

Department of
Mathematics



המחלקה
למתמטיקה

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

אסטרטגיות אופטימליות במודל רודף נרדף

כהן יובל

Optimal strategies in a pursuer evader model

Cohen Yuval

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

אסטרטגיות אופטימליות במודל רודף נרדף

כהן יובל

Optimal strategies in a persuer evader model

Cohen Yuval

Advisor:
Professor Glizer
Valery

מנחה:
פרופסור
גליזר ולרי

Karmiel

כרמיאל

2013

תוכן עיניינים

1. מבוא-----	ע"מ 4
2. משחקים דיפרנציאליים רציפים-----	ע"מ 8
א. Open-loop method-----	ע"מ 11
ב. Feedback method-----	ע"מ 15
ג. חקירה של המודל הסקלרי-----	ע"מ 19
ד. חקירת הפונקציונל במקרה הסקלרי-----	ע"מ 28
ה. הצגת הבעיה הסינגולרית ורגולריזציה-----	ע"מ 29
3. דוגמאות:	
א. דוגמה למקרה הסקלרי-----	ע"מ 37
ב. דוגמה למקרה המטריצי-----	ע"מ 41
4. נספח א'-----	ע"מ 45
5. נספח ב'-----	ע"מ 47
6. סיכום ומסקנות-----	ע"מ 49
7. ביבליוגרפיה-----	ע"מ 50
8. תודות-----	ע"מ 51

מבוא

בתורת המשחקים משחק דיפרנציאלי הוא משחק שפעולות השחקנים בו משפיעות על הדינמיקה של מערכת דינמית, שהדינמיקה שלה מתוארת במערכת של משוואות דיפרנציאליות.

לדוגמה, שני שחקנים שולטים בתנועות של נקודה על מסך מחשב; האחד באמצעות חוגה הקובעת את התנועה למעלה או למטה, והשני באמצעות חוגה הקובעת תנועה ימינה או שמאלה. המסך כולל אזורים שבהם השחקן הראשון צובר נקודות, ואזורים אחרים שבהם השחקן השני צובר נקודות. דוגמה דומה, אך מורכבת יותר: שני טייסים אוחזים בהגאי מטוס, המגיב לתנועות שניהם. בין אם הטייסים תומכים זה בזה ובין אם מטרותיהם שונות, קיימת פונקציית מטרה המאפשרת לתאר את התהליך כמשחק דיפרנציאלי.

הגדרת המשחק:

הסעיפים הבאים מתארים משחק בין שני שחקנים. נתונה מערכת דינמית, שמתוארת על ידי משוואת המצב הבאה :

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad x(t_0) = x_0$$

כאשר במערכת הזאת:

- x וקטור המצב של המערכת, השייך לתחום אפשרי של וקטורי מצב $D \in R^n$ (בעבודתי הגדרתי $D = R^n$)
- u וקטור הבקרה שמפעיל שחקן 1, השייך לתחום מותר U , שחקן זה מנסה למזער את אינדקס הביצועים (ראו בהמשך).
- v וקטור הבקרה שמפעיל שחקן 2, השייך לתחום מותר V , שחקן זה מנסה להגדיל את אינדקס הביצועים (ראו בהמשך).

למערכת הזאת מוגדר אינדקס ביצועים באופן הבא :

$$J = G\{x(t_f)\} + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, v) dt$$

כאן L היא פונקציה של וקטור המצב ווקטורי הבקרה.

אופן הפתרון:

ההמילטוניאן הוא פונקציה חשובה מאוד במכניקה אנליטית ובפיזיקה המודרנית. ההמילטוניאן הוא פונקציה המהווה אפיון שלם של מערכת פיזיקלית: באמצעות ההמילטוניאן וחוקי הפיזיקה אפשר לגזור את משוואות התנועה של המערכת הפיזיקלית המתוארת על ידי ההמילטוניאן. במילים אחרות, הצורה של ההמילטוניאן קובעת את ההתפתחות של המערכת בזמן. השם המילטוניאן נובע משמו של המתמטיקאי האירי ויליאם רואן המילטון.

בדומה לבקרה אופטימלית משתמשים בפונקציה הנקראת המילטוניאן, שמשלבת בתוכה את אינדקס הביצועים, את משוואות המערכת באמצעות כופלי לגראנז' ואת אילוצי המערכת. להלן ההמילטוניאן של המשחק המתואר:

$$H(x, u, v, \lambda) = L(x, u, v) + \lambda^T f(x, u, v)$$

יש לציין כי במקרה שלנו מתקיים $\lambda = \lambda(t)$, יהא λ כופל לגראנז'.

ומכאן פותרים באופן דומה לפתרון של המילטוניאן בבקרה אופטימלית, כלומר גוזרים את ההמילטוניאן לפי וקטור המצב ולפי וקטור כופלי הלגראנז'. מקבלים סט של משוואות דיפרנציאליות, המורכב ממשוואות המערכת הדינמית וממשוואות דיפרנציאליות לכופלי הלגראנז' עם תנאי התחלה של וקטור המצב ותנאי סיום על וקטור כופלי הלגראנז'.

המשוואות של אייזיקס:

המשוואה הראשונה עוסקת ביחס שבין ערכי ההמילטוניאן שנקבל כאשר u ישחק באסטרטגיה אופטימלית, שני השחקנים ישחקו כך, או רק v .

$$H(x, \lambda, u^*, v) \leq H(x, \lambda, u^*, v^*) \leq H(x, \lambda, u, v^*)$$

משוואה זו אומרת, במלים פשוטות, שהערך של ההמילטוניאן אם רק u ישחק באופן אופטימלי יהיה קטן יותר מאשר הערך שיתקבל אם שני הצדדים ישחקו באופן אופטימלי. אם רק v ישחק באופן אופטימלי הערך של ההמילטוניאן יהיה גדול עוד יותר. זה מובן מראש, כיוון

שההמילטוניאן תלוי באינדקס הביצועים, ותפקידו של u למזער את אינדקס זה בעוד v מנסה להגדיל את אינדקס הביצועים למקסימום.

המשוואה השנייה קובעת שאם שני השחקנים יפעלו באסטרטגיה אופטימלית אזי:

$$H(x, \lambda, u^*, v^*) = 0$$

מציאת האסטרטגיות האופטימליות:

בעבודתי ארצה למצוא את האסטרטגיות האופטימליות של השחקנים u ו v . נזכיר ששחקן u מעוניין להקטין את אינדקס הביצועים ואילו שחקן v מעוניין להגדילו. לכן אנו מחפשים את שיווי המשקל בין שני הרצונות הללו. שיווי המשקל מתבטא ע"י ההמילטוניאן של המערכת במצב שיווי משקל.

$$u^*, v^* = \arg\{\min_{u \in U} \max_{v \in V} H(x, \lambda, u, v)\}$$

סוגי מערכות בקרה:

את מערכות הבקרה מסווגים לשני סוגים עיקריים:

- מערכת **בקרה בחוג פתוח** (open loop control system), שבה אין משוב (feedback) מיחידת המדידה אל מנגנון ההפעלה באשר לתוצאות הביצוע של התהליך. למשל: חימום אוכל במיקרוגל תלוי אך ורק בזמן שהגדרנו ולא למצב האוכל אחרי הפעולה.
- מערכת **בקרה בחוג סגור** (closed loop control system), שבה תלויה פעולת התיקון של הבקר במשוב של תוצאת התהליך המבוקר. יחידת המדידה, המודדת את תוצאות התהליך, משפיעה בצורה ישירה על מנגנון התיקון או ההפעלה. המשוב הוא קבלת מידע עדכני על מצב המערכת ותנאי הסביבה. המשוב מבצע עדכון של פקודות הפעולה. למשל: מזגן ביתי.

מהות העבודה:

נגדיר משחק דיפרנציאלי כך (כמוזכר למעלה):

$$\dot{x} = f(x, u, v), \quad x(t_0) = x_0$$

ונגדיר את הפונקציונל:

סימונים:

$$t_f = \text{זמן סופי.}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X(t_f)$ - פונקציה המשלבת את המסלול של הרודף והנרדף מחושבת בזמן הסופי.

נזכיר שמשמעות הסימון $\|\vec{z}\|_B^2 = \vec{z}^T B \vec{z}$, כאן $\vec{z} \in R^n$ ו- $B \in R^{n \times n}$

$$J = \frac{1}{2} \|X(t_f)\|_I^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\|u\|_{R_p}^2 - \|v\|_{R_e}^2) dt$$

ניתן לראות כי הפונקציונל (אינדקס הביצועים) תלוי במטריצה R_p . בהמשך העבודה אסתמך על העובדה כי האסטרטגיה האופטימלית של הרודף תלויה בקיומה של המטריצה R_p^{-1} . לכן יש לדרוש כי המטריצה R_p (מטריצת משקולות עבור האסטרטגיה של הרודף בפונקציונל) תהייה חיובית ממש. אחד התנאים המוזכרים פה הינו $R_p > 0$, כלומר מטריצת המשקולות בבקרת ה"הוצאות" של הרודף הינה מטריצה המוגדרת חיובית (או במקרה הסקלרי מספר חיובי ממש).

בעבודתי אנסה להרחיב את התיאוריה ולהראות פיתרון במקרה בו מטריצת המשקולות בבקרת ה"הוצאות" של הרודף הינה מטריצה המוגדרת אי-שלילית (ובפרט 0).

במצב זה נאמר כי אין אילוצים על ה"הוצאות" של הרודף וכל המשאבים זמינים עבורו.

משחקים דיפרנציאליים רציפים

כאשר מונח לפנינו משחק דיפרנציאלי רציף משמעות הדבר היא שאנו מחפשים וקטורי בקרה אופטימלית רציפים מכאן נובע שגם פונקציית ה"תשלום" $L(u, v)$ (payoff function) רציפה, וזאת בניגוד למקרה הבדיד בה פונקציית ה"תשלום מוגדרת" בצורת מטריצה מטריצה L_{ij} .

המטרה של u , וקטור הבקרה של הרודף, היא למזער את ערך פונקציית התשלום.

המטרה של v , וקטור הבקרה של הנרדף, היא להגדיל את ערך פונקציית התשלום.

