אורט בראודה
המכללה האקדמית להנדסה
ORT Braude College

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

יישומים של תורת המטריצות האקראיות וטנסורים אקראיים

עלאא לאדקאני

Applications of Random Matrix Theory and Random Tensors

Alaa Lathqani

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

יישומים של תורת המטריצות האקראיות וטנסורים אקראיים

עלאא לאדקאני

Applications of Random Matrix Theory And Random Tensors

Alaa Lathqani

מנחה :
ד"ר ויקטור אוסטרובסקי

Advisor :
Dr. Victor Ostrovski

כרמיאל

Karmiel

2016

הקדשות ותודות :

ברצוני להודות מקרב לב למנחה הפרויקט ד״ר אוסטרובסקי ויקטור על הנחיתו ותמיכתו המלאה לי בהכנת הפרויקט ועל הידע הרב שהעניק לי במהלכו.

תוכן עניינים :

עמודים

החלק הראשון :

החלק השני :

הנספח :

תורת המטריצות האקראיות :

תורת המטריצות האקראיות הוא תחום מתמטי מודרני בתורת ההסתברות ותהליכים אקראיים הנגזר בעיקר מפיסיקה תאורטית ומתמטית , התורה החלה להתפתח לראשונה בשנת 1950 על ידי הפיסיקאי Eugene Wigner באשר עיסוקו בפיסיקה גרעינית , ומאז יושמה בהרבה תחומי מדע והנדסה אחרים , למשל בחקירת הולכה של מולכים במכניקה קוונטית "הלוקליזציה של אנדרסון" , בחקירת זרימות מערבוליות במכניקת הרצף . יישומיה במתמטיקה למשל בתורת המספרים , קומנטוריקה , סטטיסטיקה ומתמטיקה פיננסית . בהנדסת אלקטרוניקה למשל בעיבוד אותות אקראיים ובתקשורת .

המטרה הבסיסית של תורת המטריצות האקראיות היא להבנת תכונות מגוונות של מטריצות שאיבריהן הם משתנים אקראיים עם התפלגות הסתברותית כלשהי , באופן מסורתי המכונה מכלול (ensemble) המטריצות האקראיות . לפי התורה יש מכלולים שונים של מטריצות אקראיות כמו למשל מכלולים המוכנים : המכלול האוקלידי , המכלול המעגלי , והמכלול הגאוסי והוא המכלול הקלאסי הידוע . כל מכלול כולל כמה סוגים של מטריצות , המכלול הגאוסי כולל מטריצות סימטרית מעל המספרים הממשיים, מטריצות הרמטיות מעל המספרים המרוכבים, ומטריצות הרמטיות ודואליות לעצמן מעל המספרים הקווטרניונים . עם כמה דרישות כמו אי-תלות איברי המטריצה האקראית (אי-תלות של המשתנים האקראיים) ושמורות (Invariance) של פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת של אברי המטריצה האקראית תחת העתקת דמיון מתאימה לסוג המטריצה כמו העתקה אורתוגונלית , העתקה יונטרית , העתקה סימפלקטית בהתאמה .

בפרויקט נפרט את הפיתוח התאורטי של תורת המטריצות האקראיות מתוך דגש על המכלול הגאוסי בלבד, ביישום נתעסק במודל הלוקליזציה של אנדרסון תוך שימוש בתוכנת MATLAB .

הגדרת המכלול הגאוסי של מטריצות אקראיות

(1) המכלול האורתוגונלי הגאוסי E_{1G} :

מוגדר במרחב המטריצות הממשיות הסימטריות האקראיות מסדר $N \times N$ T_{1G} , עם שתי דרישות:

א) המכלול נשמר תחת כל העתקה אורתוגונלית כלשהי של T_{1G} לעצמו :

$$\ell : T_{1G} \to T_{1G} \ , \ \forall H \in T_{1G} \ ; \ H' = U^T \cdot H \cdot U \ \ \Longrightarrow \ \ H' \in T_{1G}$$

U היא מטריצה אורתוגונלית כלשהי , $U^T U = U U^T = I$

ההסתברות להשתייכות של ערכי האברים המשתנים המקריים H_{kj} $k \le j$ של H לנפח אינפיניטסימלי $dH = \prod_{k \le j} dH_{kj}$ אינה משתנה תחת ההעתקה , כלומר :

$$P(H) \cdot dH = P(H') \cdot dH'$$

$P(H) = P(H_{11}, \dots, H_{NN}, H_{12}, \dots, H_{N-1\,N})$ – פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת של מ"מ H_{kj} $k \le j$.

dH_{kj} – קטע אינפיניטסימלי של ערכי המ"מ H_{kj} .

