_0 = 0$ ולכן נק׳ זו היא נק׳ רגולרית של המשוואה. את הפונק׳ $\cos x$ נייצג באמצעות טור מקלורן שלה ונניח כמו כן שפתרון המשוואה הוא: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. את הנגזרת השניה כבר חישבנו בדוגמה הקודמת. נציב במשוואה ונקבל:

$$y'' + (\cos x)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots$$
$$+ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots)$$

$$= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \cdots = 0$$

מהשוואת מקדמים נקבל את אוסף המשוואות הבאות:

$$2c_2 + c_0 = 0, \qquad 6c_3 + c_1 = 0, \qquad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \qquad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0$$

ממשוואות אלו יוצאים המקדמים: $c_2 = -\frac{1}{2}c_0,\ c_3 = -\frac{1}{6}c_1,\ c_4 = \frac{1}{12}c_0,\ c_5 = \frac{1}{30}c_1, \ldots$

כך שהפתרון הכללי של המשוואה הוא: $y = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x)$. כאשר:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots, \qquad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots$$

2.3 פתרון משוואות דיפרנציאליות בנק' סינגולרית רגולרית ע"י פיתוח לטור חזקות

עד כה ראינו הבדלנו בין נק׳ רגולריות של משוואה דיפרנציאלית מסדר שני ונק׳ סינגולריות שלה. כעת נראה כי גם את הנקודות הסינגולריות ניתן לסווג.

הגדרה: נק׳ סינגולרית x_0 נקראת *נק׳ סינגולרית רגולרית (regular singular point)* של המשוואה הדיפרנציאלית (3.2) אם הפונקציות $p(x) = (x - x_0)P(x)$ ו- $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ שתיהן

אנליטיות בנק׳ x_0. אחרת, הנק׳ הסינגולרית נקראת *נק׳ סינגולרית לא רגולרית* (*irregular singular point*) או – אי רגולרית.

במילים אחרות, מהתבוננות במשוואה ניתן לראות אם קיים לפונק׳ $P(x)$ קוטב מסדר גדול מ-1 או לפונק׳ $Q(x)$ קוטב מסדר גדול מ- 2 בנק׳ x_0 , אזי הנק׳ היא נק׳ סינגולרית אי-רגולרית.

<u>דוגמה</u> : נתבונן במשוואה הבאה : $(x^2-4)^2y''+3(x-2)y'+5y=0$.

לאחר חלוקה במקדם המוביל : $(x^2-4)^2=(x-2)^2(x+2)^2$ נקבל משוואה בעלת המקדמים הבאים :

$$P(x)=\frac{3}{(x-2)(x+2)^2} \qquad Q(x)=\frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

נבחן את הנק׳ $x=2$:

$$p(x)=(x-2)\frac{3}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}\ ,\quad q(x)=(x-2)^2\frac{5}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

שתי הפונק׳, $p(x)$ ו-$q(x)$ אנליטיות בנק׳ $x=2$. לכן נק׳ זו היא נק׳ סינגולרית רגולרית של המשוואה.

נבחן כעת את הנק׳ $x=-2$: $p(x)=(x+2)P(x)=\frac{3}{(x-2)(x+2)}$ אינה אנליטית בנק׳ זו.ולכן נקודה זו היא נק׳ סינגולרית אי-רגולרית לש המשוואה. אין זה משנה שפונק׳ $q(x)$ אנליטית בנקודה זו מכיוון שעל מנת שהנק׳ תהיה רגולרית יש צורך ששתי הפונקציות יהיו אנליטיות בנק׳.

<u>שיטת פרובניוס (*Frobenius*)</u> : אם x_0 היא נק׳ סינגולרית רגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית (3.1), אזי קיים למשוואה לפחות פתרון אחד מהצורה

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r} \tag{3.4}$$

,

כאשר r הוא קבוע והטור מתכנס לפחות בקטע $0<x-x_0<R$.

הפתרון באמצעות שיטת פרוביניוס דומה לדרך בה פתרנו משוואה דיפרנציאלית בנק׳ רגולרית, כאשר כעת מלבד מציאת המקדמים יש גם צורך למצוא את הקבוע r.

עבור פתרון משוואה דיפרנציאלית בנק׳ סינגולרית ישנם שלושה מקרים, על מנת להקל על הבנת המקרים נציג קודם מספר דוגמאות.

<u>דוגמה א׳ – פתרון בעל שני טורים</u>:

נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $3xy'' + y' - y = 0$, בנק׳ הסינגולרית רגולרית $x = 0$ ע״י שימוש בשיטת פרוביניוס. נחפש פתרון מהצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. נציב בנגזרת הראשונה והשניה

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

נציב את הנגזרות במשוואה:

$$3xy'' + y' - y$$

$$= 3x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= x^r[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n]$$

$$= x^r\left[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k]x^k\right] = 0$$

ע״י השוואת מקדמים נקבל את המשוואות הבאות: $r(3r-2)c_0 = 0$

$$(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k = 0 \quad , k = 0,1,2 \ldots$$

עבור המשוואה הראשונה מבין השתיים, אין תועלת אם נבחר $c_0 = 0$, ולכן שתי המשוואות המתקבלות הן:

$$r(3r-2) = 0$$

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)} \quad , \quad k = 0,1,2 \ldots$$

נקבל אם כך מהמשוואה הראשונה$r_2 = 0$, $r_1 = \frac{2}{3}$. נציב כל אחד מהפתרונות שקיבלנו במשוואה השניה.

$$r = \frac{2}{3}\,, \qquad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+5)(k+1)}\,, \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

$$r = 0\,, \qquad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}\,, \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

$r_1 = \frac{2}{3}$	$r_2 = 0$
$c_1 = \frac{c_0}{5 \cdot 1}$ $c_2 = \frac{c_1}{8 \cdot 2} = \frac{c_0}{2!\,5 \cdot 8}$ $c_3 = \frac{c_2}{11 \cdot 3} = \frac{c_0}{3!\,5 \cdot 8 \cdot 11}$ $c_4 = \frac{c_3}{14 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}$ $\vdots$ $c_n = \frac{c_0}{n!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$	$c_1 = \frac{c_0}{1 \cdot 1}$ $c_2 = \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2!\,1 \cdot 4}$ $c_3 = \frac{c_2}{3 \cdot 7} = \frac{c_0}{3!\,1 \cdot 4 \cdot 7}$ $c_4 = \frac{c_3}{4 \cdot 10} = \frac{c_0}{4!\,1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}$ $\vdots$ $c_n = \frac{c_0}{n!\,1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n-2)}$

קיבלנו אם כך שני פתרונות למשוואה:

$$y_1(x) = x^{\frac{2}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^n\right]$$

$$y_2(x) = x^0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}x^n\right]$$

שני הפתרונות שקיבלנו הם בלתי תלויים לינארית ולכן הצירוף הלינארי שלהם מהווה את הפתרון הכללי:

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ בתחום שאינו כולל את הראשית.

<u>המשוואה האינדיציאלית (*indical equation*)</u>- המשוואה שבאמצעותה ניתן למצוא את האינדקס r עבור שיטת פרובניוס נקראת המשוואה האינדיציאלית.כאשר r_1 ו- r_2 נקראים השורשים האינדיציאלים (*indicial roots*) או אקספוננטים (*exponents*).

אם הנקי $x = 0$היא נקי סינגולרית רגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית אזי על פי ההגדרה הפונקציות $p(x) = xP(x)$ ו- $q(x) = x^2Q(x)$ הן אנליטיות בנקי $x = 0$. כלומר ניתן לרשום אותן כטורי חזקות $p(x) = xP(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ו- $q(x) = x^2Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$

המתכנסים ברדיוס ההתכנסות סביב הנקי.

נכפיל את המשוואה הדיפרנציאלית בגורם x^2 ונקבל:

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0$$

לאחר שמציבים במשוואה את $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$ מקבלים את המשוואה האינדיציאלית הכללית:

$$r(r-1) + a_0r + b_0 = 0$$

<u>דוגמה ב׳ – פתרון בעל שני טורים</u>:

נחפש פתרון למשוואה $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$.

לאחר הצבה של $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r}$ במשוואה נקבל:

$$\begin{aligned}2xy'' + (1+x)y' + y &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_nx^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r-1}\\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_nx^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)c_n x^{n+r}$$

$$= x^r \left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1)c_n x^{n-1} \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)c_n x^n \right]$$

$$= x^r \left[r(2r-1)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k] x^k \right]$$

מתקבלת אם כך המשוואה האינדיציאלית הבאה: $r(2r-1) = 0$.

והמשוואה, $k = 0,1,2\ldots$, $(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1} + (k+r+1)c_k = 0$.

השורשים שנקבל מהמשוואה האינדיציאלית הם: $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 0$

את המשוואה הרקורסיבית נחלק בגורם $(k+r+1)$, ונקבל $c_{k+1} = -\frac{c_k}{2k+2r+1}$. נציב את השורשים,

עבור $r = \frac{1}{2}$, $k = 0,1,2\ldots$, $c_{k+1} = -\frac{c_k}{2(k+1)}$.

ועבור $r = 0$, $k = 0,1,2\ldots$, $c_{k+1} = -\frac{c_k}{2k+1}$.

נחשב את המקדמים כתלות באקספוננטים:

$r_1 = \frac{1}{2}$	$r_2 = 0$
$c_1 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}$ $c_2 = \frac{-c_1}{2 \cdot 2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$ $c_3 = \frac{-c_2}{2 \cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3 \cdot 3!}$ $c_4 = \frac{-c_3}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 4!}$ $\vdots$	$c_1 = \frac{-c_0}{1 \cdot 1}$ $c_2 = \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1 \cdot 3}$ $c_3 = \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5}$ $c_4 = \frac{-c_3}{7} = \frac{c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$ $\vdots$

$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n \cdot n!}$	$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}$

קיבלנו אם כן שני פתרונות למשוואה:

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{n+\frac{1}{2}}$$

פתרון זה מתכנס עבור $x \geq 0$ וזאת עקב הגבלת תחום ההגדרה של השורש הריבועי.

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} x^n, \qquad |x| < \infty$$

בקטע $(0, \infty)$ הפתרון הכללי הוא $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

<u>דוגמה ג' – פתרון בעל טור אחד</u>:

נחפש פתרון למשוואה $xy'' + y = 0$.

במקרה זה: $xP(x) = 0$ ו- $x^2Q(x) = x$. ומכיוון ש 0 ו- x הם הפיתוח של עצמם לטור חזקות, מובטח לנו כי $a_0 = 0$ וגם $b_0 = 0$. מכאן הופכת המשוואה האינדציאלית ל $r(r-1)$ והשורשים הם: $r_1 = 1 , r_2 = 0$.

לאחר הצבה של $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ במשוואה נקבל:

$$xy'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]$$

$$= x^r \left[r(r-1) c_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right]$$

$$= x^r \left[r(r-1) c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(k+r) c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right]$$

$$= x^r\left[\,r(r-1)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(k+r)c_{k+1}+c_k]x^k\,\right]$$

מתקבלת אם כך המשוואה האינדיציאלית הבאה: $r(r-1)=0$.

והמשוואה, $k=0,1,2\ldots$, $(k+r+1)(k+r)c_{k+1}+c_k=0$.

ונקבל $c_{k+1}=-\frac{c_k}{(k+r+1)(k+r)}$. נציב את השורשים,

עבור $r=1$, $k=0,1,2\ldots$, $c_{k+1}=-\frac{c_k}{(k+2)(k+1)}$.

$$c_1=\frac{-c_0}{2\cdot 1}$$

$$c_2=\frac{-c_1}{3\cdot 2}=\frac{c_0}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}$$

$$c_3=\frac{-c_2}{4\cdot 3}=\frac{-c_0}{4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}$$

$$c_4=\frac{-c_3}{5\cdot 4}=\frac{c_0}{5\cdot (4!)^2}$$

$$\vdots$$

$$c_n=\frac{(-1)^n c_0}{n!\,(n+1)!}$$

ועבור $r=0$, $k=0,1,2\ldots$, $c_{k+1}=-\frac{c_k}{k(k+1)}$.

כאן לא ניתן למצוא את מקדמי הטורים מכיוון שלא ניתן להגדיר את c_1 עבור הטור. בהמשך נראה כיצד למצוא את הפתרון השני. כך הפיתרון שיש בידינו בינתיים הוא:

$$y_1(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}x^{n+1}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{144}x^4+\cdots$$

2.3.1 שלושה מקרים עבור נקודה סינגולרית רגולרית

עבור נק' סינגולרית רגולרית של המשוואה הדיפרנציאלית (3.1)ב- $x=0$, ואקספוננטים ממשיים r_1 ו- r_2, כאשר משתמשים בפתרון המשוואה בשיטת פרובניוס ניתן לסווג את צורת הפיתרון לשלושה מקרים כתלות באקספוננטים r_1 ו- r_2. בשני המקרים הראשונים נניחש r_1 הוא האקספוננט הגדול מבין השניים. כלומר $r_1>r_2$ ובמקרה השלישי שני האקספוננטים שווים $r_1=r_2$.

<u>מקרה א'</u>

כאשר r_1 ו- r_2 שונים זה מזה וההפרש $r_1 - r_2$ אינו מספר שלם, אזי קיימים שני פתרונות בלתי תלויים למשוואה (3.1) מהצורה הבאה

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \qquad c_0 \neq 0, \qquad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0 \tag{3.5}$$

זהו אכן המקרה שהובא בדוגמאות א' ו- ב'.

<u>מקרה ב'</u>

כאשר r_1 ו- r_2 שונים זה מזה וההפרש $r_1 - r_2 = N$ כאשר N הוא מספר שלם, אזי קיימים שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למשוואה (3.1) מהצורה הבאה (באחד מהפתרונות יתכן קיומו של גורם לוגריתמי)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \ c_0 \neq 0, \\ y_2(x) &= C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \qquad b_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

הקבוע C יכול להיות אפס וכך יעלם הגורם הלוגריתמי ואזי האי תלות לינארית הינה ברורה כמו במקרה א'. אחרת, על מנת להוכיח את האי תלות לינארית ניתן להציב את טור טיילור לגורם זה ולקבל חזקות גבוהות מאוד הגורמות לאי תלות.