פונקציית ה"תשלום" מוגדרת כך, שבהינתן קיומו של הזוג (u^*, v^*) נקבל:

$$L(u^*, v) \leq L(u^*, v^*) \leq L(u, v^*)$$

תנאים הכרחיים ומספיקים עבור הזוג (u^*, v^*) :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \geq 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \leq 0$$

זוג (u^*, v^*) המקיים את התנאים הללו יקרא *'game theory saddle point'*

נשים לב שמושג זה שונה מהמושג שאנו מכירים מהחשבון הדיפרנציאלי *'calculus saddle point'* שם האי שוויונות שדרשנו במקרה שלנו הופכים לאי שוויון אחד:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial v} \leq 0$$

הצגת המשחק הדיפרנציאלי הלינארי ריבועי:

קיימים אינסוף משחקים דיפרנציאליים שניתן להגדיר, בעבודתי אעסוק בתת קבוצה של המשחקים הדפרנציאליים הקרויים "לינאריים ריבועיים" על שום הלינאריות במשוואות הדינמיקה של המערכת והפונקציונל הריבועי.

סימונים עבור השחקן הרודף ובסימטריה נגדיר עבור השחקן הנרדף.

נסמן ב- p את הרודף מהמילה (*pursuer*) ונסמן ב- e את הנרדף מהמילה (*evader*).

נגביל את עצמינו כרגע, לשם פשטות הכתיבה ל- R^2 .

נסמן את הטרקטוריה של הרודף כך-

$$x_p = (x_{1p}, x_{2p}).$$

נסמן את כופלי הלגרנז' בהמילטוניאן עבור אילוצי הרודף כך-

$$\lambda_p(t) = (\lambda_{1p}(t), \lambda_{2p}(t)).$$

נסמן את האסטרטגיה של הרודף כך-

$$u = (u_1, u_2)$$

וכמו כן, נגדיר:

$$F_p = \begin{pmatrix} F_{1p} & F_{2p} \\ F_{3p} & F_{4p} \end{pmatrix} \quad G_p = \begin{pmatrix} G_{1p} & G_{2p} \\ G_{3p} & G_{4p} \end{pmatrix} \quad R_p = \begin{pmatrix} R_{1p} & R_{2p} \\ R_{3p} & R_{4p} \end{pmatrix}$$

כאן מתקיים, $R_{2p} = R_{3p}$, כלומר, מטריצה R_p סימטרית.

כעת לאחר שהגדרנו את הסימונים, נגדיר את המשחק הלינארי ריבועי.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= F_p(t)x_p + G_p(t)u, \quad x_p(t_0) = x_{p0} \\ \dot{x}_e &= F_e(t)x_e + G_e(t)v, \quad x_e(t_0) = x_{e0} \\ f(x_e(t_f), x_p(t_f)) &= \frac{1}{2} \|x_e(t_f) - x_p(t_f)\|_A^2, \quad t_f = \text{זמן סיום} \end{aligned}$$

נגדיר את הפונקציונל של המערכת:

$$J = \frac{1}{2} \|x_p(t_f) - x_e(t_f)\|_I^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\|u\|_{R_p}^2 - \|v\|_{R_e}^2) dt$$

הצגת ההמילטוניאן של המערכת:

נחזור לרגע למה שהוסבר במבוא, כעת אנו ניצבים מול בעיית אופטימיזציה עבור כל אחד מהשחקנים ולכל שחקן קיימים האילוצים עבורו, את הבעיה נפתור תוך שימוש בכופלי לגרנז'.

$$H = \lambda_p^T (F_p(t)x_p + G_p(t)u) + \lambda_e^T (F_e(t)x_e + G_e(t)v) - \frac{1}{2} (\|u(t)\|_{R_p}^2 - \|v(t)\|_{R_e}^2)$$

תנאים עבור ההמילטוניאן:

$$\dot{\lambda} = -H_x \quad \lambda^T(t_f) = f_{x(t_f)} \quad H_u = 0 \quad H_v = 0$$

ומתוך כל נרצה למצוא את זוג האסטרטגיות האופטימליות (u^*, v^*)

$$H^* = \min_u \max_v H$$

במהלך העבודה אראה שתי שיטות פיתרון, שיטת feedback ושיטת open-loop.

שיטת open-loop

נרכיב לפי המודל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\partial H}{\partial x_p} &= (\lambda_{1p}F_{1p} + \lambda_{2p}F_{3p}, \lambda_{1p}F_{2p} + \lambda_{2p}F_{4p}) = -\dot{\lambda}_p \\
 (2) \quad \frac{\partial H}{\partial x_e} &= (\lambda_{1e}F_{1e} + \lambda_{2e}F_{3e}, \lambda_{1e}F_{2e} + \lambda_{2e}F_{4e}) = -\dot{\lambda}_e \\
 (3) \quad \frac{\partial H}{\partial u_1} &= (\lambda_{1p}G_{1p} + \lambda_{2p}G_{3p}) - \frac{1}{2}(2u_1R_{1p} + u_2(R_{2p} + R_{3p})) = 0 \\
 (4) \quad \frac{\partial H}{\partial u_2} &= (\lambda_{1p}G_{2p} + \lambda_{2p}G_{4p}) - \frac{1}{2}(u_1(R_{2p} + R_{3p}) + 2u_2R_{4p}) = 0 \\
 (5) \quad \frac{\partial H}{\partial v_1} &= (\lambda_{1e}G_{1e} + \lambda_{2e}G_{3e}) + \frac{1}{2}(2v_1R_{1e} + v_2(R_{2e} + R_{3e})) = 0 \\
 (6) \quad \frac{\partial H}{\partial v_2} &= (\lambda_{1e}G_{2e} + \lambda_{2e}G_{4e}) + \frac{1}{2}(v_1(R_{2e} + R_{3e}) + 2v_2R_{4e}) = 0
 \end{aligned}$$

נכתוב את משוואות (3),(4) בצורה מטריצית:

$$D = \begin{pmatrix} R_{1p} & \frac{1}{2}(R_{2p} + R_{3p}) \\ \frac{1}{2}(R_{2p} + R_{3p}) & R_{4p} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda_{1p}G_{1p} + \lambda_{2p}G_{3p} \\ \lambda_{1p}G_{2p} + \lambda_{2p}G_{4p} \end{pmatrix}$$

$$D\vec{u} = \vec{b} \quad \text{ניתן לראות כי מתקיים:}$$

ולכן, בהנחה שמטריצה D הפיכה, ניתן לרשום את הפיתרון כך:

$$\vec{u} = D^{-1}\vec{b}$$

נשים לב כי מתקיים:

$$\vec{u} = R_p^{-1}\vec{b} \quad \text{אם } R_p = D \text{ מטריצה סימטרית אזי מתקיים}$$

$$\vec{b} = G_p^T \lambda_p \quad \text{** מתקיים:}$$

ולכן, בהינתן שתי המסקנות האלו נוכל לומר: $\vec{u} = R_p^{-1}G_p^T \lambda_p$

באותה צורה, ע"י כתיבת משוואות (5),(6) בצורה מטריצית נקבל:

$$-M = \begin{pmatrix} R_{1e} & \frac{1}{2}(R_{2e} + R_{3e}) \\ \frac{1}{2}(R_{2e} + R_{3e}) & R_{4e} \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \lambda_{1p}G_{1e} + \lambda_{2p}G_{3e} \\ \lambda_{1p}G_{2e} + \lambda_{2p}G_{4e} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = -M^{-1}\vec{c}$$

ולאחר הפעלת שתי המסקנות הסימטריות, נוכל לומר:

$$\vec{v} = -R_e^{-1}G_e^T\lambda_e$$

כעת ניגש לטיפול במשוואות (1), (2):

בכתיב מטריצי נוכל לכתוב:

$$\dot{\lambda}_p = -F_p^T(t)\lambda_p$$

$$\dot{\lambda}_e = -F_e^T(t)\lambda_e$$

לפי המודל הקיים, מתקיים:

$$f(x(t_f), x(t_f)) = \frac{1}{2} \|x_e(t_f) - x_p(t_f)\|_A^2$$

$A = I_2$ (מטריצת היחידה בגודל 2×2), נשים לב כי A היא מטריצה חיובית וסימטרית.

ע"פ המודל מתקיים:

$$\lambda_p(t_f) = -\frac{\partial f}{\partial x_p}$$

$$\lambda_e(t_f) = -\frac{\partial f}{\partial x_e}$$

$$\dot{\lambda}_p(t) = -F_p\lambda_p \rightarrow \lambda_p(t) = e^{-F_p(t-t_f)}C_0 \quad c_0 \in R^2$$

נניח כי F_p היא מטריצה לכסינה ו Λ_p מטריצת הערכים העצמיים ולכן נוכל לכתוב:

$$F_p(t) = P\Lambda_p P^{-1}$$

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 \neq \theta_2$$

$$\lambda_p(t) = e^{-P\Lambda_p(t-t_f)P^{-1}}C_0 = Pe^{-\Lambda_p(t-t_f)}P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\theta_1(t-t_f)} & 0 \\ 0 & e^{\theta_2(t-t_f)} \end{pmatrix} P^{-1}C_0$$

עבור הנרדף נקבל את אותה התוצאה באופן סימטרי:

$$\lambda_e(t) = e^{-M\Lambda_e(t-t_f)M^{-1}}W_0 = Me^{-\Lambda_e(t-t_f)}M^{-1}$$

$$= M \begin{pmatrix} e^{\mu_1(t-t_f)} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2(t-t_f)} \end{pmatrix} M^{-1}W_0$$

M-מטריצת וקטורים עצמיים של נרדף.

P-מטריצת וקטורים עצמיים של רודף.