ב) אברי המטריצה H המ"מ H_{kj} $k \le j$ הם בלתי תלויים : $P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}(H_{kj})$

$f_{kj}(H_{kj})$ - פונקציית צפיפות ההסתברות של האבר מ"מ H_{kj} .

(2) המכלול היונטרי הגאוסי E_{2G} :

מוגדר במרחב המטריצות המורכבות ההרמיטיות האקראיות מסדר $N \times N$ T_{2G} , עם שתי דרישות :

א) המכלול נשמר תחת כל העתקה יונטרית כלשהי של T_{2G} לעצמו :

$$\ell : T_{2G} \to T_{2G} \ , \ \forall H \in T_{2G} \ ; \ H' = U^\dagger \cdot H \cdot U \ \ \Longrightarrow \ \ H' \in T_{2G}$$

U היא מטריצה יונטרית כלשהי , $U^\dagger U = U U^\dagger = I$

ההסתברות להשתייכות של החלקים של האברים - ממשיים ומדומים - המשתנים המקריים $H_{kj}^{(0)}, H_{kj}^{(1)}$ $k \le j$ ($k = j$, $H_{kj}^{(1)} = 0$) כאשר $H_{kj} = H_{kj}^{(0)} + i \cdot H_{kj}^{(1)}$ איבר של מטריצה H לנפח אינפיניטסימלי $dH = \prod_{k \le j} dH_{kj}^{(0)} \cdot \prod_{k<j} dH_{kj}^{(1)}$ אינה משתנה תחת ההעתקה , כלומר :

$$P(H)\cdot dH = P(H')\cdot dH'$$

$P(H)=P(H_{11}^{(0)},\dots,H_{NN}^{(0)},H_{12}^{(0)},\dots,H_{N-1\,N}^{(0)},H_{12}^{(1)},\dots,H_{N-1\,N}^{(1)})$ – פונקציית צפיפות ההסתברות

המשותפת של מ"מ $H_{kj}^{(1)}$ $k<j$, $H_{kj}^{(0)}$ $k\le j$.

$dH_{kj}^{(\lambda)}$ – קטע אינפיניטסימלי של ערכי המ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$ $\lambda=0{,}1$.

ב) חלקי אברי המטריצה H המ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$ הם בלתי תלויים :

$$\mathrm{P}(H)=\prod_{k\le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)})\cdot\prod_{k<j} f_{kj}^{(1)}(H_{kj}^{(1)})$$

$f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$ - פונקציית צפיפות ההסתברות של מ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$.

המספרים הקווטרניונים :

מספר קווטרניוני q הוא מספר המוגדר כמו וקטור מעל המרחב C^4 עם בסיסים $1,e_1,e_2,e_3$

המקיימים דרישות הכפל : $e_1^2=-1$, $e_2^2=-1$, $e_3^2=-1$

$$e_1\cdot e_2=-e_2\cdot e_1=e_3\ ,\ e_2\cdot e_3=-e_3\cdot e_2=e_1\ ,\ e_3\cdot e_1=-e_1\cdot e_3=e_2$$

$$e_1\cdot e_2\cdot e_3=e_1\cdot(e_2\cdot e_3)=(e_1\cdot e_2)\cdot e_3=-1$$

1 הוא איבר היחידה : $1\cdot q=q\cdot 1=q$

$$q=q^{(0)}\cdot 1+q^{(1)}\cdot e_1+q^{(2)}\cdot e_2+q^{(3)}\cdot e_3\ ;\quad q^{(j)}\in C\quad j=0{,}1{,}2{,}3$$