<u>מקרה ג'</u>

כאשר r_1 ו- r_2 שווים זה לזה, $r_1 = r_2$, אזי קיימים שני פתרונות בלתי תלויים למשוואה (3.1) מהצורה הבאה (באחד מהפתרונות יהיה בהכרח גורם לוגריתמי)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \qquad c_0 \neq 0, \\ y_2(x) &= y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

2.3.2 מציאת הפתרון השני באמצעות ידיעת הפתרון הראשון

כאשר ההפרש $r_1 - r_2$ הוא מספר שלם (מקרה ב'), יתכן שנמצא שני פתרונות מהצורה $y =$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ ויתכן שנמצא רק פתרון אחד מהצורה הזו. כמובן לא ניתן לדעת מראש מה נקבל, אלא יש לבצע את כל תהליך הפתרון ורק אז נדע באיזה מקרה מדובר. אם נהיה ברי מזל, נקבל מן המשוואה הרקורסיבית שני פתרונות בצורת טורי פרובניוס,

$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_2}$ ו- $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$. אך יתכן ששיטת פרובניוס תיתן לנו רק פתרון אחד בצורת הטור (דוגמה ג'). כלומר הפתרון השני יהיה בעל גורם לוגריתמי עם מקדם $C \neq 0$.

כאשר $r_1 - r_2 = 0$ (מקרה ג'), שיטת פרובניוס תכשל תמיד במציאת שני פתרונות בצורת הטור והפתרון השנייכלול תמיד גורם לוגריתמי שהמקדם שלו $C = 1$. אחת הדרכים למצוא את הפתרון השני באמצעות הפתרון הראשון הידוע היא להשתמש בעובדה ש$y_2(x) = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$. היא גם כן פתרון למשוואה$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

<u>דוגמה ד'</u>

נפתור את המשוואה $xy'' + y = 0$.

בדוגמה ג' ראינו כי אחד הפתרונות למשוואה הוא

$$y_1(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$$

נציב את הפתרון שקיבלנו במשוואה למציאת הפתרון השני. התהליך הינו סיזיפי וארוך הכולל חישוב חזקה ריבועית של הטור, חילוק ארוך ואינטגרציה ולכן לרוב אינו מומלץ לפתרון באופן ידני אך ניתן בקלות לפתור באמצעות שימוש בתוכנות המיועדות לכך.

$$y_2(x) = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

$$= y_1(x) \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots\right)^2} =^* y_1(x) \int \frac{dx}{x^2 - x^3 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{7}{72}x^5 + \cdots}$$

$$=^{**} y_1(x) \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{7}{12} + \frac{19}{72}x + \cdots\right] dx = y_1(x) \left[-\frac{1}{x} + \ln x + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right]$$

$$= y_1(x)\ln x + y_1(x)\left[-\frac{1}{x} + \frac{7}{12}x + \frac{19}{144}x^2 + \cdots\right] =^{***} y_1(x)\ln x$$
$$+\left[-1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right]$$

*חישוב החזקה הריבועית. **חילוק ארוך ***הצבת $y_1(x)$ שקיבלנו בביטוי.

בקטע $(0,\infty)$ הפתרון הכללי הוא $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. כאן ניתן לראות ששני הפתרונות שקיבלנו תואמים את הפתרונות של מקרה ב׳ כאשר $C = 1, r_1 = 1$ ו- $r_2 = 0$.

2.4 מציאת הפתרון בנקודה סינגולרית אי רגולרית

הפתרונות סביב נקודה סינגולרית אי רגולרית מתאפיינים בדבר אחד: הפתרון הוא בדרך כלל פונקציה אקספוננציאלית מוכפלת בטור פרובניוס. כתוצאה מהמכפלה במקדם האקספוננציאלי, הפתרון יכול להתנהג באופנים שונים. הוא יכול להתכנס באופן אקספוננציאלי, להתבדר אקספוננציאלית ואף לעשות תנודות קיצוניות.

נתבונן קודם במקרה הפשוט של משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון

$$y'(x) + p(x)y = 0. \tag{3.8}$$

הפתרון של משוואה זו הוא ידוע

$$y(x) = ce^{-P(x)}, \tag{3.9}$$

כאשר

$$P(x) = \int p(x)dx \tag{3.10}$$

ו- c הוא קבוע. אם ל $p(x)$ יש קוטב מסדר $(k+1)$ בנק׳ $x = 0$, אזי קיים טור לורן

$$p(x) = \frac{b_{k+1}}{x^{k+1}} + \cdots + \frac{b_1}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \tag{3.11}$$

נמצא אם כן, את פתרון המשוואה. אינטגרציה על $p(x)$ תתן לנו

$$P(x) = -\frac{b_{k+1}}{kx^k} + \cdots + b_1\ln x + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \cdots \tag{3.12}$$

לכן פתרון המשוואה יהיה מהצורה

$$y(x) = ce^{-P(x)} = c \cdot \exp\left(\frac{b_{k+1}}{kx^k} + \cdots - b_1 \ln x - a_0 x - \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots\right)$$

$$= c \cdot \exp\left(\frac{b_{k+1}}{kx^k} + \cdots\right) x^{-b_1} \exp\left(-a_0 x - \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots\right)$$

$$y(x) = \exp\left(\frac{b_{k+1}}{kx^k} + \cdots\right) x^{-b_1} M(x) \qquad (3.13)$$

כאשר$M(x)/c$ הוא טור מקלורן. ניתן לראות כי הגורם $x^{-b_1}M(x)$, הוא בעצם טור פרובניוס.

2.4.1 הסדר של נק' סינגולרית אי רגולרית

כעת נעבור לפתרון משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני סביב נקודה סינגולרית אי רגולרית. נתבונן במשוואה הכללית (3.2). נניח שהנק' x_0 היא נק' סינגולרית אי רגולרית של משוואה זו. אם שתי הפונקציות

$$(x - x_0)^{k+1} P(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots$$

$$(x - x_0)^{2(k+1)} Q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots$$

הן טורי טיילור מתכנסים ולפחות אחד מהמקדמים p_0 או q_0 שונה מאפס, אזי הנק' x_0 היא נק' סינגולרית אי רגולרית מסדר k. אם הסדר של הקוטב של $P(x)$ושל $Q(x)$ הוא $(k_1 + 1)$ ו-$(2k_2 + 2)$ בהתאמה, כאשר $k_1 \neq k_2$, אזי הסדר k הוא הגדול מבין k_1, k_2. ניתן לראות כי כאשר $k = 0$ מתקבל המקרה של נק' סינגולרית רגולרית.

עבור נק' סינגולרית אי רגולרית מסדר k, $k \in \mathbb{N}$, אזי הפיתרון למשוואה הוא מהצורה

$$y(x) = \exp[F(x)]\, Y(x), \qquad (3.14)$$

כאשר

$$F(x) = \frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x - x_0} \qquad (3.15)$$

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}. \qquad (3.16)$$

הפונק' $Y(x)$ היא בעצם טור פרובניוס.

<u>דוגמה</u> : נמצא פתרון למשוואה הבאה

$$y'' + x^{-4}y = 0$$

עבור ערכים קרובים מאוד לנקי' הסינגולרית $x = 0$. ניתן לראות כי נקי' זו היא נקי' סינגולרית אי רגולרית מסדר 1. ולכן בסביבת הנקי' סינגולרית הפתרון הוא מהצורה

$$y = \exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y(x)$$

כאשר

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

נחשב את הנגזרות

$$y' = -\frac{A_1}{x^2}\exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y(x) + \exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y'(x)$$

$$y'' = \left(\frac{2A_1}{x^3}\exp\left(\frac{A_1}{x}\right) + \frac{A_1^2}{x^4}\exp\left(\frac{A_1}{x}\right)\right) Y(x) - \frac{A_1}{x^2}\exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y'(x) - \frac{A_1}{x^2}\exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y'(x) + \exp\left(\frac{A_1}{x}\right) Y''(x)$$

$$= \exp\left(\frac{A_1}{x}\right)\left(Y''(x) - \frac{2A_1}{x^2}Y'(x) + \left(\frac{2A_1}{x^3} + \frac{A_1^2}{x^4}\right) Y(x)\right)$$

נציב במשוואה הדיפרנציאלית ונקבל:

$$\exp\left(\frac{A_1}{x}\right)\left(Y''(x) - \frac{2A_1}{x^2}Y'(x) + \left(\frac{2A_1}{x^3} + \frac{A_1^2}{x^4}\right) Y(x) + \frac{1}{x^4}Y(x)\right) = 0$$

$$Y''(x) - \frac{2A_1}{x^2}Y'(x) + \left(\frac{2A_1}{x^3} + \frac{A_1^2 + 1}{x^4}\right) Y(x) = 0$$

נגדיר את A_1 על ידי איפוס הגורם ששואף לאינסוף הכי מהר. לכן נדרוש כאן את איפוס המקדם של x^{-4}.

$$A_1^2 + 1 = 0$$

$$A_1 = \pm i$$

נבחר את השורש $A_1 = i$ ונציב במשוואה שקיבלנו

$$Y''(x) - \frac{2i}{x^2}Y'(x) + \frac{2i}{x^3}Y(x) = 0$$

$$x^3Y''(x) - x2iY'(x) + 2iY(x) = 0$$

כאשר,

$$Y'(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \quad , \quad Y''(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

כלומר המשוואה המתקבלת היא

$$x^3\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2} - x2i\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + 2i\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r\left[\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+1} - 2i\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^n + 2i\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right] = 0$$

$$x^r\left[\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+1} + 2i\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(1-n-r)c_n x^n\right] = 0$$

$$x^r\left[2i(1-r)c_0 + \sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+1} + 2i\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(1-n-r)c_n x^n\right] = 0$$

$$x^r\left[2i(1-r)c_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}(k+r-1)(k+r-2)c_{k-1}x^k + 2i\sum\nolimits_{k=1}^{\infty}(1-k-r)c_k x^k\right] = 0$$

$$x^r\left[2i(1-r)c_0 + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}[(k+r-1)(k+r-2)c_{k-1} + 2i(1-k-r)c_k]x^k\right] = 0$$

מהשוואת המקדם של x^r, נקבל את המשוואה האינדיציאלית:

$$1 - r = 0$$

$$.r = 1$$

מהשוואת שאר המקדמים נקבל את המשוואה הרקורסיבית

$$(k+r-1)(k+r-2)c_{k-1}+2i(1-k-r)c_k=0$$

ולאחר הצבת $r=1$,

$$k(k-1)c_{k-1}=2ikc_k$$

$$c_k=\frac{k-1}{2i}c_{k-1}$$

מהצבת $k=1$ במשוואה הרקורסיבית נקבל כי $c_1=0$, מסיבה זו גם כל האיברים הבאים יתאפסו. $c_2=c_3=\cdots=0$. כלומר במקרה זה קיבלנו $Y(x)=c_0x$.ואחד הפתרונות הבלתי תלויים שנקבל הוא

$$y_1(x)=x\cdot\exp\left(\frac{i}{x}\right)$$

עבור הפתרון השני של $A_1=-i$ נקבל את הפתרון השני הבלתי תלוי

$$y_2(x)=x\cdot\exp\left(-\frac{i}{x}\right)$$

ננסה לקבל פתרונות ממשיים מתוך הפיתרונות המרוכבים.

$$y_1(x)=x\left(\cos\frac{1}{x}+i\sin\frac{1}{x}\right)\quad,\quad y_2(x)=x\left(\cos\frac{1}{x}-i\sin\frac{1}{x}\right)$$

חיבור וחיסור של שני הפתרונות נותן את שני הפתרונות הממשיים הבלתי תלויים לינארית:

$$y_1(x)=x\cos\frac{1}{x}\quad,\quad y_2(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

3 פתרון משוואת המצב של רודף – נרדף סביב נקודה סינגולרית אי רגולרית ($3 < \alpha$)

לאחר שהתוודענו למשוואת המצב של רודף נרדף ולשיטות פתרון של משוואה דיפרנציאלית בנק' סינגולרית נחזור לבעיה בה אנו רוצים לעסוק. המשוואה הדיפרנציאלית אותה אנו מעונייניים לפתור היא

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)A\tau^{-\alpha}z - \epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!} + \frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!} + \cdots\right) \tag{4.1}$$

לשם מציאת הפתרון נצטרך למצוא את הפתרון למשוואה ההומוגנית ואת הפתרון הפרטי למשוואה האי-הומוגנית. לשם הנוחות נקבע את הסימונים הבאים :

$$f(\tau) = \mu\left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)A\tau^{-\alpha} \tag{4.2}$$

$$g(\tau/\epsilon) = -\epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!} + \frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!} + \cdots\right) \tag{4.3}$$

וכך נהפוך את המשוואה הדיפרנציאלית בה אנו עוסקים לצורה

$$\frac{dz}{d\tau} = f(\tau)z + g(\tau/\epsilon) \tag{4.4}$$

3.1 פתרון המשוואה ההומוגנית

נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית הבאה :

$$\frac{dz}{d\tau} - \mu\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)A\tau^{-\alpha}z = 0 \tag{4.5}$$

על מנת להקל בכתיבה נרשום את הפיתוח עבור $\alpha \in \mathbb{N}$ כדי שנוכל להשתמש בפעולת עצרת. בשאר המקרים הפיתוח זהה רק במקום פעולת העצרת יש לרשום מכפלות. על פי הסימון שקבענו ב (4.2) נחשב את

$$F(\tau) = -\int f(\tau)d\tau$$

$$= \mu A\left(-\frac{\tau^{3-\alpha}}{2!\,(3-\alpha)} + \frac{\tau^{4-\alpha}}{3!\,(4-\alpha)} - \frac{\tau^{5-\alpha}}{4!\,(5-\alpha)} + \cdots + \frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha-1)!}\ln\tau + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}\frac{1}{n(n+\alpha-1)!}\tau^{n}\right)$$

$$= \mu A\left(\sum_{n=3-\alpha}^{-1}(-1)^{n+\alpha}\frac{1}{n(n+\alpha-1)!}\tau^{n} + \frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha-1)!}\ln(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}\frac{1}{n(n+\alpha-1)!}\tau^{n}\right)$$

הפתרון של המשוואה ההומוגנית הוא

$$z_h(\tau) = C\cdot\exp(-F(\tau))$$

כאשר C הוא קבוע שרירותי.

$$z_h(\tau) = C\cdot\exp\left[\mu A\sum_{n=3-\alpha}^{-1}(-1)^{n+\alpha+1}\frac{1}{n(n+\alpha-1)!}\tau^{n}\right]\cdot\tau^{\frac{(-1)^{\alpha+1}\mu A}{(\alpha-1)!}}\cdot\exp\left[\mu A\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha+1}\frac{1}{n(n+\alpha-1)!}\tau^{n}\right] \quad 4.6)$$

ניתן לראות כי הפתרון מורכב ממכפלה של שלושה גורמים מרכזיים:

1. אקספוננט בעל חזקות שליליות.
2. τ בחזקה כלשהי.
3. אקספוננט בעל חזקות חיוביות.