ע"פ המודל מתקיים:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= R_p^{-1} G_p^T \lambda_p \\ \vec{v} &= -R_e^{-1} G_e^T \lambda_e\end{aligned}$$

ראינו קודם לכן כי מתקיים,

$$\begin{aligned}\lambda_p(t_f) &= -\frac{\partial f(x_p(t_f), x_e(t_f))}{\partial x_p(t_f)} \\ &= (x_{1e}(t_f) - x_{1p}(t_f), x_{2e}(t_f) - x_{2p}(t_f))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_e(t_f) &= -\frac{\partial f(x_p(t_f), x_e(t_f))}{\partial x_e(t_f)} \\ &= -(x_{1e}(t_f) - x_{1p}(t_f), x_{2e}(t_f) - x_{2p}(t_f))\end{aligned}$$

ולכן ניתן לכתוב:

$$\lambda_p(t) = -e^{-F_p^T(t-t_f)} \frac{\partial f(x_p(t_f), x_e(t_f))}{\partial x_p(t_f)}$$

$$\lambda_e(t) = -e^{-F_e^T(t-t_f)} \frac{\partial f(x_p(t_f), x_e(t_f))}{\partial x_e(t_f)}$$

כעת, ננסה להציב את מה שחישבנו בדינמיקה של המערכת:

המשחק כפי שהוצג:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = F_p x_p + G_p U, & x_p(0) = x_{p0} \\ \dot{x}_e = F_e x_e + G_e V, & x_e(0) = x_{e0} \end{cases}$$

הצבת האסטרטגיות האופטימליות u^* ו- v^* :

$$\begin{cases} \dot{x}_p = F_p x_p + G_p R_p^{-1} G_p^T \lambda_p \\ \dot{x}_e = F_e x_e - G_e R_e^{-1} G_e^T \lambda_e \end{cases}$$

הצבת $\lambda_p(t)$ ו- $\lambda_e(t)$ כפי שחושב קודם לכן:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = F_p x_p + G_p R_p^{-1} G_p^T \lambda_p = F_p x_p - G_p R_p^{-1} G_p^T e^{-F_p^T(t-t_f)} \frac{\partial f}{\partial x_p} \\ \dot{x}_e = F_e x_e + G_e R_e^{-1} G_e^T \lambda_e = F_e x_e + G_e R_e^{-1} G_e^T e^{-F_e^T(t-t_f)} \frac{\partial f}{\partial x_e} \end{cases}$$

נרצה לחשב את: $\frac{\partial f}{\partial x_e}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial x_p}$

כעת, אם אציב $t = t_f$ במערכת המשוואות האחרונה, נקבל 4 משוואות אלגבריות וכך למצוא ביטוי עבור $x_{1e}(t_f) - x_{1p}(t_f)$, $x_{2e}(t_f) - x_{2p}(t_f)$ וכך להגיע לפיתרון עבור כל t .

$$x_p(t) = e^{F_p^T t} x_{p0} - \int_0^t e^{F_p^T(t-s)} G_p R_p^{-1} G_p^T e^{-F_p^T(s-t_f)} \frac{\partial f}{\partial x_p} ds$$

$$x_e(t) = e^{F_e^T t} x_{e0} + \int_0^t e^{F_e^T(t-s)} G_e R_e^{-1} G_e^T e^{-F_e^T(s-t_f)} \frac{\partial f}{\partial x_e} ds$$

שיטת Feedback

הדינמיקה של המערכת: $\dot{x} = f(x, u, v)$, $x(t_0) = x_0$

הפונקציונל בצורתו הכללית:

$$L(u, v) = q(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} g(t, x(t), u, v) dt$$

נגדיר פונקציה חדשה:

$$\tilde{V}(t, x) = \min_{\gamma_1} \max_{\gamma_2} \left\{ \int_t^{t_f} g(s, x(s), \gamma_1, \gamma_2) ds + q(t_f, x(t_f)) \right\}$$

$$\gamma_1(t, x(t)) = u(t) \quad \gamma_2(t, x(t)) = v(t)$$

תחת ההנחה שהפונקציה הזו קיימת והיא גזירה ברציפות ב x וב t , מתקיימת המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הבאה:

משוואת אייזיקס:

$$\min_u \max_v \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} f(t, x, u, v) + g(t, x, u, v) \right] = - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}$$

$$\tilde{V}(t_f, x) = q_x$$

אנו מניחים כי $g \equiv 0$, וזה לא מהווה אובדן כלליות בגלל הטענה על יציבות מערכות זמן רציפות.

ולכן הפונקציה $\tilde{V}(t, x)$, אם היא קיימת, מוגדרת ע"י:

$$\tilde{V}(t, x) = \min_u \max_v q(t_f, x(t_f)) = \min_v \max_u q(t_f, x(t_f))$$

כך שהמיקום ההתלחתי הוא (t, x) .

כעת, תנאי אייזיקס הופך להיות:

$$\min_u \max_v \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} f(t, x, u, v) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}$$

אם פונקציה V אינה ידועה מראש קיימת שיטה אשר מספקת לנו מערכת של תנאים הכרחיים עבור שיטת open-loop, כהצגה של שיטת הפידבק, למרות שהשיטה הזו לא מספקת פיתרון ישיר עבור שיטת הפידבק היא יעילה ביותר בחישובים עבור שיטת הפידבק.

עבור פונקציות V לא חלקות, לא גזירות ברציפות ניתנו תנאים עבור חלקן במאמר של Bernhard (1977).

משפט:

נניח כי הזוג γ^u, γ^v מספק לנו פתרון עבור נקודת האוכף תחת אסטרטגית Feedback יחד עם $x^*(t)$ המתאר את וקטור המצב של המערכת (הטרקטוריה).

יתרה על כן, נניח כי קיימת הצגה בצורת Open-loop, $\{u(t) = \gamma^u(t, x(t)), v(t) = \gamma^v(t, x(t))\}$

שגם מספק לנו פתרון עבור נקודת האוכף תחת אסטרטגית Open-loop.

אזי קיימת הפונקציה (costate function) $p(\cdot): [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, הפונקציה הזו מקיימת את הקשרים הבאים:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -\frac{\partial}{\partial x} H(t, p(t), x^*(t), u^*, v^*) \\ \dot{p}(T) &= \frac{\partial}{\partial x} q(t_f, x^*(t_f)) \quad \text{יחד עם} \quad L(t_f, x) = 0.\end{aligned}$$

היכן ש-

$$H(t, p, x, u, v) = g(t, x, u, v) + p' f(t, x, u, v)$$

דוגמה, הגברת באגם (lady in the lake) פיתרון בשיטת open-loop לא קיים אך פתרון בשיטת feedback קיים.

התנאי של אייזיקס:

$$\min_u \max_v [p' f + g] = \max_v \min_u [p' f + g]$$

- התנאי של אייזיקס מתקיים אם גם u וגם v ניתנות להפרדה.
- אם תנאי אייזיקס לא מתקיים וגם רק אסטרטגיות Feedback מותרות אזי צריך לחפש שיווי משקל במחלקה כללית יותר של אסטרטגיות מעורבות מוגדרות במרחבי אסטרטגיות Feedback.

בעבודתי אדון רק במקרים בהם תנאי אייזיק מתקיים.

נחזור לדון במשחק הלינארי ריבועי וכעת אציג כעת דרך לפתרון הבעיה בשיטת ה-Feedback.

הדינמיקה של המודל כפי שראינו:

$$\dot{x}_p = F_p x_p + G_p u$$

$$\dot{x}_e = F_e x_e + G_e v$$

נגדיר פונקציה חדשה:

$$X(t) = \phi_p(t_f, t)x_p - \phi_e(t_f, t)x_e$$

כך שמתקיים:

$$\phi_p = \exp(F_p(t_f - t))$$

$$\phi_e = \exp(F_e(t_f - t))$$

נגזור את הפונקציה $X(t)$ לפי הזמן, ונקבל את המשוואה הדפרציאלית הבאה:

$$\dot{X} = H_p(t)u - H_e(t)v$$

עם תנאי בהתחלה: $X(t_0) = \phi_p(T, t_0)x_p(t_0) - \phi_e(T, t_0)x_e(t_0)$
במקרה שלנו מתקיים: $t_0 = 0$.
כך שמתקיים:

$$H_p = \phi_p G_p$$

$$H_e = \phi_e G_e$$

לכן, תחת הפונקציה החדשה שהגדרנו, $X(t)$, הפונקציונל יראה כך:

$$J = \frac{1}{2} \|X(t_f)\|^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\|u\|_{R_p}^2 - \|v\|_{R_e}^2) dt$$

נסמן ב-

$$S_u(t) = H_p R_p^{-1} H_p'$$

$$S_v(t) = H_e R_e^{-1} H_e'$$

היכן שהסימן ' מסמן מטריצה משוחלפת.

אם נתייחס כעת למשוואת ריקאטי נוכל לכתוב את האסטרטגיות האופטימליות בצורה הבאה:

$$\dot{K}(t) = K(S_u - S_v)K, \quad K(t_f) = I$$

$$(**) \begin{cases} \dot{X} = H_p u^* - H_e v^* \\ X(t_0) = \phi_p(T, t_0)x_p(t_0) - \phi_e(T, t_0)x_e(t_0) \end{cases}$$

$$u^* = -R_p^{-1}H_p'K(t)X \quad v^* = -R_e^{-1}H_e'K(t)X$$

כאשר נפתור את המערכת (**) נקבל את האסטרטגיות האופטימליות עבור כל t .

דוגמה סקלרית:

בכדי להדגיש את דרך הפיתרון של המשחק בשתי השיטות (Open-loop, Feedback), אציג דוגמה שבה במקום וקטורים ומטריצות נעבוד עם סקלרים.