פעולות אלגבריות בסיסיות של מספרים קווטרניונים :

$$p=p^{(0)}\cdot 1+p^{(1)}e_1+p^{(2)}e_2+p^{(3)}e_3\ ;\ q=q^{(0)}\cdot 1+q^{(1)}e_1+q^{(2)}e_2+q^{(3)}e_3$$

חיבור : $p+q=\left(p^{(0)}+q^{(0)}\right)\cdot 1+\left(p^{(1)}+q^{(1)}\right)\cdot e_1+\left(p^{(2)}+q^{(2)}\right)\cdot e_2+\left(p^{(3)}+q^{(3)}\right)\cdot e_3$

כפל :

$$\begin{aligned}p\cdot q=&\,p^{(0)}q^{(0)}-p^{(1)}q^{(1)}-p^{(2)}q^{(2)}-p^{(3)}q^{(3)}+\\&+\left[\,p^{(0)}q^{(1)}+p^{(1)}q^{(0)}+p^{(2)}q^{(3)}-p^{(3)}q^{(2)}\,\right]\cdot e_1+\\&+\left[\,p^{(0)}q^{(2)}+p^{(2)}q^{(0)}+p^{(3)}q^{(1)}-p^{(1)}q^{(3)}\,\right]\cdot e_2+\\&+\left[\,p^{(0)}q^{(3)}+p^{(3)}q^{(0)}+p^{(1)}q^{(2)}-p^{(2)}q^{(1)}\,\right]\cdot e_3\end{aligned}$$

פעולת הכפל בין המספרים הקווטרניונים אינה חילופית .

נגדיר כמה פעולות אלגבריות נוספות על מספר קווטרניוני q :

(1) מספר קווטרניוני דואלי ל-q הוא : $\bar{q} = q^{(0)} \cdot 1 - q^{(1)} \cdot e_1 - q^{(2)} \cdot e_2 - q^{(3)} \cdot e_3$

(2) צמוד מרוכב : $q^* = \overline{q^{(0)}} \cdot 1 + \overline{q^{(1)}} \cdot e_1 + \overline{q^{(2)}} \cdot e_2 + \overline{q^{(3)}} \cdot e_3$

(3) צמוד הרמיטי : $q^\dagger = \overline{q^*} = \overline{q^{(0)}} \cdot 1 - \overline{q^{(1)}} \cdot e_1 - \overline{q^{(2)}} \cdot e_2 - \overline{q^{(3)}} \cdot e_3$

- q נקרא מספר קווטרניוני ממשי , אם : $q^* = q$, $q^{(j)} \in R \quad j = 0,1,2,3$
- q נקרא מספר קווטרניוני מדומה טהור , אם : $q^* = -q$
  $q^{(j)} = p^{(j)} \cdot i \; ; \; p^{(j)} \in R \quad j = 0,1,2,3$
- q נקרא מספר קווטרניוני הרמיטי , אם : $q^\dagger = q$
  $q^{(j)} = p^{(j)} \cdot i \; ; \; p^{(j)}, q^{(0)} \in R \quad j = 1,2,3$
- q נקרא מספר קווטרניוני אנטי-הרמיטי , אם : $q^\dagger = -q$
  $q^{(0)} = p^{(0)} \cdot i \; ; \; q^{(j)}, p^{(0)} \in R \quad j = 1,2,3$
- q נקרא סקלר , אם : $\bar{q} = q \; ; \; q = q^{(0)} \; , \; q^{(1)} = q^{(2)} = q^{(3)} = 0$

מתקיימות שלוש התכונות הבאות :

$$\overline{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n} = \overline{q_n} \cdots \overline{q_2} \cdot \overline{q_1} \quad ; \quad (q_1 \cdot q_2 \cdots q_n)^\dagger = {q_n}^\dagger \cdots {q_2}^\dagger \cdot {q_1}^\dagger$$

$$(q_1 \cdot q_2 \cdots q_n)^* = {q_1}^* \cdot {q_2}^* \cdots {q_n}^*$$

מרחב המספרים הקווטרניונים H איזומורפי למרחב $C^{2\times2}$ כי שניהם בעלי ממד 4 , לכן קיימת העתקה חח"ע ועל (הפיכה) $\ell : H \longrightarrow C^{2\times2}$ המקיימת :

$$\ell(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \qquad \ell(e_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = E_1$$

$$\ell(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 \qquad \ell(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

I, E_1, E_2, E_3 הן ארבע מטריצות בלתי תלויות ליניארית ולכן מהוות בסיס של המרחב $C^{2\times2}$ וכמוכן מקיימות דרישות הכפל כמו $1, e_1, e_2, e_3$ בהתאמה .