כאשר בקרבת הנק' הסינגולרית $\tau = 0$, הגורם השלישי שואף לקבוע – 1 ובגורם הראשון, האיבר הדומיננטי ביותר הוא האיבר בעל החזקה הנמוכה ביותר$(3-\alpha)$. מכיוון שהסימן של איבר זה הוא שלילי, הוא גורם לאיפוס הגורם הראשון. אף על פי שהגורם השני יכול להיות בעל חזקה שלילית, הגורם הראשון מתגבר עליו בסביבת הנק' הסינגולרית. מכאן ניתן להסיק כי הפתרון של המשוואה ההומוגנית אכן שואף לאפס בצורה חזקה מאוד בקרבת הנקודה הסינגולרית נותר אם כן, לבחון את הפתרון הפרטי לבעיה.

3.2 פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית

בסעיף הקודם ראינו כי פתרון המשוואה ההומוגנית שואף לאפס בסביבת הנקודה הסינגולרית עקב מכפלה בגורם של אקספוננט של מינוס אינסוף. כעת, נמצא פתרון למשוואה האי-הומוגנית בצורת טור של חזקות חיוביות. אם כך, בקרבת הנקודה הסינגולרית, השאיפה של פתרון המשוואה ההומוגנית לאפס חזקה יותר מאשר שאיפת הפתרון הפרטי לאפס. מכיוון שכך, בקרבת הנקודה הסינגולרית הפתרון הפרטי מקרב בקירוב טוב את הפתרון של הבעיה. אם כן, יש חשיבות גדולה בפתרון הפרטי סביב הנק׳ הסינגולרית. מכיוון שאנו מתעניינים בפתרוןהבעיה בסביבת הנק׳ הסינגולרית, נזניח מכאן ואילך את הפתרון של המשוואה ההומוגנית ונתמקד במציאת הפתרון הפרטי.

3.3 פתרון המשוואה עבור גורמיםבקירוב מסדר שני ב $f(\tau)$ וב $g(\tau/\epsilon)$

בשלב ראשון, נשמיט את המקדמים של החזקות הגבוהות מ τ^2 בטורים המובאים במשוואה. ונקבל משוואה פשוטה יותר.

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu\frac{\tau^2}{2}A\tau^{-\alpha}z - \epsilon\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2} \qquad (4.7)$$

נגדיר את המקדמים: $a_1 = \mu A/2$ ו- $a_2 = 1/(2\epsilon)$ ונקבל את המשוואה

$$\tau^\alpha\frac{dz}{d\tau} = a_1\tau^2 z - a_2\tau^{2+\alpha} \qquad (4.8)$$

עבור $\alpha = 3$ נקבל כי $\tau = 0$ היא נק׳ סינגולרית רגולרית ועבור $\alpha > 3$ נקבל כי היא נק׳ סינגולרית אי-רגולרית. ננסה לחפש פתרון עבור הנק׳ הסינגולרית האי רגולרית.

מכיוון שהמשוואה אינה הומוגנית, נרשום את הפתרון כטור חזקות שרירותי ולא נגביל אותו לצורה מסוימת.

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\tau^{\beta_n} = c_0\tau^{\beta_0} + c_1\tau^{\beta_1} + c_2\tau^{\beta_2} + \cdots, \qquad c_n \neq 0, \quad 0 < \beta_n < \beta_{n+1} \qquad (4.9)$$

נחשב את הנגזרת של הטור,

$$\frac{dz}{d\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\beta_n\tau^{\beta_n-1} = c_0\beta_0\tau^{\beta_0-1} + c_1\beta_1\tau^{\beta_1-1} + c_2\beta_2\tau^{\beta_2-1} + \cdots \quad 4.10)$$

נציב את הטורים במשוואה,

$$\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1} + c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1} + \cdots\right) - a_1\left(c_0\tau^{\beta_0+2} + c_1\tau^{\beta_1+2} + c_2\tau^{\beta_2+2} + \cdots\right) + a_2\tau^{\alpha+2} = 0$$

נשווה את החזקות הנמוכות. יש 3 אפשרויות : $\tau^{\alpha+2},\tau^{\beta_0+2},\tau^{\beta_0+\alpha-1}$. אבל מכיוון שדרשנו $\alpha > 3$, מתקיים $\beta_0+\alpha-1 > \beta_0+3-1 = \beta_0+2$. ידוע גם כי $c_0 \neq 0$, לכן חייב להיות גורם נוסף בעל חזקה β_0+2. לא ניתן גם להשוות $\tau^{\beta_0+\alpha-1}$ ו- $\tau^{\alpha+2}$, כי אז נקבל $\beta_0 = 3$ קבוע. מאילוצים אלו נשווה את המקדמים של $\tau^{\alpha+2}$ ו - τ^{β_0+2}. נקבל כי

$$\begin{cases}\beta_0+2=\alpha+2\\ a_1c_0=a_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_0=\alpha\\ c_0=a_2/a_1\end{cases} \tag{4.11}$$

לאחר שאיפסנו את גורמים אלו נשאר עם הגורמים הבאים במשוואה

$$\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1}+c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1}+c_1\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1}+\cdots\right)-a_1\left(c_1\tau^{\beta_1+2}+c_2\tau^{\beta_2+2}+\cdots\right)=0$$

ידוע כי $c_0 \neq 0$ וגם $c_1 \neq 0$. לכן, כל לאחד מן הגורמים τ^{β_1+2} ו - $\tau^{\beta_0+\alpha-1}$ חייב להיות גורם בעל חזקה זהה. אף אחד מהם אינו יכול להיות הגורם בעל החזקה הנמוכה ביותר. ולכן הגורמים זהים בהכרח. כלומר,

$$\begin{cases}\beta_0+\alpha-1=\beta_1+2\\ a_1c_1=c_0\beta_0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=\beta_0+\alpha-3\\ c_1=c_0\beta_0/a_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=2\alpha-3\\ c_1=a_2\beta_0/a_1^2\end{cases}$$

כעת נשווה את הגורמים הבאים,

$$\begin{cases}\beta_1+\alpha-1=\beta_2+2\\ a_1c_2=c_1\beta_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_2=\beta_1+\alpha-3\\ c_2=c_1\beta_1/a_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_2=3\alpha-6\\ c_2=a_2\beta_0\beta_1/a_1^3\end{cases}$$

והגורמים שאחריהם

$$\begin{cases}\beta_3+\alpha-1=\beta_2+2\\ a_1c_3=c_2\beta_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_3=\beta_2+\alpha-3\\ c_3=c_2\beta_2/a_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_3=4\alpha-9\\ c_3=a_2\beta_0\beta_1\beta_2/a_1^4\end{cases}$$

ננסח את המקדמים והחזקות של הטור באופן כללי.

$$\beta_n=n(\alpha-3)+\alpha\ ,\qquad n=0,1,2\ldots \tag{4.12}$$

$$c_0=\frac{a_2}{a_1},\qquad c_n=\frac{a_2}{a_1^{n+1}}\prod_{k=0}^{n-1}\beta_k\quad ,\ n=1,2,3\ldots$$

$$c_0=\frac{a_2}{a_1},\qquad c_n=\frac{a_2}{a_1^{n+1}}\prod_{k=0}^{n-1}[k(\alpha-3)+\alpha\ ]\quad ,\ n=1,2,3\ldots \tag{4.13}$$

נראה שאכן מתקיים : $\beta_n < \beta_{n+1}$.

$$\beta_n = n(\alpha-3)+\alpha < n(\alpha-3)+\alpha+(\alpha-3) = (n+1)(\alpha-3)+\alpha = \beta_{n+1}$$

לכן הפתרון שקיבלנו הוא הטור הבא

$$z = \frac{a_2}{a_1}\left[\tau^\alpha + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_1^n}\prod_{k=0}^{n-1}[k(\alpha-3)+\alpha]\right)\tau^{n(\alpha-3)+\alpha}\right]$$

ניתן להציב את הביטוי שקיבלנו במשוואה הדיפרנציאלית ולראות שהוא אכן מקיים את המשוואה.
לאחר הצבת a_1 ו- a_2 נקבל

$$z = \frac{1}{\epsilon\mu A}\left[\tau^\alpha + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\mu A}{2}\right)^n \prod_{k=0}^{n-1}[k(\alpha-3) + \alpha]\right)\tau^{n(\alpha-3)+\alpha}\right] \tag{4.14}$$

3.4 פתרון המשוואה עבור קירוב מסדר שני ל - $f(\tau)$ וקירוב מסדר שלישי ב - $g(\tau/\epsilon)$

לאחר שקיבלנו פתרון למשוואה עבור קירוב מסדר שני נוסיף איבר נוסף בטור השני ונבדוק את ההשפעה של הוספת האיבר. המשוואה שהתקבלה היא :

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu A\left(\frac{\tau^2}{2!}\right)\tau^{-\alpha}z - \epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2!} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!}\right) \tag{4.15}$$

נגדיר את המקדמים $a_1 = \mu A$ ו- $a_2 = \epsilon$ ונקבל את המשוואה

$$\begin{aligned}\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1} + c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1} + \cdots\right) \\ - a_1\left(\frac{c_0\tau^{\beta_0+2}}{2!} + \frac{c_1\tau^{\beta_1+2}}{2!} + \frac{c_2\tau^{\beta_2+2}}{2!} + \cdots\right) \\ + a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2} - \frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3}\right) = 0\end{aligned} \qquad 4.16)$$

גם כאן, מהשוואת המקדמים של החזקות $\tau^{\alpha+2}$ ו - τ^{β_0+2} , מהסיבות המובאות לעיל נקבל כי

$$\beta_0 = \alpha \qquad , \qquad c_0 = \frac{a_2}{a_1\epsilon^2}$$

נשארנו אם כן עם המשוואה הבאה

$$\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1}+c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1}+c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1}+\cdots\right) - a_1\left(\frac{c_1\tau^{\beta_1+2}}{2!}+\frac{c_2\tau^{\beta_2+2}}{2!}+\cdots\right) \qquad - a_2\frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3}=0$$

נחלק את הבעיה למספר מקרים :

3.4.1 פתרון עבור $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha>3$

❖ **עבור $\alpha=4$**

נקבל $\beta_0+\alpha-1=\alpha+3=7$ ומכיוון ש c_0 כבר מוגדר בתלות ב ϵ^2 לא ניתן להגדיר אותו שוב כתלות ב ϵ^3 כך שיהיה נכון עבור כל ϵ, לכן חייב להתקיים גם $\beta_1+2=7$, כלומר $\beta_1=5$ ונקבל את המשוואה :

$$c_1=\frac{2!}{a_1}\left(c_0\alpha-\frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}\right)=\frac{2!}{a_1}\left(\frac{4a_2}{a_1\epsilon^2}-\frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}\right)=\frac{2a_2}{a_1\epsilon^2}\left(\frac{4}{a_1}-\frac{1}{3!\,\epsilon}\right)$$

מכאן והלאה נקבל את המקדמים והחזקות הבאים :

$$\beta_n=\beta_{n-1}+\alpha-3=\beta_{n-1}+1=\alpha+n=4+n \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} c_n&=\left(\frac{2}{a_1}\right)c_{n-1}\beta_{n-1}=\left(\frac{2}{a_1}\right)^{n-1}c_1\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}\\ &=\frac{2^n a_2}{a_1^n\epsilon^2}\left(\frac{4}{a_1}-\frac{1}{3!\,\epsilon}\right)\prod_{k=1}^{n-1}(k+4)\end{aligned} \tag{4.18}$$

כלומר נקבל פתרון מצורה של טור פרובניוס בעל $r=4$.

❖ **עבור $\alpha>4$**

מתקיים $\beta_0+\alpha-1=2\alpha-1>\alpha+4-1=\alpha-3$. וידוע כי $a_2\neq 0$. לכן יוצא מכך כי

$$\alpha+3=\beta_1+2\ \Rightarrow\ \beta_1=\alpha+1 \qquad , \qquad c_1=-\frac{a_2}{3a_1\epsilon^3} \tag{4.19}$$

מכאן ואילך מתקיימות המשוואות הבאות :

$$\beta_n = \beta_{n-2} + \alpha - 3 \quad , \quad c_n = \frac{2!}{a_1} c_{n-2}\beta_{n-2} \tag{4.20}$$

ניתן לחלק את הביטויים ל n זוגיים ו n אי-זוגיים.

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{n}{2}(\alpha-3)+\alpha & , \quad n=2k \quad , \quad k=0,1,2\ldots \\ \frac{n}{2}(\alpha-3)+\frac{1}{2}\alpha+\frac{5}{2} & , \quad n=2k+1, \quad k=0,1,2\ldots \end{cases} \tag{4.21}$$

$$c_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{a_1}\right)^{n/2} c_0\beta_0\beta_2 \cdots \beta_{n-2} & , \quad n=2k \quad , \quad k=1,2,3\ldots \\ \left(\frac{2}{a_1}\right)^{(n-1)/2} c_1\beta_1\beta_3 \cdots \beta_{n-2} & , \quad n=2k+1 \quad , \quad k=1,2,3\ldots \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{a_1}\right)^{n/2} c_0 \prod_{k=0}^{n/2} \beta_{2k} & , \quad n=2k \quad , \quad k=1,2,3\ldots \\ \left(\frac{2}{a_1}\right)^{(n-1)/2} c_1 \prod_{k=0}^{n/2} \beta_{2k+1} & , \quad n=2k+1 \quad , \quad k=1,2,3\ldots \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} c_0 = \frac{a_2}{a_1\epsilon^2} & , \quad c_1 = -\frac{a_2}{3a_1\epsilon^3} \\ \left(\frac{2}{a_1}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{a_2}{\epsilon^2} \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}} \big((k+1)(\alpha-3)+3\big) & , n=2k \quad , \quad k=1,2,3\ldots \\ -\left(\frac{2}{a_1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{a_2}{3\epsilon^3} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \big((k+1)(\alpha-3)+4\big) & , \quad n=2k+1, k=1,2,3\ldots \end{cases} \tag{4.22}$$

כאשר עבור n זוגי נקבל

$$\mathrm{\beta_n - \beta_{n-1} = \alpha - 4} \quad , \quad \mathrm{\beta_{n+1} - \beta_n = 1} \tag{4.23}$$

כלומר, הטור שקיבלנו כאן אינו טור פרובניוס באופן כללי (למעט $\alpha = 5$), אלא ישנםהפרשים משתנים בין החזקות, פעם - 1 ופעם $\alpha - 4$ לסירוגין.