פיתרון בשיטת Open-loop כך ש- $x_p, x_e \in R^1$

הדינמיקה במקרה הסקלרי:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= a_p x_p + b_p u & a_p &\neq 0 \\ \dot{x}_e &= a_e x_e + b_e v & a_e &\neq 0\end{aligned}$$

ההמילטוניאן של המערכת במקרה הסקלרי:

$$\begin{aligned}H &= \lambda_p (a_p x_p + b_p u) + \lambda_e (a_e x_e + b_e v) - \frac{1}{2} (||u||_\varepsilon^2 - |v|_\beta^2) \\ R_p &= \varepsilon > 0 & R_e &= \beta > 0\end{aligned}$$

הפונקציונל במקרה הסקלרי:

$$J = \frac{1}{2} (x_p(t_f) - x_e(t_f))^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\varepsilon u^2 - \beta v^2) dt \rightarrow \min_u \max_v J$$

הערה 1

שימו לב כי לפי מקור מידע 6 בנספח הבביליוגרפיה מתקיים כי הערך של הפונקציונל הוא אי שלילי.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_p &= -a_p \lambda_p & \lambda_p(t_f) &= -\frac{\partial f}{\partial x_p} \\ \dot{\lambda}_e &= -a_e \lambda_e & \lambda_e(t_f) &= -\frac{\partial f}{\partial x_e} \\ f(x_e(t_f), x_p(t_f)) &= \frac{1}{2} ||x_e(t_f) - x_p(t_f)||^2 = \frac{1}{2} (x_e(t_f) - x_p(t_f))^2 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_p} &= -(x_p(t_f) - x_e(t_f)) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_e} &= (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \\ \lambda_p &= -(x_p(t_f) - x_e(t_f)) e^{-a_p(t-t_f)} \\ \lambda_e &= (x_p(t_f) - x_e(t_f)) e^{-a_e(t-t_f)}\end{aligned}$$

לפי פתרון בשיטת Open-loop ע"מ 11

$$\begin{aligned}\vec{u}^* &= R_p^{-1} G_p^T \lambda_p \\ \vec{v}^* &= -R_e^{-1} G_e^T \lambda_e\end{aligned}$$

ולכן במקרה שלנו ניתן לרשום:

$$\begin{aligned}u^* &= -\frac{1}{\varepsilon} b_p \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_p(t-t_f)} \\ v^* &= -\frac{1}{\beta} b_e \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_e(t-t_f)} \\ \dot{x}_p &= a_p x_p - b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_p(t-t_f)} \\ \dot{x}_e &= a_e x_e - b_e^2 \frac{1}{\beta} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_e(t-t_f)}\end{aligned}$$

פתרון באמצעות שימוש בשיטת ווריאצית הפרמטר $(t_0 = 0)$:

$$\begin{aligned}x_p(t) &= e^{a_p t} x_p(0) - b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(t+t_f)} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) \int_0^t e^{-2a_p s} ds \\ x_e(t) &= e^{a_e t} x_e(0) + b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{a_e(t+t_f)} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) \int_0^t e^{-2a_e s} ds\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל אשר מופיע לפנינו:

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-2a_p s} ds &= \frac{e^{-2a_p s}}{-2a_p} \Big|_0^t = \frac{(e^{-2a_p t} - 1)}{-2a_p} \\ \int_0^t e^{-2a_e s} ds &= \frac{e^{-2a_e s}}{-2a_e} \Big|_0^t = \frac{(e^{-2a_e t} - 1)}{-2a_e}\end{aligned}$$

נציב את הפיתרון:

$$\begin{aligned}x_p(t) &= e^{a_p t} x_p(0) - b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(t+t_f)} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) \frac{e^{-2a_p t} - 1}{-2a_p} \\ x_e(t) &= e^{a_e t} x_e(0) - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{a_e(t+t_f)} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) \frac{e^{-2a_e t} - 1}{-2a_e}\end{aligned}$$

אם אדע למצוא את $(x_p(t_f) - x_e(t_f))$ אוכל לקבל את הטרקטוריה של הרודף והנרדף עבור כל t .

אם אציב t_f במשוואות המסלול שקיבלתי אקבל 2 משוואות אלגבריות בשני נעלמים אשר ניתנות לפיתרון.

משוואת עבור הטרקטוריה ב- $t = t_f$.

$$(7) \quad x_p(t_f) = e^{a_p t_f} x_p(0) - b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p}$$

$$(8) \quad x_e(t_f) = e^{a_e t_f} x_e(0) - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e}$$

נחסיר את משוואה (8) ממשוואה (7) ונקבל:

$$\begin{aligned} x_p(t_f) - x_e(t_f) &= \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) \\ &\quad - \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} \right. \\ &\quad \left. - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) (x_p(t_f) - x_e(t_f)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_p(t_f) - x_e(t_f)) &+ \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} \right. \\ &\quad \left. - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \\ &= \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) \\ &\quad \left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right) (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \\ &= \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) \end{aligned}$$

לאחר העברת אגפים ופעולות מתמטיות אלמנטריות נוכל לבדוד את הביטוי המבוקש: $(x_p(t_f) - x_e(t_f))$ ולקבל עבורו ביטוי קומפקטי:

$$\begin{aligned} & (x_p(t_f) - x_e(t_f)) \\ &= \frac{(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e}\right)\right)} \end{aligned}$$

כמובן יש לדרוש שהמכנה לא יתאפס ולכן:

$$\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e}\right)\right) \neq 0$$

כעת יש בידנו לרשום את הטרכטוריה הן של הרודף והן של הנרדף עבור כל t .

$$x_p(t) = e^{a_p t} x_p(0) + b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(t+t_f)} \frac{(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e}\right)\right)} \frac{(e^{-2a_p t} - 1)}{-2a_p}$$

$$x_e(t) = e^{a_e t} x_e(0) + b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{a_e(t+t_f)} \frac{(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e}\right)\right)} \frac{(e^{-2a_e t} - 1)}{-2a_e}$$

חישוב האסטרטגיות האופטימליות:

אחרי שחישבנו את הביטוי $(x_p(t_f) - x_e(t_f))$, נוכל למצוא את האסטרטגיות האופטימליות עבור כל t .

$$\begin{aligned}
u^* &= -\frac{1}{\varepsilon} b_p \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_p(t-t_f)} \\
v^* &= -\frac{1}{\varepsilon} b_e \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) e^{-a_e(t-t_f)} \\
&\quad : \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right) \text{ הצבת הביטוי}
\end{aligned}$$

$$u^* = \frac{-\frac{1}{\varepsilon} b_p e^{-a_p(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)}$$

$$u^* = \frac{-\frac{1}{\alpha} b_p e^{-a_p(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (e^{2a_e t_f} - 1) \right) \right)}$$

$$v^* = \frac{-\frac{1}{\beta} b_e e^{-a_e(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)}$$

$$v^* = \frac{-\frac{1}{\beta} b_e e^{-a_e(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (e^{2a_e t_f} - 1) \right) \right)}$$

פיתרון בשיטת Feedback כך ש- $x_p, x_e \in R^1$

נזכור כי בשיטה זו הגדרנו פונקציה "רלטיבית" היוצרת קשר בין x_p ו- x_e .

$$X(t) = \phi_p(t_f, t)x_p - \phi_e(t_f, t)x_e$$

ולכן, לאחר גזירה של הפוקנקציה לפי t נקבל את הדינמיקה של המערכת:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= e^{a_p(t_f-t)} b_p u - e^{a_e(t_f-t)} b_e v \\ x(0) &= e^{a_p t_f} x_{p0} - e^{a_e t_f} x_{e0}\end{aligned}$$

משוואת ריקאטי:

$$\dot{k} = \left[e^{2a_p(t_f-t)} \frac{b_p^2}{\varepsilon} - e^{2a_e(t_f-t)} \frac{b_e^2}{\beta} \right] k^2 \quad k(t_f) = 1$$

אחרי שנבצע אינטגרציה נקבל:

$$-k^{-1} = \frac{\frac{b_p^2}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)}}{-2a_p} - \frac{\frac{b_e^2}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)}}{-2a_e} + c$$

$$k(t) = \frac{1}{\frac{\frac{b_p^2}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)}}{2a_p} - \frac{\frac{b_e^2}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)}}{2a_e} - c}$$

$$k(t_f) = \frac{1}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} - c} = 1$$

חישוב קבוע האינטגרציה:

$$c = -1 + \frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} - \frac{b_e^2}{2\beta a_e}$$

פיתרון סופי עבור משוואת ריקאטי:

$$k(t) = \frac{1}{\frac{\frac{b_p^2}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)}}{2a_p} - \frac{\frac{b_e^2}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)}}{2a_e} + 1 - \frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} + \frac{b_e^2}{2\beta a_e}} =$$

$$\frac{1}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} \left(e^{2a_p(t_f-t)} - 1 \right) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} \left(e^{2a_e(t_f-t)} - 1 \right) + 1}.$$

הערה 2

שימו לב כי לפי מקור מידע מספר 6 בביבליוגרפיה אם קיים פיתרון למשוואת ריקאטי אזי קיים פיתרון למשחק בקטע $[t_0, t_f]$.

מסלול אופטימלי ואסטרטגיות אופטימליות:

$$u^* = -\frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(t_f-t)} b_p k(t) X(t)$$

$$v^* = -\frac{1}{\beta} e^{a_e(t_f-t)} b_e k(t) X(t)$$

$$\dot{X} = e^{a_p(t_f-t)} b_p \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) e^{a_p(t_f-t)} b_p k X + e^{a_e(t_f-t)} b_e \frac{1}{\beta} e^{a_e(t_f-t)} b_e k X$$

$$\dot{X} = \left(-\frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)} b_p^2 + \frac{1}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)} b_e^2 \right) k X$$

פתרון המשוואה הדפרנציאלית:

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{\left(-\frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)} b_p^2 + \frac{1}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)} b_e^2 \right)}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} \left(e^{2a_p(t_f-t)} - 1 \right) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} \left(e^{2a_e(t_f-t)} - 1 \right) + 1}$$

הערה 3

נשים לב כי:

$$\frac{d\left(\frac{1}{k}\right)}{dt} = \left(-\frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p(t_f-t)} b_p^2 + \frac{1}{\beta} e^{2a_e(t_f-t)} b_e^2 \right)$$

אחרי ביצוע האינטגרציה (והתייחסות להערה 3) נקבל:

$$\ln X = \ln \frac{1}{k} + \ln s, \quad s \in R$$

$$X(t) = s \left[\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p(t_f-t)} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e(t_f-t)} - 1) + 1 \right]$$

התייחסות לתנאי ההתחלה עבור המד"ר:

$$\begin{aligned} X(0) &= s \left[\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p(t_f)} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e(t_f)} - 1) + 1 \right] \\ &= e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \end{aligned}$$

חילוץ קבוע האינטגרציה:

$$s = \frac{e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1}$$

הצבת קבוע האינטגרציה בפתרון:

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1} \left(\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p(t_f-t)} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e(t_f-t)} - 1) + 1 \right) \end{aligned}$$

חישוב האסטרטגיה האופטימלית לפי הזמן בשיטת Feedback:

$$u^* = \frac{-\frac{1}{\alpha} e^{a_p(t_f-t)} b_p (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1}$$

$$v^* = \frac{-\frac{1}{\beta} e^{a_e(t_f-t)} b_e (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1}$$

השוואה בין האסטרטגיות האופטימליות אשר חושבו בשתי השיטות השונות Open-loop ו-Feedback.

$$u_{open\ loop}^* = \frac{-\frac{1}{\varepsilon} b_p e^{-a_p(t-t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f})\right)\right)}$$

$$v_{open\ loop}^* = \frac{-\frac{1}{\beta} b_e e^{-a_e(t-t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f})\right)\right)}$$

אנחנו יכולים לראות שבשתי השיטות קיבלנו בדיוק את אותן האסטרטגיות (וגם את אותם המסלולים) הדבר לא מפתיע, כי בהעדר גורמים סטוכסטים או הפרעות כל שהן אין סיבה שיהיה שוני.