הוכחה : ברור הקבוצה $\{I, E_1\}$ בת"ל בקבוצה $\{E_2, E_3\}$, ולעולם לא קיים $\alpha \in C$ כך ש- $E_1 = \alpha \cdot I$ או $E_3 = \alpha \cdot E_2$. ולכן הקבוצה $\{I, E_1, E_2, E_3\}$ מהווה בסיס למרחב 4 ממדי $C^{2\times2}$.

$${E_1}^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$${E_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$${E_3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ (-i)\cdot(-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = E_3$$

$$E_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = E_1$$

$$E_3 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i^2 \\ i^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

מתקיימות כל דרישות הכפל , בנוסף רואים כי $E_k{}^{-1} = -E_k \;\; ; \;\; k = 1,2,3$.

$\forall\, A \in C^{2\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(a+d)\cdot I - \tfrac{1}{2}i(a-d)\cdot E_1 + \tfrac{1}{2}(b-c)\cdot E_2 - \tfrac{1}{2}i(b+c)\cdot E_3$$

אפשר להביע את A באמצעות מספר קווטרניוני q כאשר :

$$q^{(0)} = \tfrac{1}{2}(a+d)\,,\; q^{(1)} = -\tfrac{1}{2}i(a-d)\,,\; q^{(2)} = \tfrac{1}{2}(b-c)\,,\; q^{(3)} = -\tfrac{1}{2}i(b+c)$$

$\forall\, \mathrm{A} \in C^{2N\times 2N}$ אפשר להביע אותה באמצעות מטריצה $\mathrm{Q} \in H^{N\times N}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & & \cdots\cdots & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ \vdots & & \cdots & & a_{2N-1\,2N-1} & & a_{2N-1\,2N} \\ & & & & a_{2N\,2N-1} & & a_{2N\,2N} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \cdots & q_{N\,N} \end{pmatrix}$$

$$q_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\,,\; q_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}\,,\; \cdots\;,\; q_{NN} = \begin{pmatrix} a_{2N-1\,2N-1} & a_{2N-1\,2N} \\ a_{2N\,2N-1} & a_{2N\,2N} \end{pmatrix}$$

באופן כללי : $$q_{ij} = \begin{pmatrix} a_{2i-1\,2j-1} & a_{2i-1\,2j} \\ a_{2i\,2j-1} & a_{2i\,2j} \end{pmatrix} \qquad i,j = 1,2,\dots,N$$

מטריצות סימפלקטיות (Symplectic Matrix) :

הגדרה : מטריצה $B \in C^{2N\times 2N}$ נקראת מטריצה סימפלקטית אם היא מקיימת : $\mathrm{Z} = B \cdot \mathrm{Z} \cdot B^T$

כאשר $Z \in C^{2N\times 2N}$ היא מטריצה אלכסונית של בלוקים $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Z' = \begin{pmatrix} e_2 & 0 & \cdots \\ 0 & e_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = e_2 \cdot \mathrm{I}_N$$

Z' ייצוג של Z במרחב $H^{N\times N}$. ברור כי $Z^{-1} = -Z$

נגדיר פעולה על מטריצות ממרחב $C^{2N\times 2N}$: $A^R = Z \cdot A^T \cdot Z^{-1}$

פעולה זו נקראת בפיזיקה " היפוך זמן " .