❖ הכללה עבור קירוב מסדר p:

ניתן להראות כי כאשר ניקח בטור השני קירוב מסדר p, $p \in \mathbb{N}$. כלומר, בטור עצמו יהיו $p-1$ איברים, מתקיימת ההכללה הבאה:

עבור $\alpha \leq p+2$

נקבל סדרת פרובניוס:

$$\beta_n = \alpha + n \qquad (4.24)$$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^n a_2}{a_1 (n+2)!\, \epsilon^{n+2}}\,, & n < \alpha - 3 \\ \dfrac{2}{a_1}\left(\dfrac{(-1)^n a_2}{(n+2)!\, \epsilon^{n+2}} + c_{n-\alpha+3}\beta_{n-\alpha+3}\right) \,, & \alpha - 3 \leq n < p-1 \\ \dfrac{2}{a_1} c_{n-\alpha+3}\beta_{n-\alpha+3}\,, & n \geq p-1 \end{cases} \qquad (4.25)$$

עבור $\alpha > p+2$

נקבל את החזקות הבאות:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{n-i}{p-1}(\alpha-3) + \alpha + i = k(\alpha-3) + \alpha + i\ , \qquad n \\ &= (p-1)k + i \\ & k = 0,1,2 \ldots \quad , \quad i = 0,1,2 \ldots (p-2) \end{aligned} \qquad (4.26)$$

והמקדמים הבאים:

$$c_n = \frac{2}{a_1} c_{n-m+1}\beta_{n-m+1}$$

$$= \left(\frac{2}{a_1}\right)^{k+1} \frac{(-1)^i a_2}{(i+2)!\,\epsilon^{i+2}} \prod_{l=0}^{k} [l(\alpha-3)+\alpha+i] \qquad (4.27)$$

כאשר הטור יראה באופן הבא: סדרות של $(p-1)$ חזקות עוקבות, כאשר בין החזקה האחרונה בסדרה אחת לחזקה הראשונה בסדרה שלאחריה הוא $\alpha-(p+1)$.

ניתן לראות כי המקרה בו לקחנו קירוב מסדר שני (רק איבר אחד בטור) הוא מקרה פרטי כאשר $p=2$.

3.4.2 פתרון עבור $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 3$

❖ **<u>עבור $3<\alpha<4$</u>**

במקרה זה $\alpha+3>\beta_0+\alpha-1=2\alpha-1$ לכן החזקה הקטנה כרגע היא $\beta_0+\alpha-1$. נקבל:

$$\beta_1 = \beta_0+\alpha-3 = 2\alpha-3 \qquad (4.28)$$

$$c_1 = \frac{2}{a_1}c_0\beta_0 = \frac{2a_2}{a_1^2\epsilon^2}\alpha \qquad (4.29)$$

נבחן מה החזקה הנמוכה כעת. ישנן 2 אפשרויות: $\beta_1+\alpha-1=3\alpha-4$ ו- $\alpha+3$.

כדי להשוות בין שתי החזקות האלו יש לדעת מהו התחום של α.

- <u>כאשר $3.5<\alpha<4$</u>

כעת $\alpha+3<3\alpha-4$ ונקבל:

$$\beta_2 = \alpha+1 \qquad (4.30)$$

$$c_2 = -\frac{2a_2}{a_1 3!\,\epsilon^3} = -\frac{a_2}{3a_1\epsilon^3} \qquad (4.31)$$

ועבור $n > 2$ מתקבל:

$$\beta_n = \begin{cases} \beta_0 = \alpha, \quad \beta_1 = 2\alpha - 3 \\ \frac{n}{2}(\alpha - 3) + 4, & n = 2k,\ \ k = 1,2,3\ldots \\ \frac{n}{2}(\alpha - 3) + 1.5\alpha - 1.5, & n = 2k+1, k = 1,2,3\ldots \end{cases} \qquad (4.32)$$

$$c_n = \begin{cases} c_0 = \frac{a_2}{a_1\epsilon^2}\,, \quad & c_1 = \frac{2a_2}{a_1^2\epsilon^2}\alpha \\ \frac{2}{a_1}c_{n-2}\beta_{n-2} & n = 2,3,4\ldots \end{cases} \qquad (4.33)$$

- <u>כאשר $\alpha = 3.5$</u>

נקבל $\alpha + 3 = 3\alpha - 4$ ונקבל כעת את החזקות הבאות:

$$\beta_2 = \alpha + 3 - 2 = 4.5$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \alpha - 3 = \beta_{n-1} + 0.5$$

$$\beta_n = 3.5 + 0.5n \qquad (4.34)$$

כאשר

$$c_2 = \frac{2}{a_1}\left(c_1\beta_1 - \frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}\right) = \frac{2}{a_1}\left(\frac{2a_2}{a_1^2\epsilon^2}3.5\cdot 4 - \frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}\right)$$
$$= \frac{2}{a_1\epsilon^2}\left(\frac{28a_2}{a_1^2} - \frac{a_2}{6\epsilon}\right) \qquad (4.35)$$

ועבור $n > 2$ המקדמים יהיו:

$$c_n = \frac{2}{a_1} c_{n-1}\beta_{n-1} \qquad (4.36)$$

- <u>כאשר $3 < \alpha < 3.5$</u>

כעת $3\alpha - 4 < \alpha + 3$ ונקבל :

$$\beta_2 = \beta_1 + \alpha - 3 = 3\alpha - 6 \qquad (4.37)$$

$$c_2 = \left(\frac{2}{a_1}\right) c_1\beta_1 = \frac{2^2 a_2}{a_1^3 \epsilon^2}\alpha(2\alpha - 3) \qquad (4.38)$$

כעת יש לבחון את היחס בין$\alpha + 3$ ל- $\beta_2 + \alpha - 1 = 4\alpha - 7$.

קביעת החזקה הבאה, אם כך נחלקת לשלושה מקרים : $\alpha < 3\frac{1}{3}, \alpha = 3\frac{1}{3}, \alpha > 3\frac{1}{3}$

אם נמשיך נגלה שעבור $\alpha < 3\frac{1}{3}$ המקרים יתחלקו שוב לשלושה, והפעם סביב $3\frac{1}{4}$ וכך הלאה...

ננסה אם כך למצוא פיתרון עבור α בתחום $3\frac{1}{3} < \alpha < 3.5$.

- כאשר $m > 1,\ \ m \in \mathbb{N}$ $\quad 3 + \frac{1}{m+1} < \alpha < 3 + \frac{1}{m}, \quad \alpha$

$$\beta_n = \begin{cases} \alpha & , \quad n = 0 \\ \beta_{n-1} + \alpha - 3 & , \quad 0 < n \le m \\ \alpha + 1 & , \quad n = m+1 \\ \beta_{n-2} + \alpha - 3 & , \quad n > m+1 \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} n(\alpha - 3) + \alpha & , \quad n \le m \\ \alpha + 1 & , \quad n = m+1 \\ \frac{n}{2}(\alpha - 3) + \frac{m}{2}(\alpha - 3) + \alpha & , \quad n = m + 2k \\ \frac{n}{2}(\alpha - 3) - \frac{m}{2}(\alpha - 3) + \frac{1}{2}(\alpha + 5) & , \quad n = m + 2k + 1 \end{cases} \qquad (4.39)$$

כאשר... $k = 1,2,3$.

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1\epsilon^2}\,, & n=0\\ \dfrac{2}{a_1}c_{n-1}\beta_{n-1}\,, & 0<n\le m\\ -\dfrac{2a_2}{3!\,a_1\epsilon^3}\,, & n=m+1\\ \dfrac{2}{a_1}c_{n-2}\beta_{n-2}\,, & n>m+1\end{cases}\qquad(4.40)$$

- כאשר $m\in\mathbb{N}$,$m>1$,$\alpha=3+\frac{1}{m}$ α

$$\beta_n=\begin{cases}\alpha\,, & n=0\\ \beta_{n-1}+\alpha-3\,, & 0<n\le m\\ \alpha+1\,, & n=m+1\\ \beta_{n-1}+\alpha-3\,, & n>m+1\end{cases}$$

$$\beta_n=\begin{cases}n(\alpha-3)+\alpha\,, & n\le m\\ \alpha+1\,, & n=m+1\\ (n-m-1)(\alpha-3)+\alpha+1\,, & n>m+1\end{cases}\qquad(4.41)$$

$$c_n=\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1\epsilon^2}\,, & n=0\\ \dfrac{2}{a_1}c_{n-1}\beta_{n-1}\,, & 0<n\le m\\ \dfrac{2}{a_1}\left(c_{n-1}\beta_{n-1}-\dfrac{a_2}{3!\,\epsilon^3}\right), & n=m+1\\ \dfrac{2}{a_1}c_{n-2}\beta_{n-2}\,, & n>m+1\end{cases}\qquad(4.42)$$

❖ <u>**עבור $\alpha>4$**</u>

במקרה זה $2\alpha-1=\beta_0+\alpha-1>\alpha+3$ לכן הקטנה כרגע היא $\alpha+3$. נחשב את החזקה הבאה:

נשווה בין החזקות $\alpha+3=\beta_1+2$ ונקבל

$$\beta_1 = \alpha + 1 \quad , \quad c_1 = -\frac{a_2}{3a_1\epsilon^3} \tag{4.43}$$

מכאן ואילך החזקות הן :

$$\beta_n = \beta_{n-2} + \alpha - 3 \tag{4.44}$$

והמקדמים הם :

$$c_n = \frac{2}{a_1} c_{n-2}\beta_{n-2}$$

$$c_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{a_1}\right)^{n/2} \frac{a_2}{\epsilon^2} \prod_{k=1}^{n/2} (k(\alpha-3)+3) & , \quad n = 2k \quad , \quad k = 0,1,2 \ldots \\ -\left(\frac{2}{a_1}\right)^{(n-1)/2} \frac{a_2}{3\epsilon^3} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (k(\alpha-3)+4) & , \quad n = 2k+1, \quad k = 0,1,2 \ldots \end{cases} \quad 45)$$

כלומר, במקרה זה (עבור קירוב מסדר שלישי בטור) אין הבדל בין α טבעי או לא טבעי.

3.5 פתרון המשוואה עם מקדם בקירוב מסדר 3 ל $f(\tau)$ וטור אינסופי ל $g(\tau/\epsilon)$ $(\alpha > 3, \alpha \in \mathbb{N})$,

כעת, על מנת להתקרב לפתרון המשוואה נעשה שלב נוסף ונשמיט את המקדמים של החזקות הגבוהות מ τ^3 בטור המקדם של z, ונרשום את כל האיברים המופיעים בטור השני במשוואה ונקבל

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu A\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!}\right)\tau^{-\alpha}z - \epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2!} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!} + \frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!} + \cdots\right) \tag{4.46}$$

$$\alpha > 3 \quad , \alpha \in \mathbb{N}$$

נגדיר את המקדמים $a_1 = \mu A$ ו- $a_2 = \epsilon$ ונקבל את המשוואה

$$\tau^{\alpha}\frac{dz}{d\tau}=a_1\left(\frac{\tau^2}{2!}-\frac{\tau^3}{3!}\right)z-a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2}-\frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3}+\frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4}+\cdots\right)\qquad(4.47)$$

ננסה לחפש פתרון עבור הנק׳ הסינגולרית האי רגולרית $\tau=0$, כלומר נדרוש $\alpha>3$.

גם כאן, נרשום את הפתרון כטור חזקות שרירותי ולא נגביל אותו לצורה מסוימת.

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\tau^{\beta_n}=c_0\tau^{\beta_0}+c_1\tau^{\beta_1}+c_2\tau^{\beta_2}+\cdots,\qquad c_n\neq 0,\quad 0<\beta_n<\beta_{n+1}$$

נציב את הטורים והנגזרת במשוואה,

$$\begin{aligned}&\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1}+c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1}+c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1}+\cdots\right)\\&\quad+a_1\left(-\frac{\tau^2}{2!}+\frac{\tau^3}{3!}\right)\left(c_0\tau^{\beta_0}+c_1\tau^{\beta_1}+c_2\tau^{\beta_2}+\cdots\right)\\&\quad+a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2}-\frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3}+\frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

נרשום את המשוואה שנית,

$$\begin{aligned}&\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1}+c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1}+c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1}+\cdots\right)\\&\quad+a_1\left(-\frac{c_0\tau^{\beta_0+2}}{2!}+\frac{c_0\tau^{\beta_0+3}}{3!}-\frac{c_1\tau^{\beta_1+2}}{2!}+\frac{c_1\tau^{\beta_1+3}}{3!}-\frac{c_2\tau^{\beta_2+2}}{2!}+\frac{c_2\tau^{\beta_2+3}}{3!}\right.\\&\quad\left.+\cdots\right)+a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2}-\frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3}+\frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

גם במקרה זה נקבל כי החזקות הנמוכות ביותר הן β_0+2 ו- $\alpha+2$. ומהשוואת המקדמים של $\tau^{\alpha+2}$ ו - τ^{β_0+2} נקבל כי

$$\begin{cases}\beta_0+2=\alpha+2\\ \dfrac{a_1c_0}{3!}=\dfrac{a_2}{3!\,\epsilon^2}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\begin{cases}\beta_0=\alpha\\ c_0=\dfrac{a_2}{a_1\epsilon^2}\end{cases}$$

כעת, על מנת לדעת מהי החזקה הבאה בגדלה, יש לדעת מהו הקשר בין החזקות β_0 ו- β_1. על מנת לבחון זאת נגדיר באופן כללי את הקשר בין שתי חזקות עוקבות.

$$\beta_n=\beta_{n-1}+k_n\qquad(4.48)$$

עבור n כלשהו יש לבחון שלושה מקרים, כאשר $k_n>1$, $k_n<1$ או $k_n=1$.