חקירת הפונקציונל

בסעיף זה אחקור למעשה את המקרה הלא רגולרי, כלומר, המטריצה R_p (במקרה המטריצי) לא הפיכה ובפרט $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon R_p$.
או במקרה הסקלרי נתבונן בגבול בו $\varepsilon \rightarrow 0$

כזכור הפונקציונל של המערכת ($t_0 = 0$) נראה כך:
כעת, אציב את האסטרטגיות האופטימליות והמסלולים שחושבו קודם לכן:

$$J = \frac{1}{2} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f) \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\varepsilon u^2 - \beta v^2) dt$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)} \right)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \alpha \left[\frac{-\frac{1}{\varepsilon} b_p e^{-a_p(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)} \right]^2 \right.$$

$$\left. - \beta \left[\frac{-\frac{1}{\beta} b_e e^{-a_e(t-t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)} \right]^2 \right\} dt$$

נתיב כעת בפתרון האינטגרל:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_f} (\varepsilon u^2 - \beta v^2) dt = \\
 & \text{נכנס איברים ונקבל:} \\
 & = \int_0^{t_f} \left\{ \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} b_p^2 e^{-2a_p(t-t_f)} - \frac{1}{\beta} b_e^2 e^{-2a_e(t-t_f)} \right) \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \right\} dt \\
 & = \frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \int_0^{t_f} \left(\frac{1}{\varepsilon} b_p^2 e^{-2a_p(t-t_f)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\beta} b_e^2 e^{-2a_e(t-t_f)} \right) dt = \\
 & \quad \frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \left(\frac{b_e^2}{2a_e \beta} e^{-2a_e(t-t_f)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} e^{-2a_p(t-t_f)} \right) \Bigg|_0^{t_f} =
 \end{aligned}$$

אחרי הצבת גבולות האינטגרל נקבל:

$$\frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f})\right)\right)^2} \left[\left(\frac{b_e^2}{2a_e \beta} - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon}\right) - \left(\frac{b_e^2}{2a_e \beta} e^{2a_e t_f} - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} e^{2a_p t_f}\right) \right] =$$

ולבסוף נקבל עבור חישוב האינטגרל את הביטוי:

$$\frac{\left[\frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 + e^{2a_p t_f})\right] \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f})\right)\right)^2}$$

נחזור לחישוב הפונקציונל ונציב את ערך האינטגרל שחישבנו:

$$J = \frac{1}{2} \left(x_p(t_f) - x_e(t_f)\right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\varepsilon u^2 - \beta v^2) dt =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)} \right)^2 + \frac{\left[\frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 + e^{2a_p t_f}) \right] (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \right\}$$

הצגת הבעיה:

כמו שהוסבר במבוא המטריצה R_p חייבת להיות מוגרת חיובית על מנת שתהייה קיימת המטריצה R_p^{-1} או במקרה הסקלרי כמו שמוצג לפנינו חייב להתקיים $\varepsilon > 0$. על מנת להרחיב את התאוריה למקרה בו $\varepsilon \geq 0$ נבדוק את הגבול הבא:

חקירת המקרה בו $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J$:

מוטיבציה:

כאשר אנו בודקים את הגבול בו $\varepsilon \rightarrow 0$ אנחנו בעצם מורידים את ההגבלה על הבקרה של הרודף ובעצם מאפשרים לו לנוע "בכל מחיר".

נזכר כי מתקיים $J \geq 0$ ולכן אם נקבל $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J = 0$ הרי שזו היא התוצאה האופטימלית עבור הרודף, דבר האומר שבאמת בחרנו באסטרטגיה אופטימלית עבורו מאחר והוא רוצה לצמצם כמה שיותר את הפונקציונל.

נחשב את הביטוי $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left[\frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 + e^{2a_p t_f}) \right] \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \right\} \end{aligned}$$

נחשב את הגבול בנפרד בכל חלק בסכום:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)} = 0 \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 + e^{2a_p t_f}) \right] \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

הערה 4

קל לראות שבאיבר השני בסכום מופיע במכנה האיבר ε^2 ובמונה מופיע האיבר ε^1 , לכן המכנה שואף לאינסוף יותר מהר מהמונה ובסך הכל השבר כולו שואף ל-0. ניתן לחישוב ישיר ע"י כלל לופיטל מאחר ומודבר באי ודאות מהסוג $\frac{\infty}{\infty}$.

סיכום:
קיבלנו כי

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)} \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\left[\frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) - \frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 + e^{2a_p t_f}) \right] \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right)^2}{\left(1 - \left(\frac{b_p^2}{2a_p \varepsilon} (1 - e^{2a_p t_f}) - \frac{b_e^2}{2a_e \beta} (1 - e^{2a_e t_f}) \right) \right)^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (0 + 0) = 0
 \end{aligned}$$

נעת נחקור את המסלולים בשתי השיטות Open-loop, Feedback בזמן סופי (t_f) אך נעת כפונקציה של α .

כמו שהוסבר קודם לכן, אלו הם המסלולים של הרודף והנרדף כאשר $t = t_f$.

$$\begin{aligned}
 & x_p(t_f) \\
 &= e^{a_p t_f} x_p(0) + \frac{b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(t_f+t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) (e^{-2a_p t_f} - 1)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right) (-2a_p)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_e(t_f) = e^{a_e t_f} x_e(0) \\
 & \quad + \frac{b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{a_e(t_f+t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) (e^{-2a_e t_f} - 1)}{\left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right) (-2a_e)}
 \end{aligned}$$

נרצה לחשב את $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_p(t_f)$:

$$\begin{aligned}
 & x_p(t_f) \\
 &= e^{a_p t_f} x_p(0) \\
 &+ \frac{(e^{-2a_p t_f} - 1) b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(2t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0))}{-2a_p \left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right)}
 \end{aligned}$$

כאשר נציב $\varepsilon \rightarrow 0$ נראה כי קיבלנו אי וודאות מהסוג $\frac{\infty}{\infty}$, ולכן נפעיל את כלל לופיטל (תחת כל תנאיו המתקיימים במקרה שלפנינו):

נגזור את המונה לפי ε :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varepsilon} \left[(e^{-2a_p t_f} - 1) b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(2t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)) \right] \\
 &= - \frac{\left[(e^{-2a_p t_f} - 1) b_p^2 e^{a_p(2t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)) \right]}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

נגזור את המכנה לפי ε :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\varepsilon} \left[-2a_p \left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right) \right] \\
 &= - \frac{b_p^2 (1 - e^{2a_p t_f})}{\varepsilon^2}
 \end{aligned}$$

נחשב את הגבול הבא:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_p(t_f) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ e^{a_p t_f} x_p(0) \right. \\
 &+ \left. \frac{\frac{d}{d\varepsilon} \left[(e^{-2a_p t_f} - 1) b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{a_p(2t_f)} (e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)) \right]}{\frac{d}{d\varepsilon} \left[-2a_p \left(1 + \left(b_p^2 \frac{1}{\varepsilon} e^{2a_p t_f} \frac{e^{-2a_p t_f} - 1}{-2a_p} - b_e^2 \frac{1}{\beta} e^{2a_e t_f} \frac{e^{-2a_e t_f} - 1}{-2a_e} \right) \right) \right]} \right\} \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{a_p t_f} x_p(0) \\
&+ \frac{\left[(e^{-2a_p t_f} - 1) b_p^2 e^{a_p(2t_f)} \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) \right]}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{b_p^2 (1 - e^{2a_p t_f})} \\
&= e^{a_p t_f} x_p(0) + \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_p(t_f) &= e^{a_p t_f} x_p(0) - \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_e(t_f) &= e^{a_e t_f} x_e(0)
\end{aligned}$$

חישוב הגבול $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_e(t_f)$ טריוויאלי ולכן לא מובא בפירוט.

כעת נסתכל על L הפרש הגבולות בזמן t_f כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$, ונבדוק למה הוא שווה:

$$\begin{aligned}
L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_e(t_f) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_p(t_f) &= e^{a_e t_f} x_e(0) - e^{a_p t_f} x_p(0) \\
&+ \left(e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0) \right) = 0
\end{aligned}$$

בעזרת חישוב הגבול ב t_f כפונקציה של ε אנחנו יכולים לראות שכאשר $\varepsilon \rightarrow 0$ אנחנו מקבלים את התוצאה:
 $\|x_p(t_f) - x_e(t_f)\| = 0$
 במילים אחרות, הרודף משיג ותופס את הנרדף.

כעת נזכר בפונקציה הרלטיבית שהגדרנו בשיטת ה-Feedback, ונחקור את המסלול המתקבל ב- t_f כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$.