מטריצות סימפלקטיות הן הפיכות ומתקיים : $B^{-1} = B^R$, הוכחה :

$$B \cdot B^R = B \cdot (Z \cdot B^T \cdot Z^{-1}) = (B \cdot Z \cdot B^T) \cdot Z^{-1} = Z \cdot Z^{-1} = I$$

$$B^R \cdot B = (Z \cdot B^T \cdot Z^{-1}) \cdot B = Z \cdot (B^T \cdot Z^{-1} \cdot B) = -Z \cdot (B^T \cdot Z \cdot B) = Z^{-1} \cdot Z = I$$

אפשר להביע את המטריצות $A^T, A^\dagger, A^R \in C^{2N\times 2N}$ באמצעות מטריצות במרחב $H^{N\times N}$:

$$A^R \implies (Q^R)_{ij} = \overline{q_{ji}} \;\; ; \; A^\dagger \implies \left(Q^\dagger\right)_{ij} = {q_{ji}}^\dagger \;\; ; \; A^T \implies (Q^T)_{ij} = -e_2 \cdot \overline{q_{ji}} \cdot e_2$$

הוכחה :

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} a_{2i-1\,2j-1} & a_{2i-1\,2j} \\ a_{2i\,2j-1} & a_{2i\,2j} \end{pmatrix}$$

$$q_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2i-1\,2j-1} + a_{2i\,2j}\right) \cdot 1 - \tfrac{1}{2} i\left(a_{2i-1\,2j-1} - a_{2i\,2j}\right) \cdot e_1 + \\ + \tfrac{1}{2}\left(a_{2i-1\,2j} - a_{2i\,2j-1}\right) \cdot e_2 - \tfrac{1}{2} i\left(a_{2i-1\,2j} + a_{2i\,2j-1}\right) \cdot e_3$$

$$A^R = -Z \cdot A^T \cdot Z \;\; , \;\; (A^R)_{ij} = -(Z \cdot A^T \cdot Z)_{ij} = -\sum_{y=1}^{2N}\sum_{x=1}^{2N} Z_{ix} \cdot (A^T)_{xy} Z_{yj} \\ = -\sum_{y=1}^{2N}\sum_{x=1}^{2N} Z_{ix} \cdot a_{yx} \cdot Z_{yj}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 \;, \; j\; even \;\; and \;\; i = j-1 \\ -1 \;, \; j\; odd \;\; and \;\; i = j+1 \\ 0 \;, \; else \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&i\ even\,,\ j\ \ even &&\Longrightarrow\quad (A^R)_{ij} = -Z_{i\,i-1}\cdot a_{j-1\,i-1}\cdot Z_{j-1\,j} = a_{j-1\,i-1}\\
&i\ even\,,\ j\ \ odd &&\Longrightarrow\quad (A^R)_{ij} = -Z_{i\,i-1}\cdot a_{j+1\,i-1}\cdot Z_{j+1\,j} = -a_{j+1\,i-1}\\
&i\ odd\,,\ j\ \ even &&\Longrightarrow\quad (A^R)_{ij} = -Z_{i\,i+1}\cdot a_{j-1\,i+1}\cdot Z_{j-1\,j} = -a_{j-1\,i+1}\\
&i\ odd\,,\ j\ \ odd &&\Longrightarrow\quad (A^R)_{ij} = -Z_{i\,i+1}\cdot a_{j+1\,i+1}\cdot Z_{j+1\,j} = a_{j+1\,i+1}
\end{aligned}
$$

$$
(Q^R)_{ij} = \begin{pmatrix} (A^R)_{2i-1\,2j-1} & (A^R)_{2i-1\,2j} \\ (A^R)_{2i\,2j-1} & (A^R)_{2i\,2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2j\,2i} & -a_{2j-1\,2i} \\ -a_{2j\,2i-1} & a_{2j-1\,2i-1} \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\left(a_{2j\,2i} + a_{2j-1\,2i-1}\right)\cdot 1 - \tfrac{1}{2}i\left(a_{2j\,2i} - a_{2j-1\,2i-1}\right)\cdot e_1 + \\
&+ \tfrac{1}{2}\Big(\left(-a_{2j-1\,2i}\right) - \left(-a_{2j\,2i-1}\right)\Big)\cdot e_2 - \tfrac{1}{2}i\Big(\left(-a_{2j-1\,2i}\right) + \left(-a_{2j\,2i-1}\right)\Big)\cdot e_3 \\
&= \tfrac{1}{2}\left(a_{2j-1\,2i-1} + a_{2j\,2i}\right)\cdot 1 - \left[-\tfrac{1}{2}i\left(a_{2j-1\,2i-1} - a_{2j\,2i}\right)\right]\cdot e_1 + \\
&- \left[\tfrac{1}{2}\left(a_{2j-1\,2i} - a_{2j\,2i-1}\right)\right]\cdot e_2 - \left[-\tfrac{1}{2}i\left(a_{2j-1\,2i} + a_{2j\,2i-1}\right)\right]\cdot e_3 = \overline{q_{\jmath\imath}}
\end{aligned}
$$