אם קיים$k_n > 1$ כלשהו, נקבל עבור מקדם c_{n-1} שתי משוואות שכל אחת מגדירה אותו כתלות בחזקה שונות של ϵ. מובן כי עבור ϵ שונים נקבל סתירה בין שתי המשוואות. מסיבה זו יש לפסול את המקרה הזה.לדוגמה, נניח כי $k_0 > 1$, נקבל כי $\beta_0 + 3 < \beta_1 + 2$, לכן השוואת המקדמים תתן

$$\begin{cases} \beta_0 + 3 = \alpha + 3 \\ \dfrac{a_1 c_0}{2!} = \dfrac{a_2}{2!\,\epsilon^3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta_0 = \alpha \\ c_0 = \dfrac{a_2}{a_1 \epsilon^3} \end{cases} \quad , \alpha > 3, \alpha \in \mathbb{N}$$

קיבלנו סתירה עם המקדם שקיבלנו קודם לכן. אף עבור $\alpha = 4$, נקבל את המשוואות

$$(\alpha + \frac{a_1}{3!})c_0 = \frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}$$

$$c_0 = \frac{a_2}{(3!\,\alpha + a_1)\epsilon^3}$$

גם כאן סתירה.

אם קיים n כלשהו שעבורו $k_n < 1$, נקבל עבור האיבר בעל החזקה הראשונה בעלת k כזה, $mod(\beta_n) \neq mod(\alpha)$, כלומר זה יאלץ ש $c_n = 0$ מכיוון שאין מקדמים נוספים בעלי חזקה זהה. אך אנו דורשים כי $c_n \neq 0$, לכן זה לא יתכן.

לדוגמה, אחר שפסלנו את האפשרות של $k_n > 1$ נניח כי $n = 1,2,3,4$, $k_n = 1$ ו- $k_5 < 1$.

כלומר $\beta_5 < \alpha + 5 \quad \rightarrow \quad \beta_5 < \beta_4 + 1 \quad \rightarrow \quad \beta_4 = \alpha + 4$

כעת נקבל בהכרח כי $c_5 = 0$ מכיוון שאין מקדם נוסף בעל חזקה זהה וזו סתירה לדרישה ש $c_n \neq 0$.

כלומר נותרנו עם האפשרות $k_n = 1$. כעת נוכל להגדיר כי $\beta_n = \beta_{n-1} + 1$, כאשר, $\beta_{-1} = 0$. או

$$\beta_n = \alpha + n. \tag{4.49}$$

אם כן ניתן לרשום את המשוואה באופן הבא:

$$\begin{aligned}(c_0\beta_0\tau^{2\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{2\alpha} + c_2\beta_2\tau^{2\alpha+1} + \cdots) \\ + a_1\left(-\frac{c_0\tau^{\alpha+2}}{2!} + \frac{c_0\tau^{\alpha+3}}{3!} - \frac{c_1\tau^{\alpha+3}}{2!} + \frac{c_1\tau^{\alpha+4}}{3!} - \frac{c_2\tau^{\alpha+4}}{2!} + \frac{c_2\tau^{\alpha+5}}{3!} + \cdots\right) \\ + a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2} - \frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3} + \frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4} + \cdots\right) = 0\end{aligned}$$

נשווה מקדמים של הגורמים הבאים:

$$a_1\left(\frac{c_0}{3!}-\frac{c_1}{2!}\right)=\frac{a_2}{3!\,\epsilon^3}$$

$$c_1=\frac{2!}{3!}c_0-\frac{2!\,a_2}{3!\,a_1\epsilon^3}$$

ועבור ההשוואה הבאה:

$$a_1\left(\frac{c_1}{3!}-\frac{c_2}{2!}\right)=-\frac{a_2}{4!\,\epsilon^4}$$

$$c_2=\frac{2!}{3!}c_1-\frac{2!\,a_2}{4!\,a_1\epsilon^4}$$

ובאופן כללי, עבור $n<\alpha-3$

$$c_n=\frac{1}{3}c_{n-1}+(-1)^n\frac{2!\,a_2}{(n+2)!\,a_1\epsilon^{n+2}} \quad , \quad c_{-1}=0 \qquad (4.50)$$

כאשר עבור $n\geq\alpha-3$ נוסף איבר מגורמי הנגזרת להשוואת המקדמים כי אז מתקיים שהחזקה של גורם הנגזרת הראשון, $2\alpha-1$ שווה לחזקה $n+2+\alpha$. אזי מתקבל כי

$$c_n=\frac{2n+6}{a_1}c_{n-\alpha+3}+\frac{1}{3}c_{n-1}+(-1)^n\frac{2!\,a_2}{(n+2)!\,a_1\epsilon^{n+2}} \qquad (4.51)$$

3.6 פתרון המשוואה עבור מקדמים כטורים אינסופיים, $(\boldsymbol{\alpha>3,\alpha\in\mathbb{N}})$

כעת נחזור לבעיה המקורית, המשוואה אותה נפתור כעת היא

$$\begin{aligned}\tau^\alpha\frac{dz}{d\tau}=\mu A\left(\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3}{3!}+\frac{\tau^4}{4!}+\cdots\right)z\\ -\epsilon\tau^\alpha\left(\frac{(\tau/\epsilon)^2}{2}-\frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!}+\frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!}+\cdots\right)\end{aligned} \qquad (4.52)$$

כאשר הפתרון הוא מהצורה

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\tau^{\beta_n}=c_0\tau^{\beta_0}+c_1\tau^{\beta_1}+c_2\tau^{\beta_2}+\cdots,\qquad c_n\neq 0,\quad 0<\beta_n<\beta_{n+1}$$

נגדיראת המקדמים $a_1 = \mu A$ ו- $a_2 = \epsilon$, נציב במשוואה ונקבל

$$\left(c_0\beta_0\tau^{\beta_0+\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{\beta_1+\alpha-1} + c_2\beta_2\tau^{\beta_2+\alpha-1} + \cdots\right)$$
$$+ a_1\left(-\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)\left(c_0\tau^{\beta_0} + c_1\tau^{\beta_1} + c_2\tau^{\beta_2} + \cdots\right)$$
$$+ a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2} - \frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3} + \frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4} + \cdots\right) = 0$$

כמובן שגם במקרה זה האיבר הראשון ניתן להגדרה בקלות על ידי השוואת החזקות הנמוכות ומתקבל

$$\begin{cases} \beta_0 = \alpha \\ c_0 = \dfrac{a_2}{a_1\epsilon^2} \end{cases}$$

כעת המשך השוואת המקדמים תלוי בקשר בין החזקות העוקבות. גם כאן, נוכל לפסול את המקרה של $k_n < 1$ מאותה הסיבה בה פסלנו בפתרון המשוואה הפשוטה יותר.

לגבי המקרה בו $k_n > 1$, נתבונן על החזקה הראשונה בטור β_n, המקיימת תנאי זה. עקב תנאי זה, נקבל משוואת הפרש נוספת מסדר $n-1$, אי הומוגנית, מכיוון שהאיברים הקודמים c_0 עד c_{n-1} כבר ידועים לנו, נוכל להציב אותם במשוואה ונקבל סתירה, מכיוון שהאיברים האלו כולם תלויים בחזקות גבוהות יותר של ϵ מאשר האיבר השייך ל-$g(\tau/\epsilon)$.

גם כאן נותר לנו אם כן המקרה בו $k_n = 1$. כלומר הפתרון שנקבל הוא סדרת פרובניוס :

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}$$

נציב את הפתרון במשוואה

$$(c_0\beta_0\tau^{2\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{2\alpha} + c_2\beta_2\tau^{2\alpha+1} + \cdots)$$
$$+ a_1\left(-\frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)(c_0\tau^{\alpha} + c_1\tau^{\alpha+1} + c_2\tau^{\,\alpha+2} + \cdots)$$
$$+ a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2} - \frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3} + \frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4} + \cdots\right) = 0$$

נסדר את הגורמים לפי סדר החזקות

$$
\begin{aligned}
&(c_0\beta_0\tau^{2\alpha-1} + c_1\beta_1\tau^{2\alpha} + c_2\beta_2\tau^{2\alpha+1} + \cdots) \\
&\qquad + a_1\left(-\frac{c_0}{2!}\tau^{\alpha+2} + (-\frac{c_1}{2!} + \frac{c_0}{3!})\tau^{\alpha+3} + (-\frac{c_2}{2!} + \frac{c_1}{3!} - \frac{c_0}{4!})\tau^{\alpha+4} + \cdots\right) \\
&\qquad + a_2\left(\frac{\tau^{\alpha+2}}{2!\,\epsilon^2} - \frac{\tau^{\alpha+3}}{3!\,\epsilon^3} + \frac{\tau^{\alpha+4}}{4!\,\epsilon^4} + \cdots\right) = 0
\end{aligned}
$$

על מנת להקל על השוואת המקדמים נרשום את המשוואה באופן הבא :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=\alpha-3}^{\infty}(c_{n-\alpha+3}\,\beta_{n-\alpha+3})\tau^{n+\alpha+2} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+2)!}c_k\right)\tau^{n+\alpha+2} \\
&\qquad + a_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!\,\epsilon^{n+2}}\tau^{n+\alpha+2} = 0
\end{aligned}
$$

נקבל אם כך עבור $n < \alpha - 3$ את השוואת המקדמים הבאה

$$
a_1\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+2)!}c_k = \frac{a_2(-1)^n}{(n+2)!\,\epsilon^{n+2}}
$$

$$
\frac{a_1}{2!}c_n + a_1\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+2)!}c_k = \frac{a_2(-1)^n}{(n+2)!\,\epsilon^{n+2}}
$$

$$
c_n = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+2)!}c_k + \frac{2a_2(-1)^n}{a_1(n+2)!\,\epsilon^{n+2}} \tag{4.53}
$$

וכאשר $n \geq \alpha - 3$ נוסף גורם ומתקבלת המשוואה

$$
\beta_{n-\alpha+3}c_{n-\alpha+3} + \frac{a_1}{2!}c_n + a_1\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k+2)!}c_k = \frac{a_2(-1)^n}{(n+2)!\,\epsilon^{n+2}}
$$

$$
\begin{aligned}
c_n = {}& 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+2)!}c_k - \frac{2n+6}{a_1}c_{n-\alpha+3} \\
&+ \frac{2a_2(-1)^n}{a_1(n+2)!\,\epsilon^{n+2}}
\end{aligned} \tag{4.54}
$$

את פתרון המשוואה, ניתן למצוא אם כך, כטור פרובניוס, כאשר את המקדם ה n-י יש למצוא על ידי פתרון משוואת הפרש מסדר n.

לסיכום, פתרון המשוואה הבאה

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu A\tau^{-\alpha}(\exp(-\tau) + \tau - 1)z - \epsilon\left(\exp\left(-\frac{\tau}{\epsilon}\right) + \frac{\tau}{\epsilon} - 1\right)$$

הניתנת לכתיבה באופן הבא,

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu A\tau^{-\alpha}\left(\frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} + \cdots\right)z - \epsilon\left(\frac{(\tau/\epsilon\,)^2}{2!} - \frac{(\tau/\epsilon)^3}{3!} + \frac{(\tau/\epsilon)^4}{4!} + \cdots\right)$$

הוא

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha} \tag{4.55}$$

כאשר המקדמים c_n ניתנים על ידי משוואות ההפרש הבאות:

$$c_n = 2 \cdot \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+2)!} c_k + \frac{(-1)^n}{\mu A(n+2)!\,\epsilon^{n+1}} & , \quad n < \alpha - 3 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+2)!} c_k - \frac{n+3}{\mu A} c_{n-\alpha+3} + \frac{(-1)^n}{\mu A(n+2)!\,\epsilon^{n+1}} & , \quad n \geq \alpha - 3 \end{cases} \tag{4.56}$$

$$c_0 = \frac{a_2}{a_1\epsilon^2}$$

4 סימולציה

על מנת לבחון את פתרון המשוואה שהתקבל, במבחן התוצאה, ביצענו סימולציה עבור ערכי α טבעיים שונים. הסימולציה בוצעה באמצעות תוכנת MATLAB ומשווה בין הפתרון הנומרי שמתקבל באמצעות ODE solver של MATLAB והפתרון האנליטי שהתקבל בסביבת הנקודה הסינגולריתכאשר מהטור של הפתרון מחושבים ששת האיברים הראשונים. ראוי להזכיר כי הפיתרון האנליטי הניתן הוא הפיתרון הפרטי המקרב את הפיתרון הכללי כפי שהראינו בסעיף (4.1) כי פתרון המשוואה ההומוגנית זניח בסביבת נק' זו.