לשם תזכורת:

$$\begin{aligned}
X(t) = & \frac{e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1} \left(\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p(t_f-t)} \right. \\
& \left. - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e(t_f-t)} - 1) + 1 \right)
\end{aligned}$$

ולכן,

$$X(t_f) = \frac{e^{a_p t_f} x_p(0) - e^{a_e t_f} x_e(0)}{\frac{b_p^2}{2\varepsilon a_p} (e^{2a_p t_f} - 1) - \frac{b_e^2}{2\beta a_e} (e^{2a_e t_f} - 1) + 1}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X(t_f) = 0$$

נשים לב כי בשתי השיטות, Open-loop ו- Feedback, אנו מגיעים לאותה תוצאה משמעותית:

$$\|x_p(t_f) - x_e(t_f)\| = 0$$

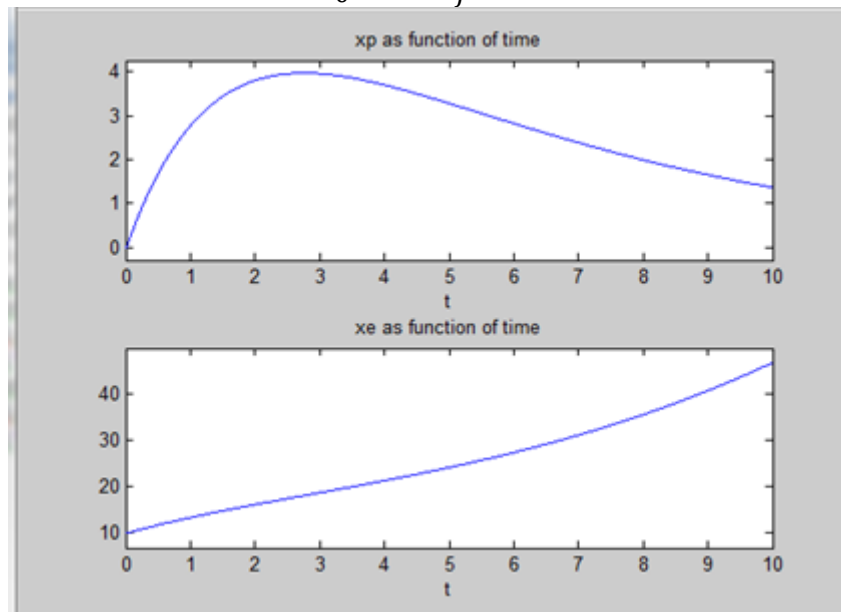
דוגמאות

דוגמה 1:

שרטוט המסלולים ע"י שימוש במטל"ב עבור הנתונים:

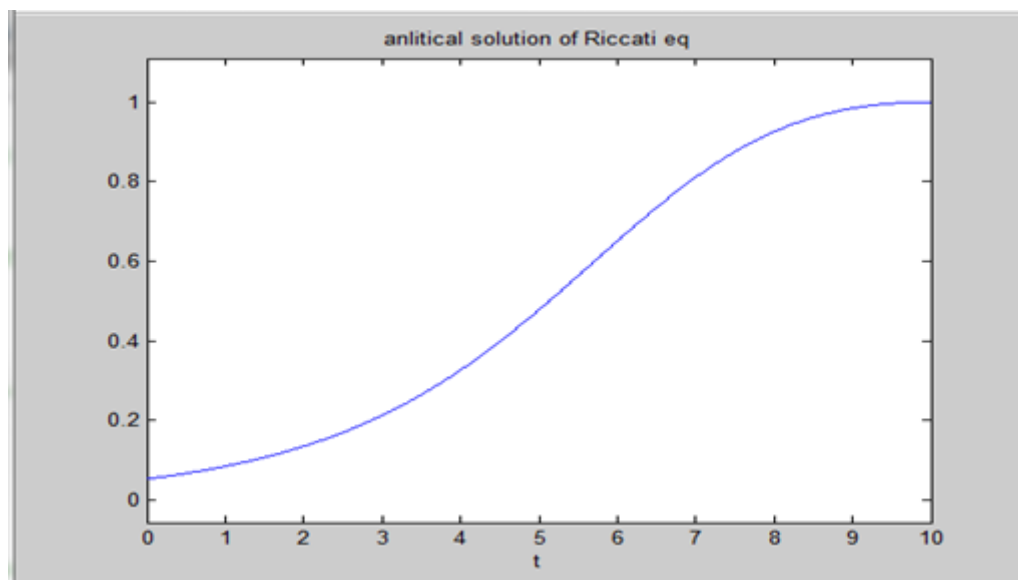
$$\alpha = \beta = 1, b_p = b_e = \frac{1}{2}, a_p = 0.2, a_e = 0.15, x_{p0} = 0, x_{e0} = 10$$

$$t_0 = 0, t_f = 10$$



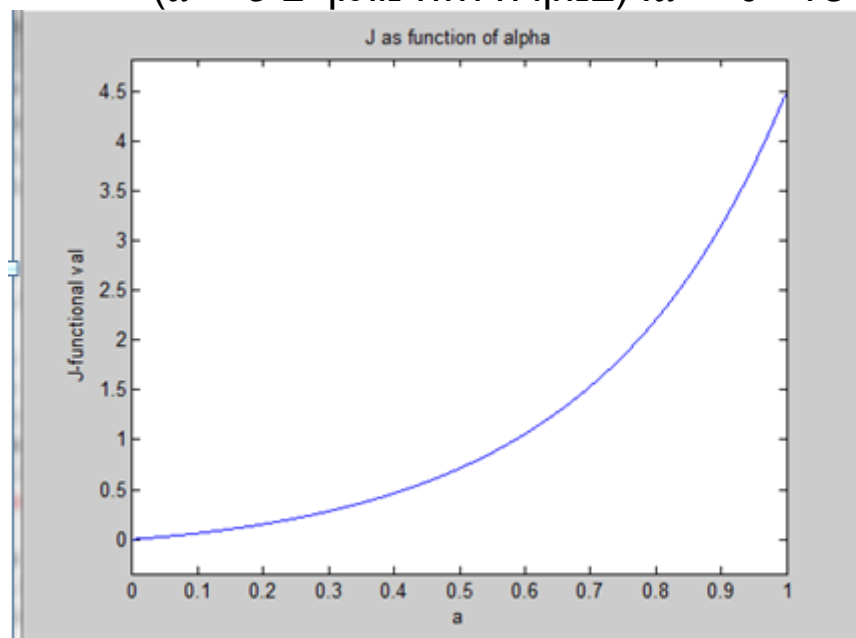
בדוגמה הזו אנו יכולים לראות את המסלולים שעושים שני השחקנים כפונקציה של הזמן.

פתרון אנליטי ע"י המטל"ב של משוואת ריקאטי:



ניתן לראות שקיים פיתרון בכל הקטע, הדבר חשוב לפי הערה 2 (ע"מ 23).

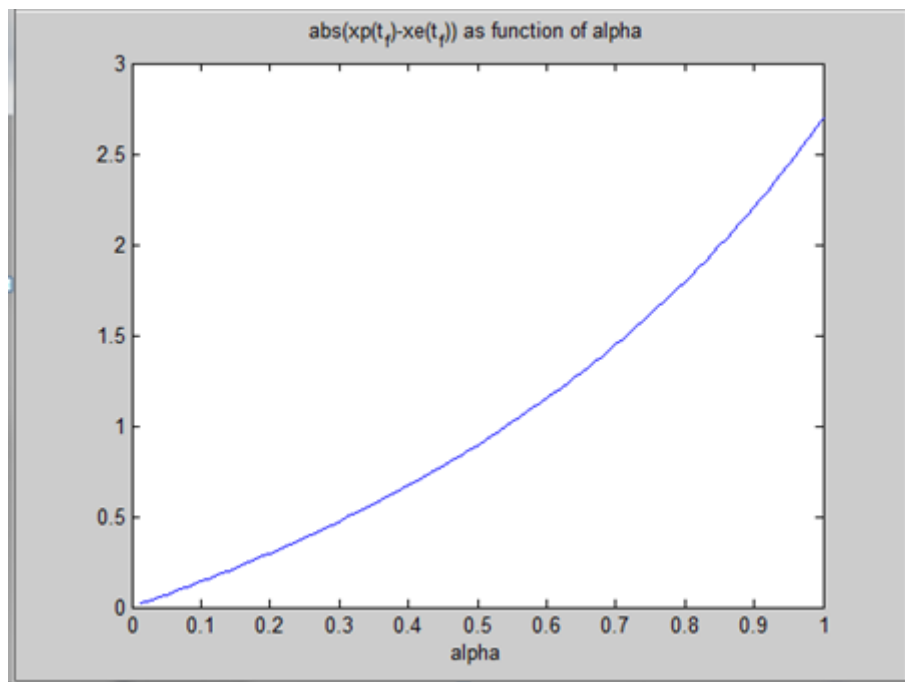
נתבונן כעת בפונקציונל J כפונקציה של α ונראה שרטוט המתאר את התהליך של- $\alpha \rightarrow 0$. (במקרה הזה מתקיים $\alpha = \varepsilon$)



ניתן לראות בבירור כי ככל ש $\alpha \rightarrow 0$ אזי $J \rightarrow 0$.

אם נזכר כעת בהערה 1 (ע"מ 17) נבין בעצם שהרודף משיג את מטרתו העיקרית-הקטנת ערך הפונקציונל ככל שניתן. שכן ערך הפונקציונל תמיד אי שלילי.

נתבונן בהפרש $|x_p(t_f) - x_e(t_f)|$ כפונקציה של α :
(במקרה הזה מתקיים $\alpha = \varepsilon$)

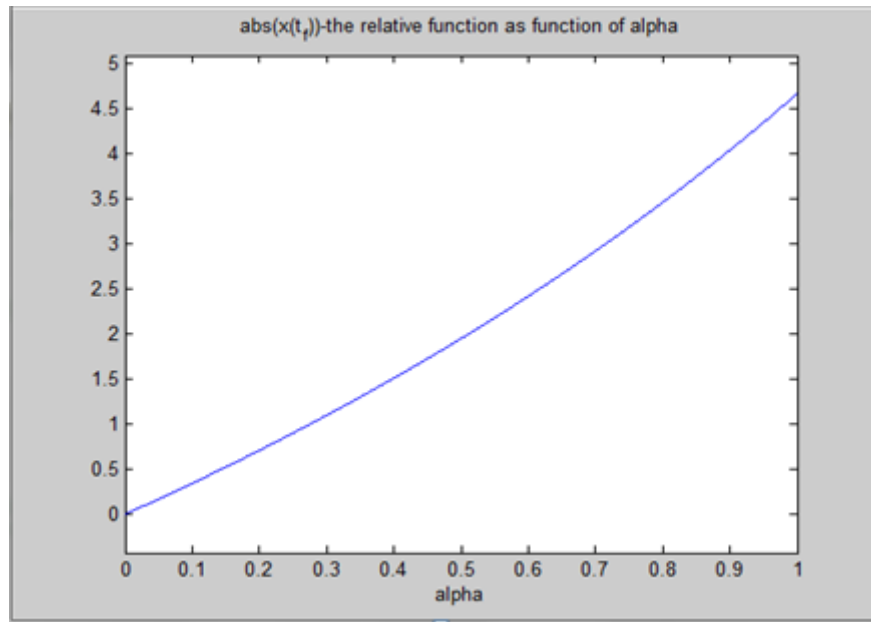


בשרטוט הזה ניתן לראות בבירור כיצד המרחק בין הרודף לנרדף קטן ככל של $\alpha \rightarrow 0$.