$$
A^{\dagger}\quad,\ \left(A^{\dagger}\right)_{ij} = \overline{a_{\jmath\imath}} \quad\Longrightarrow
$$

$$
\left(Q^{\dagger}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} \left(A^{\dagger}\right)_{2i-1\,2j-1} & \left(A^{\dagger}\right)_{2i-1\,2j} \\ \left(A^{\dagger}\right)_{2i\,2j-1} & \left(A^{\dagger}\right)_{2i\,2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath-1}} & \overline{a_{2\jmath\ 2\imath-1}} \\ \overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath}} & \overline{a_{2\jmath\ 2\imath}} \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\left(\overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath-1}} + \overline{a_{2\jmath\ 2\imath}}\right)\cdot 1 - \tfrac{1}{2}i\left(\overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath-1}} - \overline{a_{2\jmath\ 2\imath}}\right)\cdot e_1 + \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\left(\overline{a_{2\jmath\ 2\imath-1}} - \overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath}}\right)\cdot e_2 - \tfrac{1}{2}i\left(\overline{a_{2\jmath\ 2\imath-1}} + \overline{a_{2\jmath-1\ 2\imath}}\right)\cdot e_3 \\
&= \overline{\tfrac{1}{2}\left(a_{2\jmath-1\ 2\imath-1} + a_{2\jmath\ 2\imath}\right)}\cdot 1 - \overline{\left[-\tfrac{1}{2}\imath\left(a_{2\jmath-1\ 2\imath-1} - a_{2\jmath\ 2\imath}\right)\right]}\cdot e_1 - \\
&\qquad\qquad - \overline{\tfrac{1}{2}\left(a_{2\jmath-1\ 2\imath} - a_{2\jmath\ 2\imath-1}\right)}\cdot e_2 - \overline{\left[-\tfrac{1}{2}\imath\left(a_{2\jmath\ 2\imath-1} + a_{2\jmath-1\ 2\imath}\right)\right]}\cdot e_3 = {q_{ji}}^{\dagger}
\end{aligned}
$$

$$
A^T\quad,\ (A^T)_{ij} = a_{ji} \quad\Longrightarrow
$$

$$
(Q^T)_{ij} = \begin{pmatrix} (A^T)_{2i-1\,2j-1} & (A^T)_{2i-1\,2j} \\ (A^T)_{2i\,2j-1} & (A^T)_{2i\,2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2j-1\ 2i-1} & a_{2j\ 2i-1} \\ a_{2j-1\ 2i} & a_{2j\ 2i} \end{pmatrix}
$$

$$
-e_2\cdot\overline{q_{\jmath\imath}}\cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{2j\,2i} & -a_{2j-1\,2i} \\ -a_{2j\,2i-1} & a_{2j-1\,2i-1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{2j-1\,2i} & a_{2j\,2i} \\ -a_{2j-1\,2i-1} & -a_{2j\,2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2j-1\,2i-1} & a_{2j\,2i-1} \\ a_{2j-1\,2i} & a_{2j\,2i} \end{pmatrix} = (Q^T)_{ij}
$$

A נקראת דואלית לעצמה אם : $A^R = A \iff Q^R = Q$.