המשוואה שניתנה לפיתרון בסימולציה היא:

$$\frac{dz}{d\tau} = \mu A \tau^{-\alpha}(e^{-\tau} + \tau - 1)z - \epsilon\left(e^{-\tau/\epsilon} + \tau/\epsilon\ - 1\right)$$

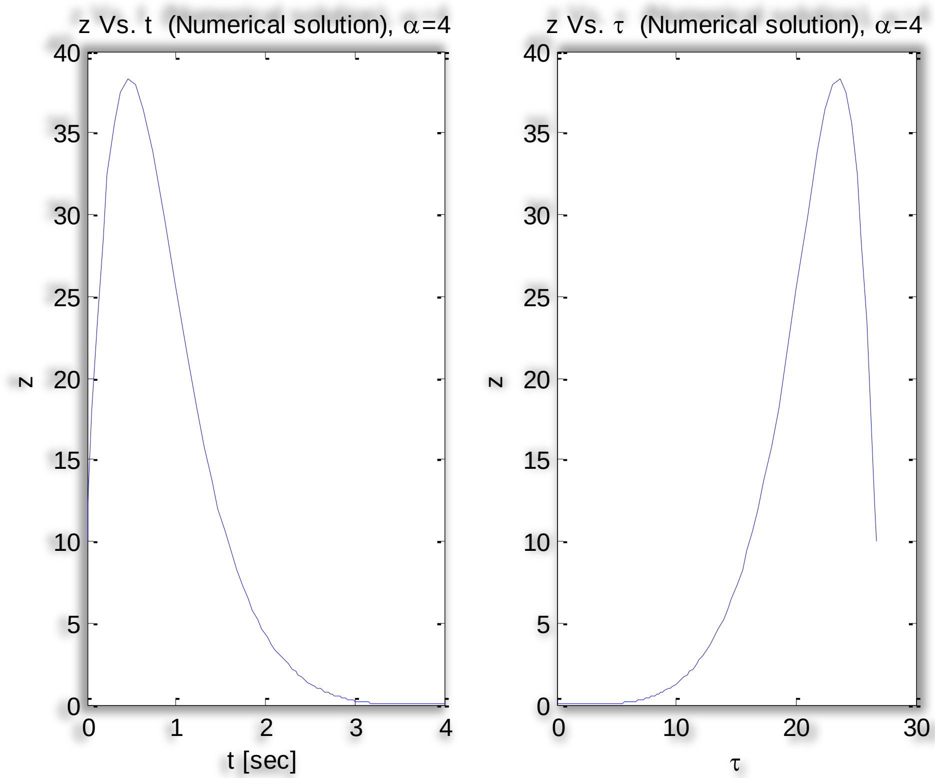
כאשר הוזנו הנתונים הבאים:

$$\tau_p = 0.15, \quad \tau_e = 0.2, \quad a_e^{\max} = 100, \quad a_p^{\max} = 200, \quad t_f = 4\,, \quad z_0 = 0,$$

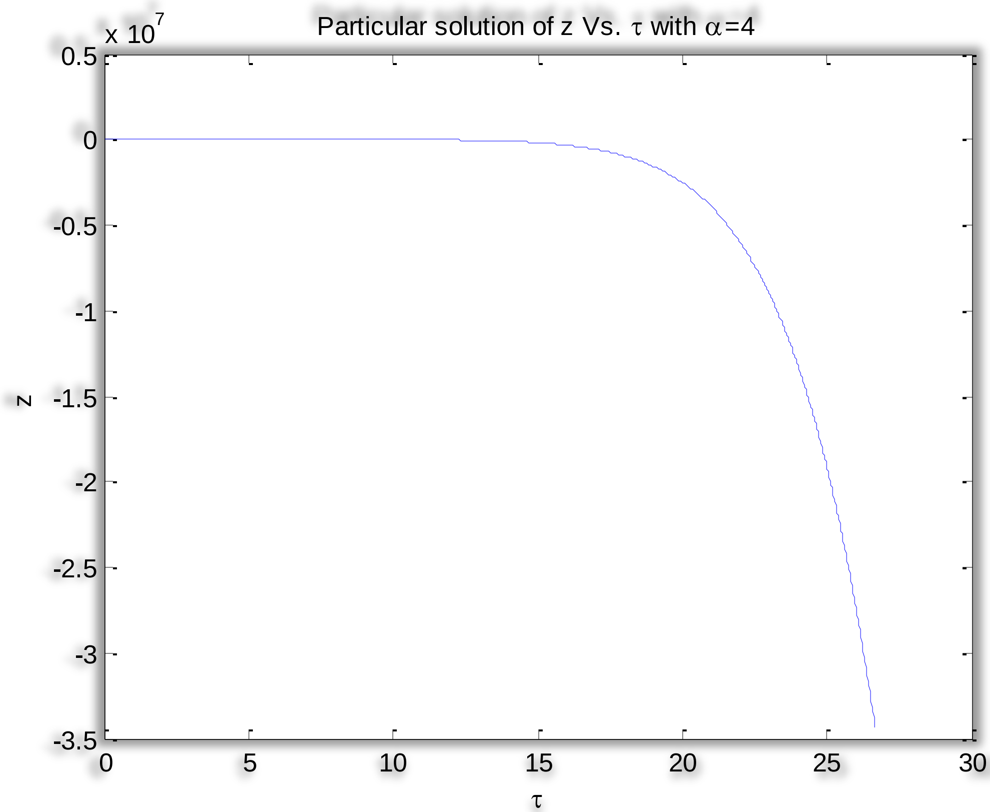
$$A = \frac{2}{\tau_p^{\alpha}}$$

והוגדרו היחסים: $\mu = a_p^{\max}/a_e^{\max}$ $\quad \epsilon = \tau_e/\tau_p$

פתרון נומרי של המשוואה לפי τ ולפי t:



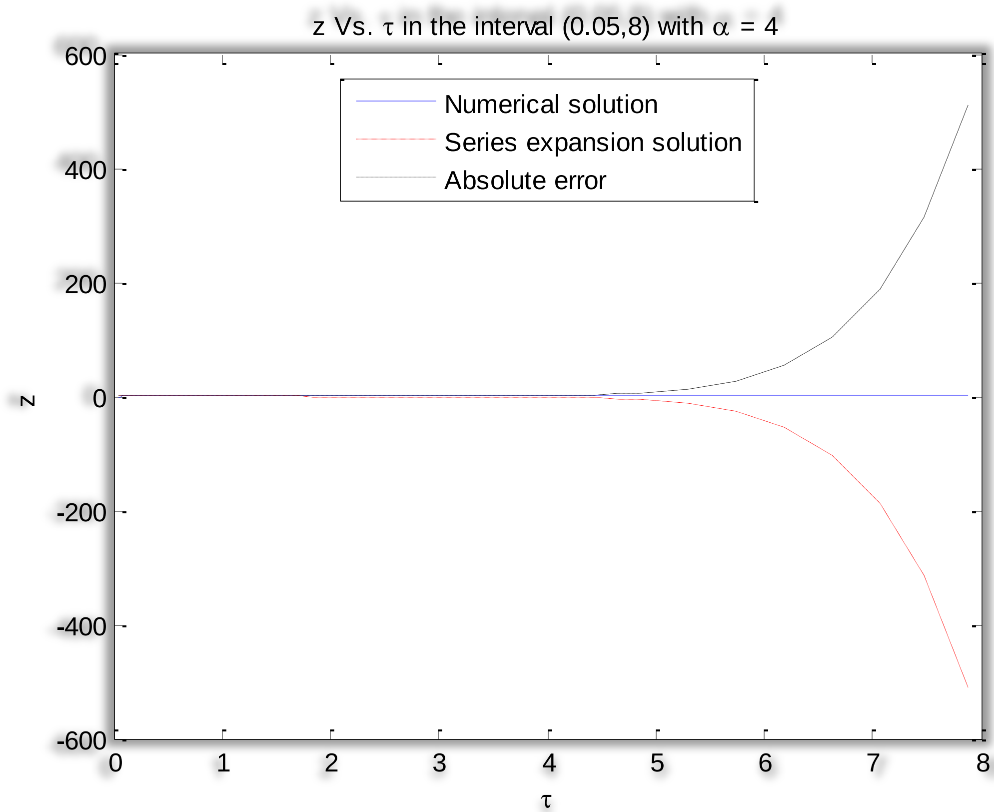
בשרטוט הבא מופיע פתרון פרטי אנליטי של המשוואה על פי פיתוח לטור חזקות. ניתן לשים לב כי במרחק מן הנקודה הסינגולרית, הפתרון הפרטי רחוק מן הפתרון הכללי, אך כאשר מתקרבים לנקודה הסינגולרית הפתרון הפרטי מקרב את הפתרון הכללי.

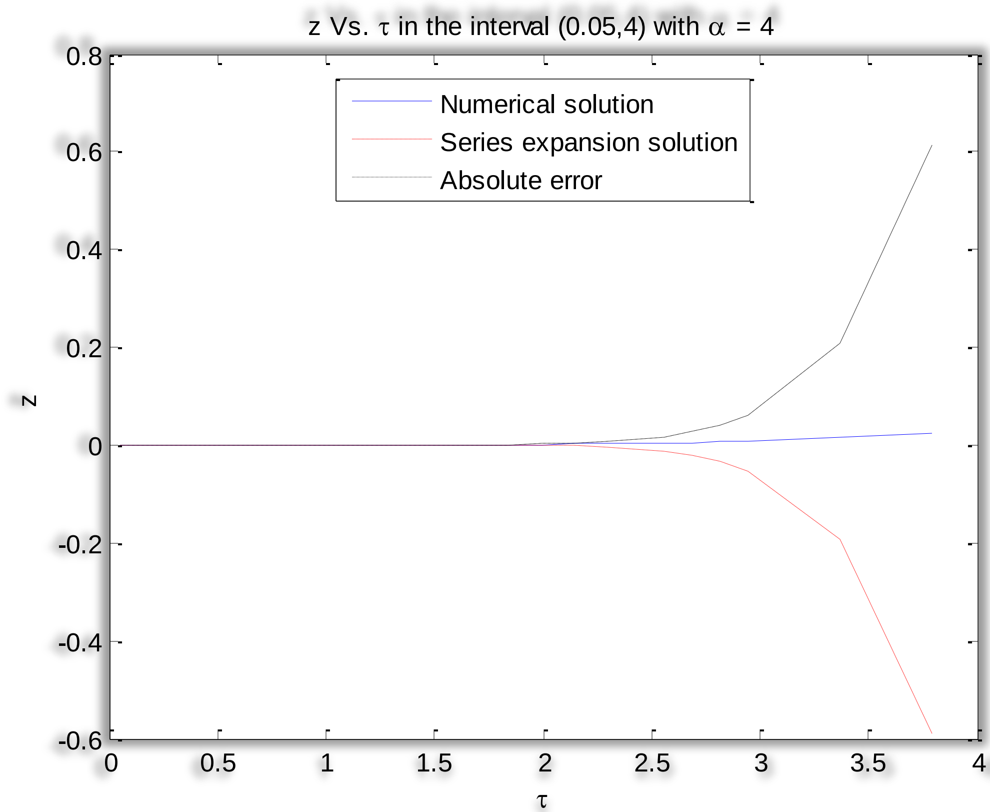


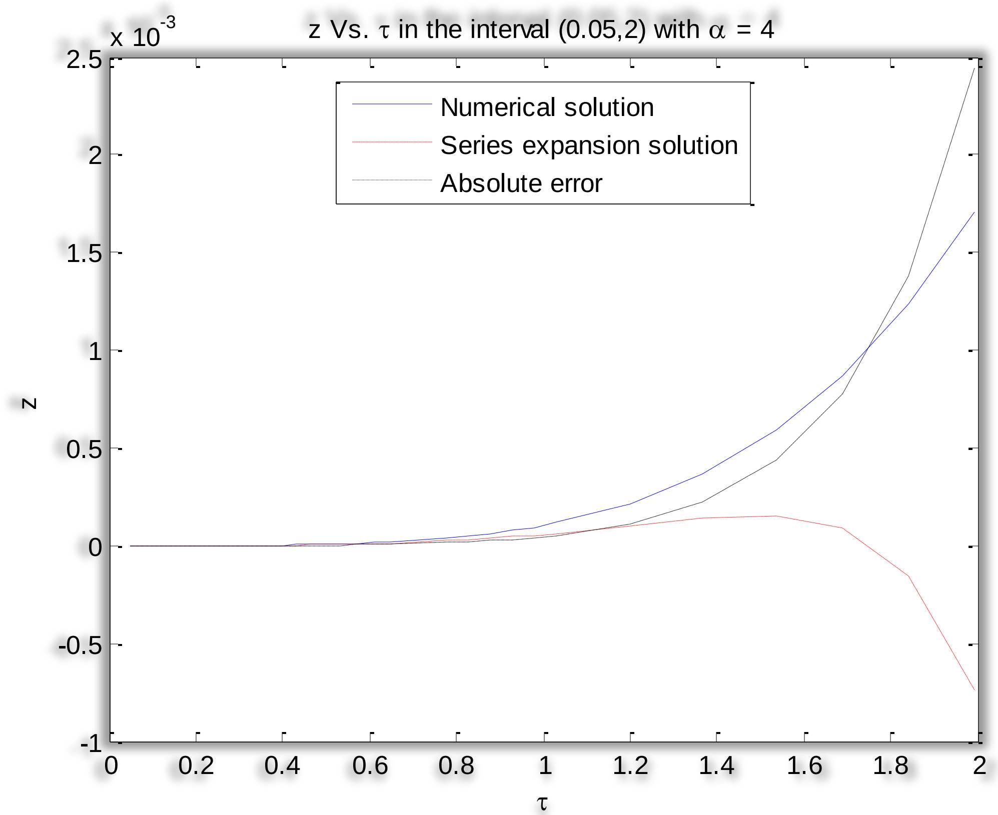
בתרשימים הבאים ניתן לראות כי ככל שמתקרבים לנקודה הסינגולרית $\tau = 0$, הפיתרון הפרטי בצורת טור החזקות מקרב את הפיתרון הכללי הנומרי. כמו כן ניתן לראות גם כי בקרבת הנקודה הסינגולרית, הפתרון הנומרי מתקשה לתאר את הפתרון באופן מדויק וכתוצאה מכך יש "קפיצות" בפתרון הנומרי בסביבה זו. הפתרון האנליטי של טור החזקות מאידך, מצליח לקרב את הפתרוןבאופן טוב מאוד ובצורה חלקה.

ניתן לראות כמו כן, כי ככל שערכי α גדלים , כדהפתרון האנליטי של המשוואה יותר תנודתי מאשר ערכים קטנים יותר, כלומר, הפתרון האנליטי רגיש יותר. אך כמו כדי לפצות על כך, כאשר מגדילים את ערכי α, הפיתרון האנליטי בצורת הטור, מקרב את הפיתרון הכללי בצורה טובה בשלב מוקדם יותר.