וכעת נתבונן בערך הפונקציה הרלטיבית שהגדרנו בשיטת ה-Feedback.

$$X(t_f) = \phi_p(t_f, t_f)x_p(t_f) - \phi_e(t_f, t_f)x_e(t_f) = x_p(t_f) - x_e(t_f)$$

ולכן נרצה לקבל את אותו הגרף כמו בשרטוט הקודם, ואכן מתקבל:



דוגמה 2:

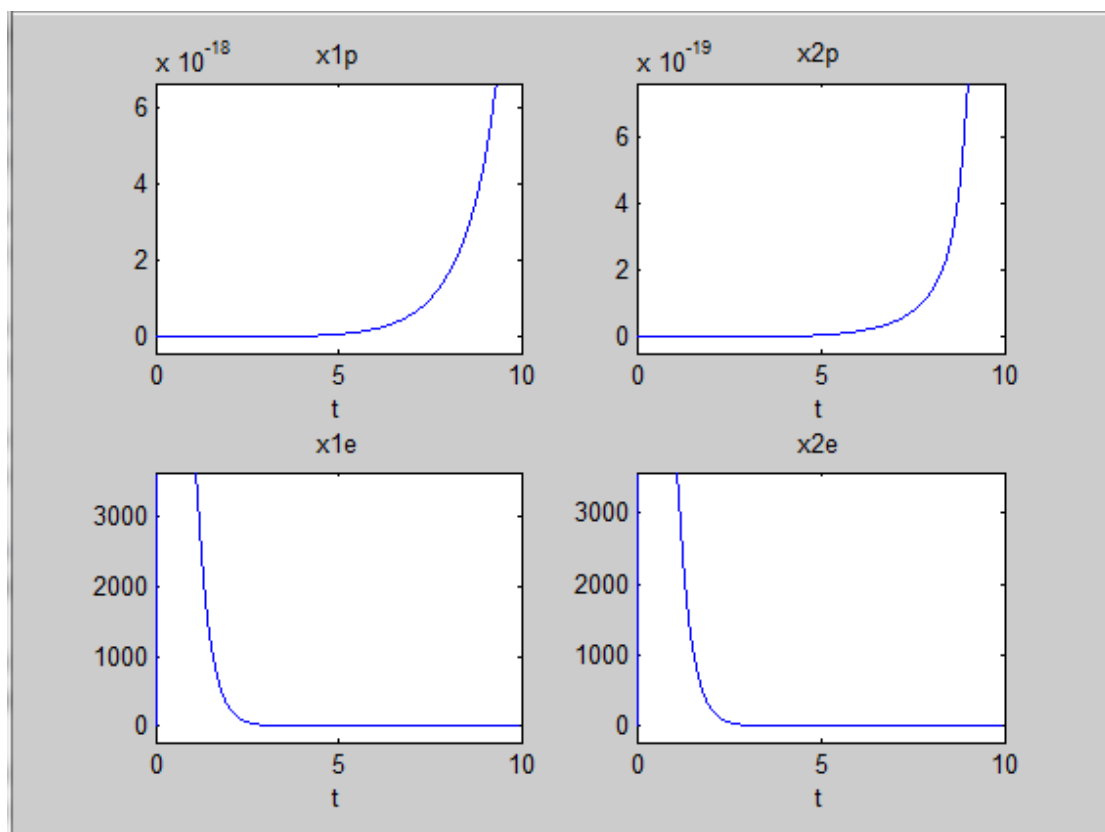
נבחר את הנתונים:

$$F_p = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad F_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$G_p = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad G_e = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R_e = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

שרטוט המסלולים ע"י שימוש במטל"ב:



פיתרון נומרי של משוואת ריקאטי (פתרון במטל"ב ע"י שיטת רונגה-קוטה).

משוואת ריקאטי כפי שהיא מוצגת בע"מ 16:

$$\dot{K}(t) = K(S_u - S_v)K, \quad K(t_f) = I$$

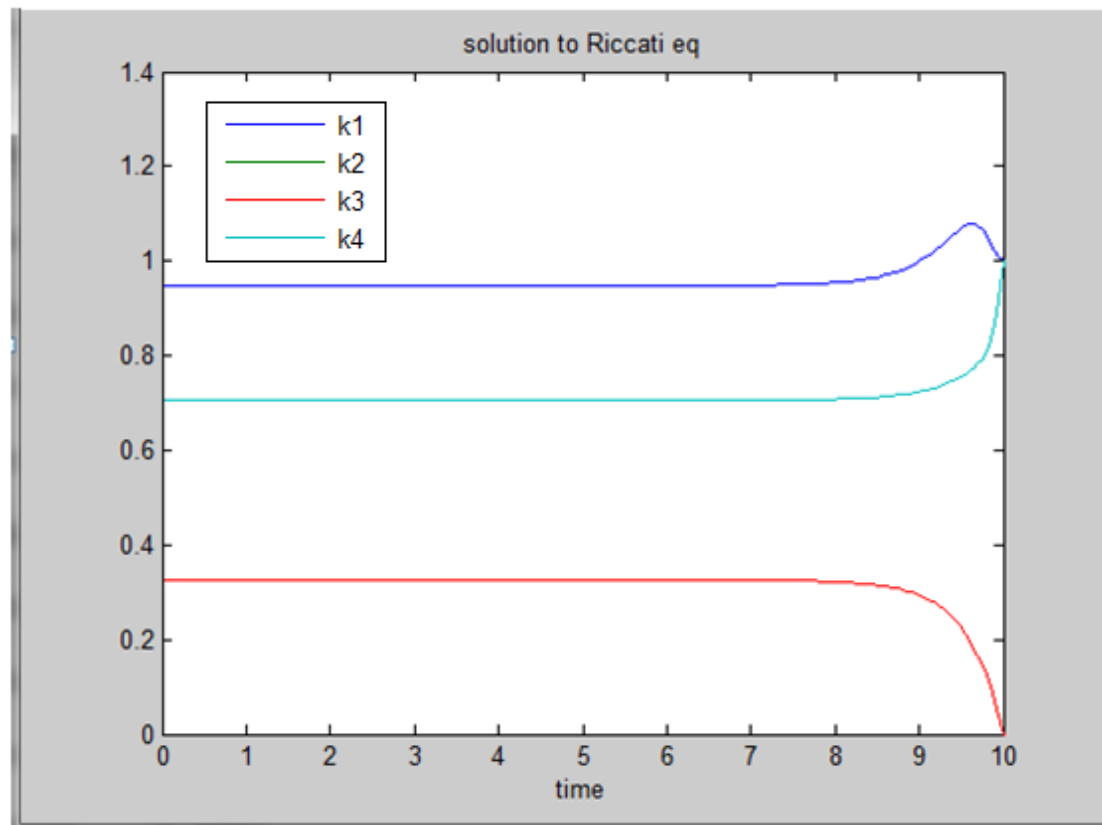
פתרון ע"י מטל"ב:

```
Fp=[-1 -3;0 -4];
Fe=[-2 3;-1 6];
Gp=[-1 4;5 2];
Ge=[6 1;3 4];
Rp=[2 0;0 2];
Re=[4 0;0 4];
syms t
%tf=10 sec
phi_p=expm(Fp*(10-t));
phi_e=expm(Fe*(10-t));
Hp=phi_p*Gp;
He=phi_e*Ge;
Su=Hp*inv(Rp)*transpose(Hp);
Sv=He*inv(Re)*transpose(He);
syms k1
syms k2
syms k3
syms k4
K=[k1 k2;k3 k4];
K_dot=K*S*K %Riccati equation

[T K]=ode45(@K_dot,[10 0],[1;0;0;1]);
```

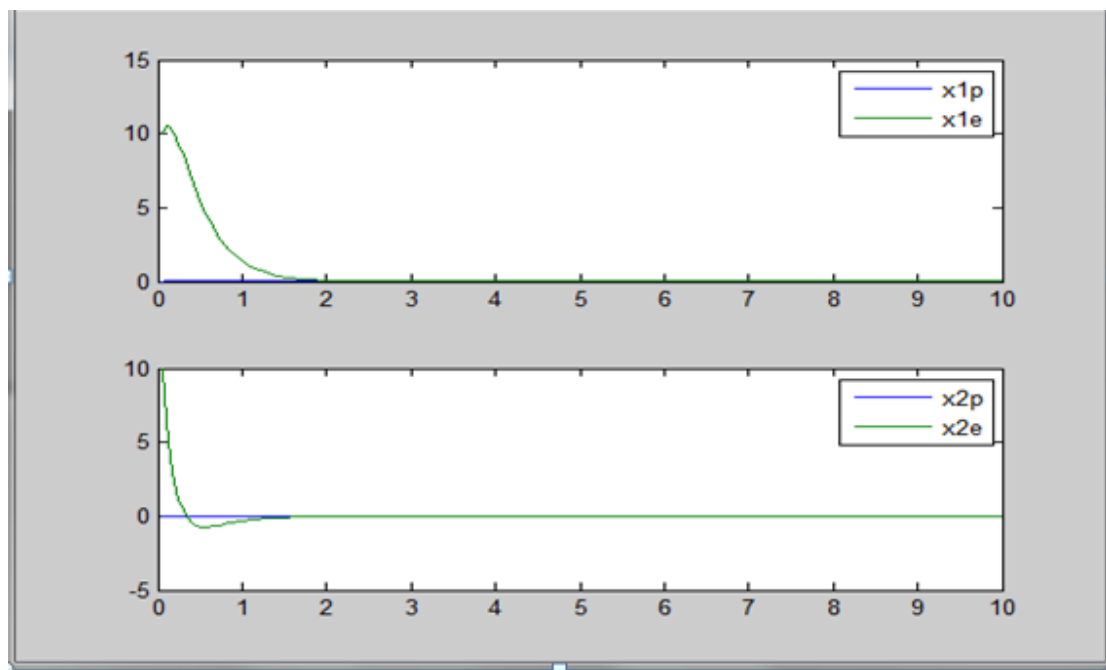
ניתן לראות בתוך הפונקציה המטלבית התייחסות לקטע הזמן של הפיתרון [10 0] וגם התייחסות לתנאי בסוף [1;0;0;1].