אם $Q^R = Q^\dagger \Longleftarrow$ אברי Q הם מספרים קווטרניונים ממשים , $q_{kj}^{(l)} \in R \quad l = 0,1,2,3$

(3) המכלול הסימפלקטי הגאוסי E_{4G} :

מוגדר במרחב המטריצות עם אברים משדה המספרים הקווטרניונים הדואליות לעצמן וההרמטיות האקראיות T_{4G} מסדר $N \times N$ (איברי המטריצות הם מספרים קווטרניונים ממשים) עם שתי דרישות :

א) המכלול נשמר תחת כל העתקה סימפלקטית כלשהי של T_{4G} לעצמו :

$$\ell : T_{4G} \to T_{4G} \ , \ \forall H \in T_{4G} \ ; \ H' = U^R \cdot H \cdot U \quad \Longrightarrow \quad H' \in T_{4G}$$

U היא מטריצה סימפלקטית ויונטרית כלשהי , $U^R U = U U^R = I \quad , \quad \mathrm{Z} = U \cdot \mathrm{Z} \cdot U^T$

$$H = H^R = H^\dagger \quad ; \quad U^{-1} = U^R = U^\dagger$$

ההסתברות להשתייכות של החלקים של האברים , המשתנים המקריים :
$H_{kj}^{(0)}, H_{kj}^{(1)}, H_{kj}^{(2)}, H_{kj}^{(3)} \ \ k \le j$ ($H_{kj}^{(\lambda)} = 0$, $k = j, \ \lambda = 1,2,3$) כאשר
$H_{kj} = H_{kj}^{(0)} \cdot 1 + H_{kj}^{(1)} \cdot e_1 + H_{kj}^{(2)} \cdot e_2 + H_{kj}^{(3)} \cdot e_3$ הוא איבר של מטריצה H
לנפח אינפיניטסימלי $dH = \prod_{k \le j} dH_{kj}^{(0)} \cdot \prod_{k<j} dH_{kj}^{(1)} \cdot \prod_{k<j} dH_{kj}^{(2)} \cdot \prod_{k<j} dH_{kj}^{(3)}$
אינה משתנה תחת ההעתקה .

כלומר : $P(H) \cdot dH = P(H') \cdot dH'$

$P(H) = P(H_{11}^{(0)}, \dots, H_{NN}^{(0)}, H_{12}^{(\lambda)}, \dots, H_{N-1\,N}^{(\lambda)})$ – פונקציית צפיפות ההסתברות

המשותפת של מ"מ $H_{kj}^{(\lambda)} \ \ k < j \ \ \lambda = 1,2,3$, $H_{kj}^{(0)} \ \ k \le j$.

$dH_{kj}^{(\lambda)}$ – קטע אינפיניטסימלי של ערכי המ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$.

ב) חלקי אברי המטריצה H המ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$ הם בלתי תלויים :

$$\mathrm{P}(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \cdot \prod_{\lambda=1,2,3} \prod_{k<j} f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$$

$f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$ - פונקציית צפיפות ההסתברות של מ"מ $H_{kj}^{(\lambda)}$.

מציאת צורת פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת של איברי מטריצה אקראית :

שתי התכונות אשר הנחנו אותם עבור $P(H)$ קובעות חד – משמעית צורת $P(H)$ והן :

תכונת השמורות (*Invariance*) קובעת כי כל פעולה על מטריצה כלשהי H הנשמרת תחת העתקת הדמיון של H.
(H' נקראת דומה ל- H אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $H' = P^{-1}HP$)
אפשר להביע אותה באמצעות פונקציה של העקיבות (*traces*) של מטריצות החזקה של H עד החזקה מסדר N , כלומר : $P(H) = f(\, tr(H)\,,\ tr(H^2)\,, \dots\dots, tr(H^N)\ )$

תכונת האי – תלות (של החלקים) של אברי המטריצה האקראית (משתנים מקריים) קובעת ש- $P(H)$ היא פונקציה של $tr(H)\,,\ tr(H^2)$ בלבד.

תזכורת של ארבע תכונות על מטריצות דומות :

(1) $rank(H') = rank(H)$; (2) $tr(H') = tr(H)$; (3) $det(H') = det(H)$

(4) ל- H ו- H' יש אותם ערכים עצמיים עם אותם ריבויים אלגבריים וגיאומטריים .

טענה : $$P(H) = C \cdot exp\{\, -a \cdot tr(H^2) + b \cdot tr(H)\, \}$$

כאשר : $a\,,b\,,C \in R$ קבועים ; $a\,,C > 0$.