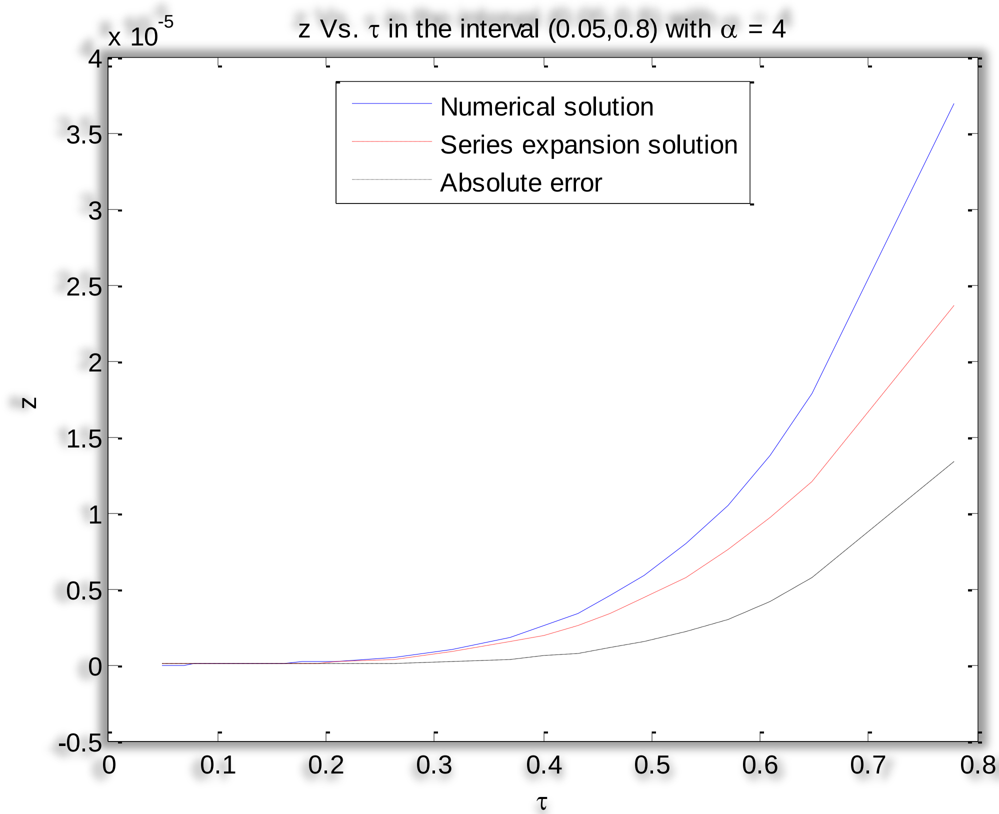
יש לשים לב גם כן כי קנה המידה בין הגרפים הינו משתנה.


z Vs. τ in the interval (0.05,8) with α = 4
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
600
400
200
0
-200
-400
-600
0
1
2
3
4
5
6
7
8
τ
z

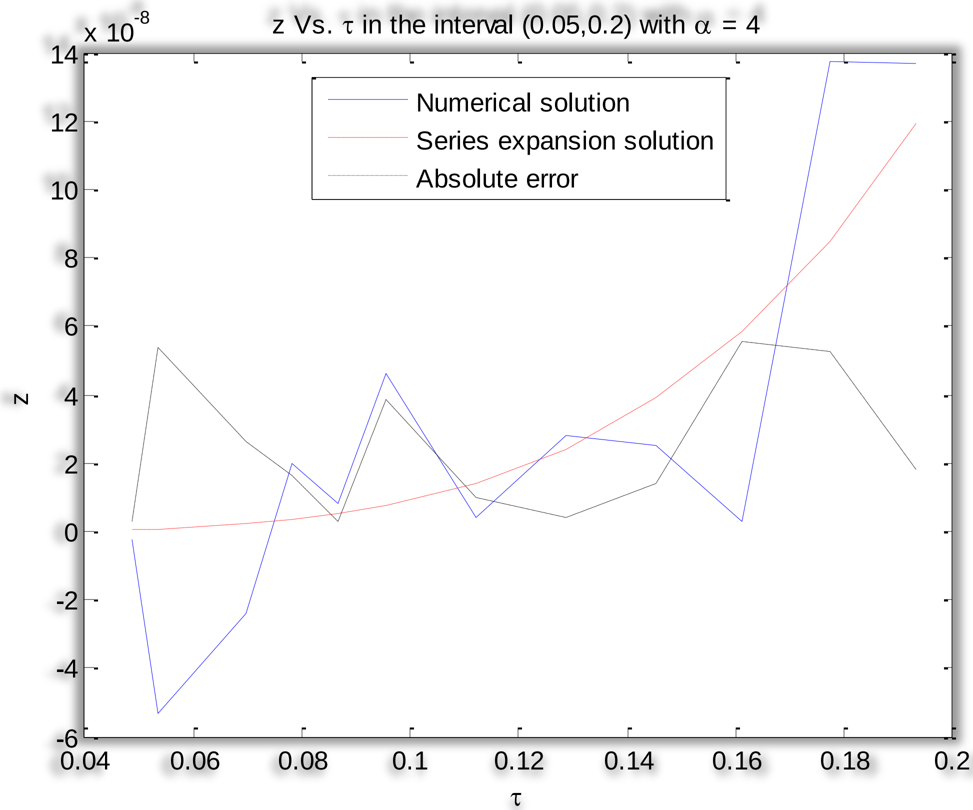

z Vs. τ in the interval (0.05,4) with α = 4
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

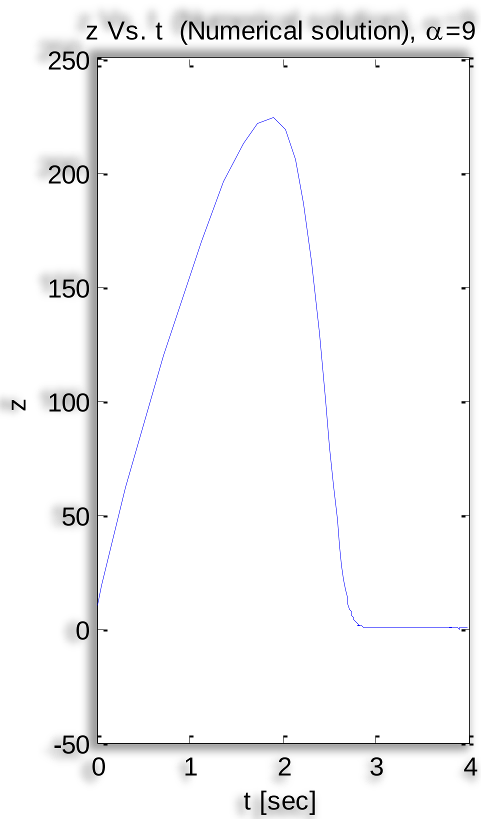


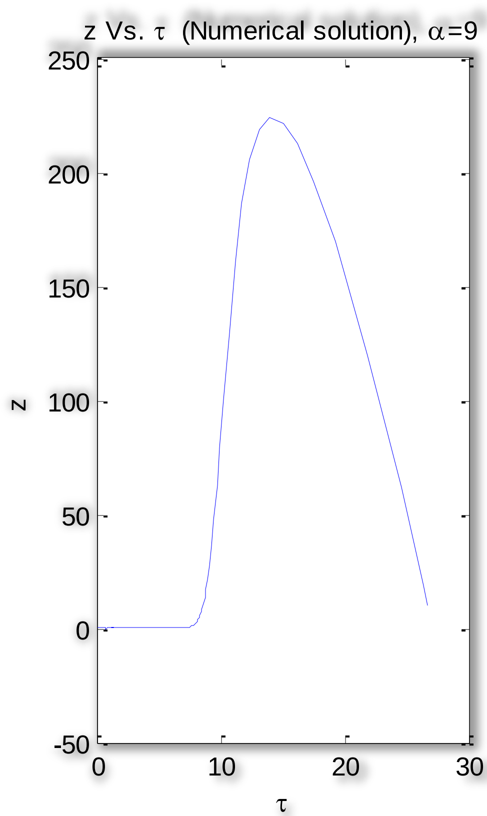
z Vs. τ in the interval (0.05,2) with α = 4
x 10^-3
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

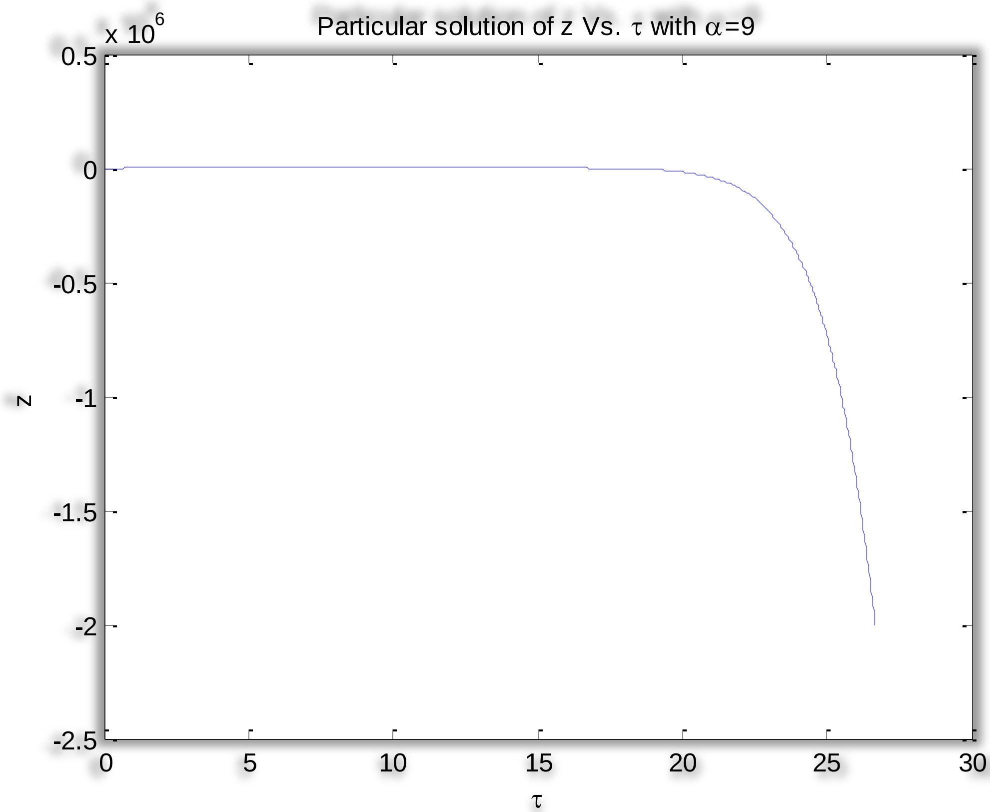


z Vs. τ in the interval (0.05,0.8) with α = 4
x 10^-5
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8

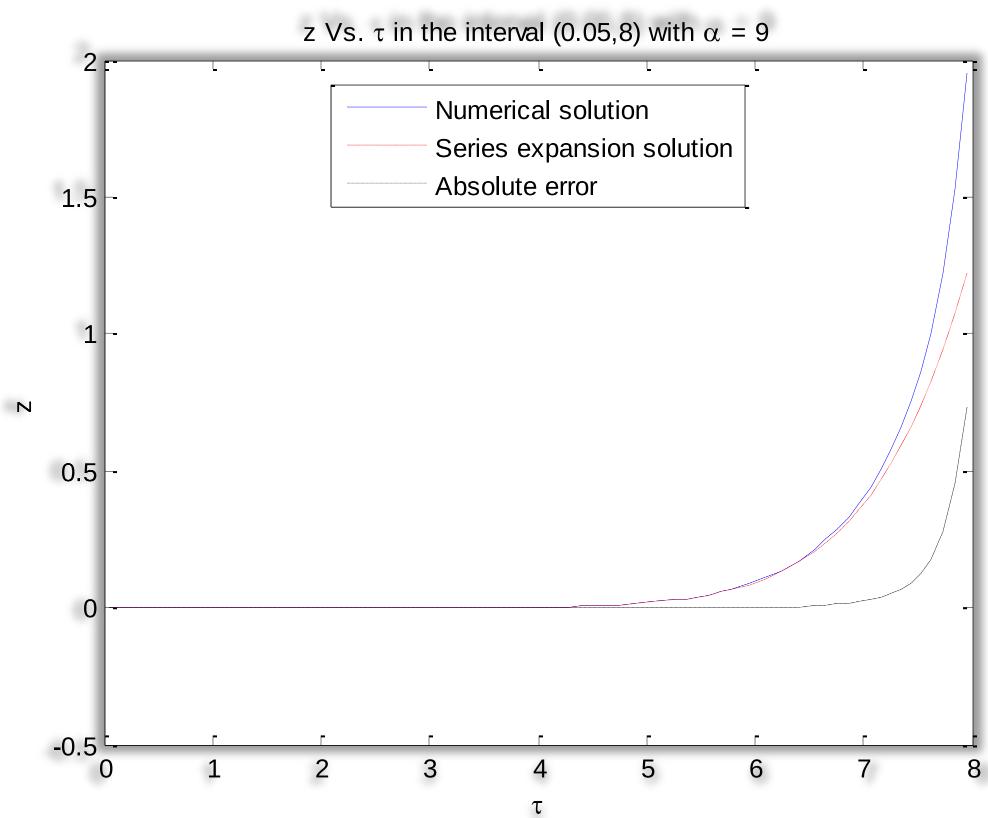

z Vs. τ in the interval (0.05,0.2) with α = 4
x 10^-8
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2