בשרטוט המצורף אנו רואים את הפיתרון של משוואת ריקאטי בצורה גרפית.



מטריצה K הינה מטריצה סימטרית $k_2 = k_3$ ולכן רואים לא רואים את הפתרון עבור k_2 מאחר והוא מתלכד עם הפתרון עבור k_3 .

נתבונן בהתכנסות של הקורדינטות המתיאמות של הרודף והנרדף:



ניתן לראות שכבר סמוך לשנייה השנייה של המשחק הקורדינטה הראשונה של הרודף מתכנסת לקורדינטה הראשונה של הנרדף וכך גם לגבי הקורדינטה השנייה של שני השחקנים.

נספח א

פתרון מערכת משוואת דיפרנציאליות רגילות ליניאריות:
רקע תיאורטי: פתרון מערכת משוואת דיפרנציאליות רגילות ליניאריות:

$$x'_i = F_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

מערכת של מד"ר נקראת ליניארית אם הפונקציות $F_1 \dots F_n$ המופיעות בצד ימין של המערכת הנתונה הן ליניאריות ב- n הנעלמים $x_1(t), \dots, x_n(t)$ הצורה הכללית של המערכת היא:

$F_i(t, x_1, \dots, x_n) = p_{i1}(t)x_1 + p_{i2}(t)x_2 + \dots + p_{in}(t)x_n + q_i(t)$
תחת ההגדרה הזו ברור כי הפונקציה F_i רציפה במשתנים $x_1, \dots, x_n$, על מנת שתהיה רציפה גם ב- t יש לדרוש כי המקדמים p_{ij} ו- q_i יהיו רציפים ב- t . זה מבטיח אף את רציפות הנגזרות $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = p_{ij}(t)$ לכן עבור מערכת ליניארית כל דרישות משפט הקיום והיחידות מצטמצמות לדרישה כי כל מקדמי המערכת יהיו רציפים במשתנה t . החופשי t .

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x'(t) = P(t)x(t) + q(t)$$

מטריצה יסודית-פנדומנטלית:

כל פתרון של מערכת משוואות הומוגנית נפרש ע"י אברי הבסיס של פתרונות

$$g_i(t) \in R^n \text{ בצורה } g_1(t), \dots, g_n(t) \\ x(t) = c_1 g_1 + \dots + c_n g_n$$

המטריצה המורכבת מהעמודות של בסיס הפתרונות תקרא מטריצה יסודית או מטריצה פנדומנטלית ותסומן ב- Φ .

מערכות משוואות לא הומוגניות:

$$x'(t) = P(t)x(t) + q(t)$$

פיתרון של המשוואה ההומוגנית:

$$x_H(t) = c_1 g_1(t) + \dots + c_n g_n(t) \rightarrow \Phi(t) \vec{c}$$

פתרון של המשוואה הלא הומוגנית:

$$x_{NH}(t) = d_1(t) g_1 + \dots + d_n(t) g_n \rightarrow \Phi(t) \vec{d}(t)$$

נגזור את הפיתרון של המשוואה הלא הומוגנית:

$$\Phi'(t) \vec{d}(t) + \Phi(t) \vec{d}'(t) = P(t) (\Phi(t) \vec{d}(t)) + q(t)$$

מהו $\Phi'(t)$? נגזור כל עמודה של המטריצה בנפרד:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= (g'_1 : g'_2 : \dots : g'_n) = (P g_1 : P g_2 : \dots : P g_n) \\ &= P(t) (g_1 : g_2 : \dots : g_n) = P(t) \Phi(t) \end{aligned}$$

נציב את $\Phi'(t) = P(t) \Phi(t)$ ונקבל:

$$P(t) \Phi(t) \vec{d}(t) + \Phi(t) \vec{d}'(t) = P(t) \Phi(t) \vec{d}(t) + q(t)$$

לאחר צמצום נשאר:

$$\Phi(t) \vec{d}'(t) = q(t) \rightarrow \vec{d}'(t) = \Phi^{-1}(t) q(t)$$

הפונקציה הווקטורית $\vec{d}(t)$ מתקבלת ע"י אינטגרציה.

$$\vec{d}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) q(s) ds + K$$

לסיכום, הפתרון של המערכת הבלתי הומוגנית הוא:

$$\vec{x}_{NH} = \Phi(t) \vec{d}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) \vec{q}(s) ds + \Phi(t) \vec{K}$$

$\Phi(t) \vec{K}$ - פתרון כללי של המערכת ההומוגנית.

$\int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi^{-1}(s) \vec{q}(s) ds$ - פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית.

נשים לב שניתן להכניס את הגורם $\Phi(t)$ לתוך האינטגרל, גורם זה אינו תלוי ב s והוא קבוע.

נקבל בתוך האינטגרל את המכפלה $\Phi(t) \Phi^{-1}(s)$ - זהו גרעין האינטגרל והוא מקביל לגרעין קושי $K(x, t)$.

נספח ב

אקספוננט של מטריצה:
רקע תיאורטי: אקספוננט של מטריצה:

נתונה מטריצה A , נסמן את אבריה ב- a_{ij} .
נגדיר "נורמה" של מטריצה:

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

נגדיר אקספוננט של מטריצה:

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

נוכיח קיום של המטריצה e^A , כלומר, נוכיח ש- $\|e^A\| < \infty$:

$$\begin{aligned} \|e^A\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\|A^k\|}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq e^{\|A\|} < \infty \end{aligned}$$

מכאן נובעת הטענה שהטור מתכנס ולכן קיימת המטריצה, הוכחנו גם

שמתקיים האי שוויון $\|e^A\| < e^{\|A\|}$

נחשב מטריצה e^A כאשר A אלכסונית, אם A אלכסונית אזי מתקיים

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

כך ש P מטריצה מלכסנת, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכים עצמיים של A .

ומתקיים:

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} \\ A^2 &= P\Lambda^2 P^{-1} \\ &\vdots \\ A^n &= P\Lambda^n P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P \Lambda^k P^{-1}}{k!} = P \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} P^{-1} = P \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.
\end{aligned}$$

סיכום ומסקנות

- בשלב הראשון עסקתי בהצגת התיאוריה הכללית.
 - בשלב השני עסקתי בהצגת הבעיה-מטריצת המשקולות לבקרת הרודף מוגדרת אך ורק חיובית.
 - בשלב השלישי ניסיתי להרחיב את התיאוריה למקרה בו מטריצת המשקולות לבקרת הרודף מוגדרת אי שלילית ובפרט 0.
 - בשלב הרביעי והאחרון הוכחתי את נכונות התיאוריה למקרה בו מטריצת המשקולות לבקרת הרודף מוגדרת אי שלילית.
 - מסקנה:
- גם במצב בו מקצים את כל המשאבים, ללא הגבלה, לרודף על מנת להשיג את הנרדף, הוא עדיין בוחר באסטרטגיה האופטימלית עבורו, וההוכחה לכך היא:

$$\lim_{R_p \rightarrow 0} J = 0$$

- יש לציין כי התיאוריה הכללית מראה כי כאשר $R_p \rightarrow 0$ הפונקציונל J מתכנס, במקרים שאני דנתי בהם הפונקציונל מתכנס ל-0 כאשר $R_p \rightarrow 0$.

ביבליוגרפיה

1. *T. Basar & G.J. Olsder, Dynamic Noncooperative Game Theory, Academic Press, London 1982.*
2. *A. E. Bryson, Jr. Y.C. Ho, Applied Optimal Control- Optimization, Estimation and Control, Hemisphere Publishing New York 1975.*
3. *Y.C HO, A.E Bryson, S. Barson Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies, IEEE Transactions on automatic control, Vol. AC-10, No. 4, 385-389, October 1965.*
4. *Valery Y. Glizer, Asymptotic Solution of Zero Sum Linear Quadratic Differential Game with Cheap Control for Minimizer, NoDEA, 231-257, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.*
5. *J. Shinar, V.Y. Glizer, V. Turetsky, Solution of a Singular Zero Sum Linear - Quadratic Differential Game by Regularization, unpublished manuscript.*

תודות

בסמסטר הקודם ביקשתי מפרופ' גליזר שינחה אותי בפרויקט הגמר אותו אתם קוראים כעת.

התחלתי את העבודה על הפרויקט סמסטר אחד לפני הצורך וזאת בכדי להגיש עבודה מושקעת, רצינית ויחודית. במהלך הזמן שהיה לי לכתוב את העבודה למדתי לעומק דברים מדהימים, למדתי לחקור, למדתי כיצד לחפש מידע, לשאול שאלות ולהטיל ספק בדברים אותם אני קורא.

העבודה הזו גרמה לי לרצות להמשיך עם הנושא הזה לעבודת התיזה, שאותה אתחיל לכתוב בשנה הבאה.

אני מבקש להודות מכל הלב, לפרופ' גליזר על ההשקעה שלו בי בתור סטודנט שלו ועל הסבלנות שהייתה לו עבורי.

אני מבקש להודות גם לפרופ' טורצקי, על כל העזרה שהעניק לי במהלך הפרוייקט.

אני מבקש להודות לראש המחלקה למתמטיקה, פרופ' לביא קרפ, על העזרה שהגיש לי בכתובת העבודה.

כהן יובל.