z Vs. t (Numerical solution), α=9
z
t [sec]
250
200
150
100
50
0
-50
0
1
2
3
4

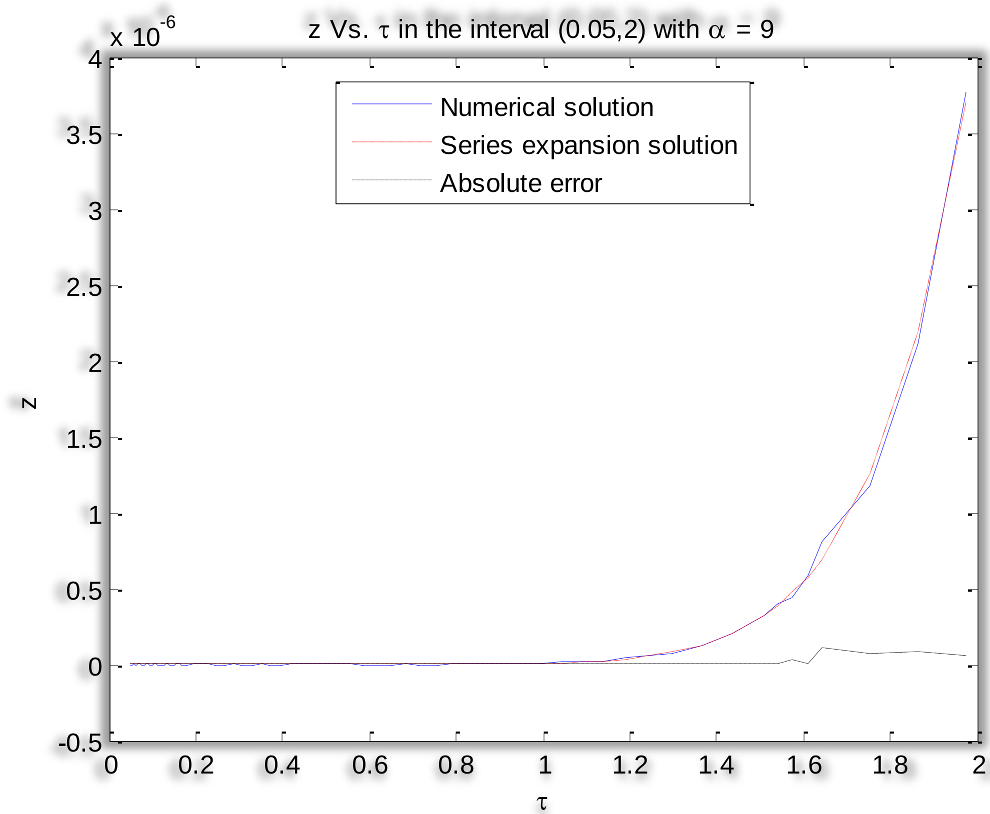

z Vs. τ (Numerical solution), α=9
z
τ
250
200
150
100
50
0
-50
0
10
20
30

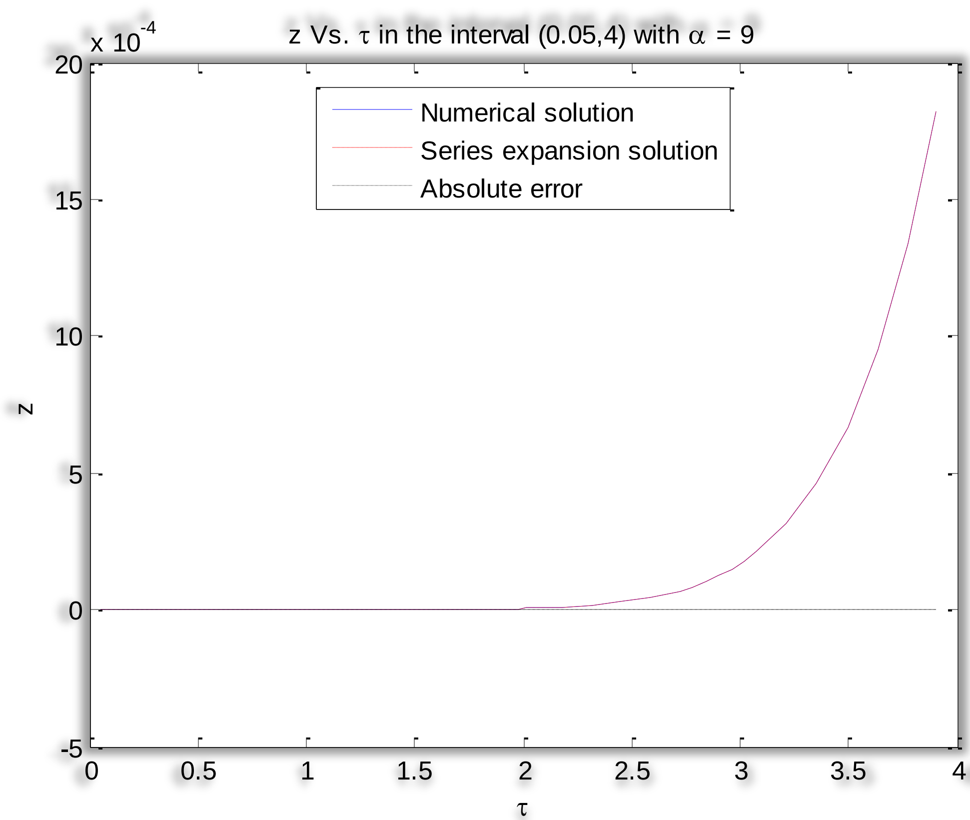


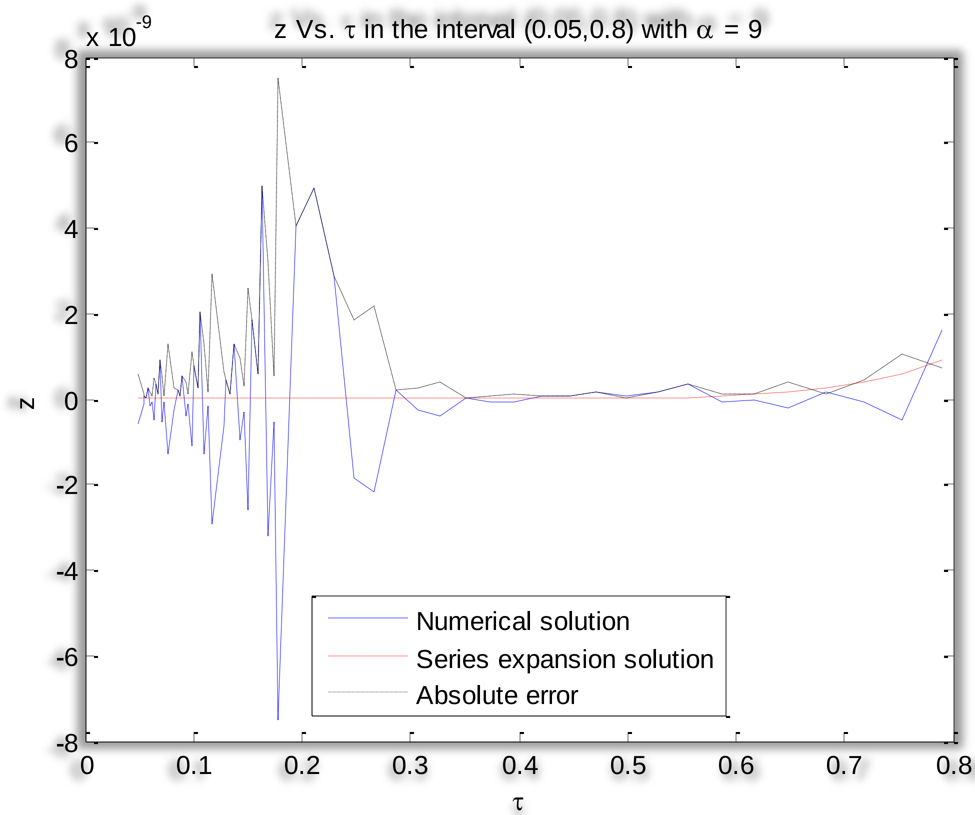
Particular solution of z Vs. τ with α=9
x 10^6
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
z
0
5
10
15
20
25
30
τ

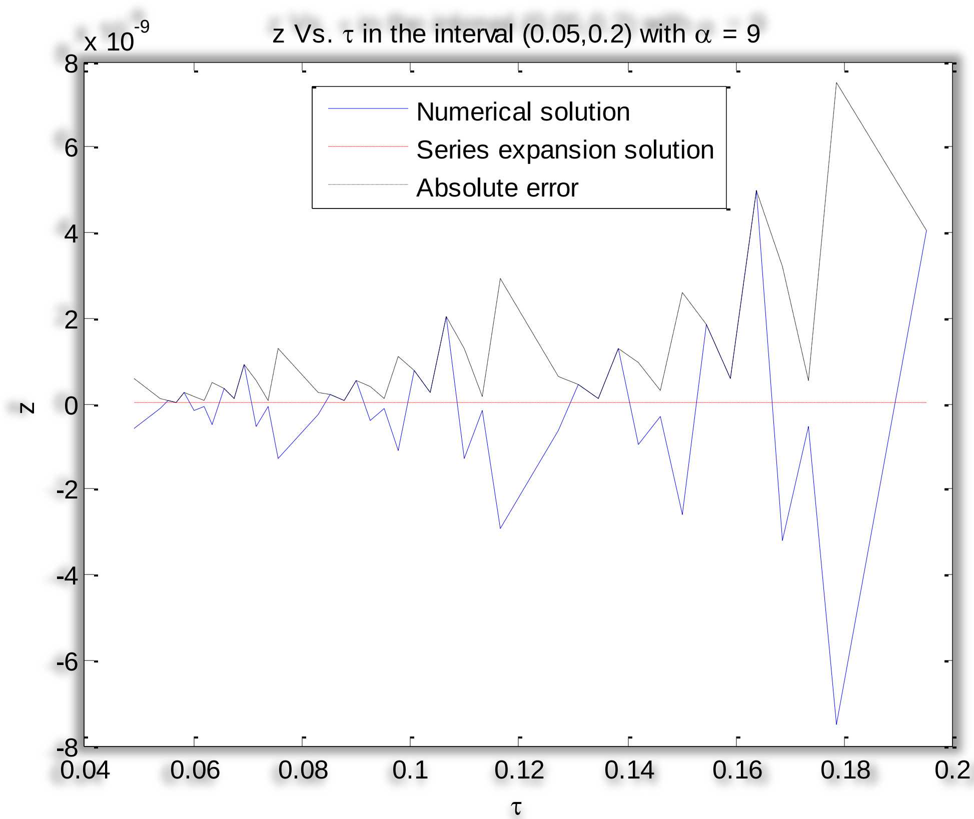


z Vs. τ in the interval (0.05,8) with α = 9
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
z
0
1
2
3
4
5
6
7
8
τ


z Vs. τ in the interval (0.05,2) with α = 9
x 10^-6
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
z
τ


z Vs. τ in the interval (0.05,4) with α = 9
x 10^-4
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
20
15
10
5
0
-5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
z
τ


z Vs. τ in the interval (0.05,0.8) with α = 9
x 10^-9
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ


z Vs. τ in the interval (0.05,0.2) with α = 9
x 10^-9
Numerical solution
Series expansion solution
Absolute error
z
τ

5 סיכום

בראשית התהליך הוגדר נושא העבודה ומטרתה כ "פיתוח אסימפטוטי למשוואת רודף נרדף בסביבת נק' סינגולרית". את בעיה זו פתרנו בשני שלבים. ראשית התחלנו מהמקרה הראשון (פרק 4.3), הפשוט עבור קירוב מסדר שני למשוואה. ומשם ניגשנו לפתרון המקרה השני (פרק 4.6) בו המשוואה ללא קרובים אלא כטורים אינסופיים. לאחר שקיבלנו את הפתרונות בשני המקרים, נוכחנו לדעת כי הם שונים בתכלית. פתרון המקרה השני הוא בצורת טור פרובניוס ואילו עבור המקרה הראשון קיבלנו טור שונה.

כאשר ניסינו לראות את המקרה הראשון כמקרה פרטי של המקרה השני נתקלנו בקשיים מכיוון שבפתרון כל אחד מהמקרים הנחנו הנחות שונות עקב ידיעת המבנה של המשוואה. אמנם ניסיון ההכללה כשל, אך ברור היה כי ההסבר לשוני בין הפתרונות טמון במעבר בין קירוב מסדר ראשון לטורים אינסופיים. לשם כך הוספנו שלבי ביניים לחקירה, בהם חקרנו התנהגות פתרונות מסדרי ביניים על מנת לזהות את הגורם לשוני בין התנהגות הפתרונות.

לאחר חקירת מקרי הביניים התגלו נוכחנו לדעת כי אכן התנהגות הפתרונות מושפעת מהקירוב וגילונו את הדרך בה מתפתח הפתרון מפתרון שאינו טור פרובניוס לפתרון שהוא טור פרובניוס. עובדה מעניינת נוספת גילינו גם בפיתוח עבור קירוב מסדר שני ל - $f(\tau)$ וקירוב מסדר שלישי ב - $g(\tau/\epsilon)$ (פרק 4.4) כאשר $\alpha = 4$. במקרה זה קיבלנו כי

$$c_0 = \frac{a_2}{a_1\epsilon^2}, \qquad c_1 = \frac{2a_2}{a_1\epsilon^2}\left(\frac{4}{a_1} - \frac{1}{3!\,\epsilon}\right) \tag{6.1}$$

$$c_n = \left(\frac{2}{a_1}\right)c_{n-1}\beta_{n-1} = \left(\frac{2}{a_1}\right)^{n-1} c_1\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n-1} \tag{6.2}$$

כלומר אם מתקיים

$$\frac{4}{a_1} = \frac{1}{3!\,\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\mu A} = \frac{1}{6\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon}{\mu A} = \frac{1}{24}$$

נקבל כי

$$c_0 = \frac{1}{\mu A\epsilon}, \quad c_n = 0, \;\; n \neq 0$$

$$c_0 = \frac{1}{24\epsilon^2}, \quad c_n = 0, \;\; n \neq 0$$

כלומר נוכל לקבל פתרון מדויק והוא :

$$z = \frac{1}{24\epsilon^2}\tau^4 \qquad (6.3)$$

לסיכום ובנימה אישית אוכל לומר כי העבודה והחקירה שביצעתי העשירו את ידיעותי בתחום, העלו עניין ואף גרמו לי להשתמש בכלים רבים ובקורסים רבים אותם למדתי עד כה (משוואות דיפרנציאליות, מודלים מתמטיים, חדוו"א אלגברה, אותות ומערכות, מערכות דינמיות וכו') וליישם אותם .

ברצוני להודות גם לפרופ' ולרי גליזר על ההנחיה המסורה והעניינית, על העזרה וההפניה למקומות הרלוונטיים בעת הצורך.

6 ביבליוגרפיה

1. “Continuous Feedback Control Strategy with Maximal Capture Zone in a Class of Pursuit Games” V.Turetsky and V.Y.Glizer. – International Game Theory Review, Vol 7, No 1 (March 2005), p. 1-24.
2. “Differential Equations with Boundary-Value Problems”, Dennis G. Zil and Michael R. Cullen, 7^{th} edition - Brooks/Cole 2009.
3. Lecture notes, 18.305 class,MIT, fall 2004 - “Advanced Analytic Methods in Science and Engineering” by Prof. Hung Cheng. – MIT OpenCourseWare
   URL: http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-305-advanced-analytic-methods-in-science-and-engineering-fall-2004/
4. "Applied asymptotic analysis" - Peter David Miller – American Mathematical Society – 2006.
5. “Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations” - Wolfgang Richard Wasow – General Publishing Company, 1965