נדון בנכונות הטענה באמצעות הדגמה של העתקת דמיון U אחת !

תהי U מטריצה מסדר $N \times N$ התלויה במשתנה θ דטרמיניסטי , נתונה ע"י :

$$U = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ -sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \quad 0 & & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \quad 0 & & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\,2\times2} & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$; מטריצה U היא אורתוגונלית (גם יונטרית) .

הוכחה : איברי מטריצה U הם מספרים ממשיים לכן $U^T = U^\dagger$.

$$U^T = U^\dagger = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix}\ ;\ B^T = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

B היא מטריצה אורתוגונלית (גם יונטרית) : $B \cdot B^T = B^T \cdot B = I_2$

$$U^TU = UU^T = \begin{pmatrix} B^T \cdot B & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_{N-2} \end{pmatrix} = I_N$$

מטריצה U היא גם מטריצה סימפלקטית (בהנחה N זוגי) , הוכחה :

יהיו : $$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Z_N = e_2 \cdot I_{\frac{N}{2}} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & Z_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$U \cdot Z_N \cdot U^T = \begin{pmatrix} B \cdot E_2 & 0 \\ 0 & Z_{N-2} \end{pmatrix} \cdot U^T = \begin{pmatrix} B \cdot E_2 \cdot B^T & 0 \\ 0 & Z_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot E_2 \cdot B^T = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

$$U \cdot Z_N \cdot U^T = Z_N \quad ; \quad U^{-1} = U^T = U^\dagger = U^R$$

תהי H' מטריצה אקראית מסדר $N \times N$ בלתי תלויה במשתנה θ .

תהי H מטריצה אקראית מסדר $N \times N$ המתקבלת ע"י טרנספורמציית הדמיון על מטריצה H' המגודרת ע"י המטריצה U : $H = U^{-1} H' U$.

$\Leftarrow$ $H'U = UH$; $U^{-1}H' = HU^{-1}$. גזירת המשוואה $H = U^{-1}H'U$ לפי θ :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} \cdot H'U + U^{-1}H' \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} \cdot UH + HU^{-1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

נסמן : $$A = \frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} U$$

$$\frac{\partial B^T}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -sin(\theta) & -cos(\theta) \\ cos(\theta) & -sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B^T}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial I_{N-2}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B^T}{\partial \theta} & 0_{2 \times N-2} \\ & 0_{N-2 \times N} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} U = \begin{pmatrix} \frac{\partial B^T}{\partial \theta} \cdot B & 0_{2 \times N-2} \\ & 0_{N-2 \times N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & 0_{2 \times N-2} \\ & 0_{N-2 \times N} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \left(\frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} U \right)^T = U^T \left(\frac{\partial U^{-1}}{\partial \theta} \right)^T = U^{-1} \frac{\partial (U^{-1})^T}{\partial \theta} = U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} E_2 & 0_{2 \times N-2} \\ & 0_{N-2 \times N} \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = A \cdot H + H \cdot A^T$$

$$H\cdot A^T = H\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & 0_{\,2\times N-2} \\ & & 0_{\,N-2\times N-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{*2} & H_{*1} & 0_{\,N\times N-2}\end{pmatrix}$$

H_{*1} ו- H_{*2} עמודה ראשונה ושניה של מטריצה H בהתאמה .

$$A\cdot H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & 0_{\,2\times N-2} \\ & & 0_{\,N-2\times N-2}\end{pmatrix}\cdot H = \begin{pmatrix} -H_{2*} \\ H_{1*} \\ 0_{\,N-2\times N}\end{pmatrix}$$

H_{1*} ו- H_{2*} שורה ראשונה ושניה של מטריצה H בהתאמה

$$\frac{\partial H}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} -H_{12}-H_{21} & H_{11}-H_{22} & -H_{23} & \cdots & -H_{2N} \\ -H_{22}+H_{11} & H_{21}+H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1N} \\ -H_{32} & H_{31} & & & \\ \vdots & \vdots & & 0_{\,N-2\times N-2} & \\ -H_{N2} & H_{N1} & & & \end{pmatrix}$$

כאשר : H_{kj} ; $k,j = 1,2,\dots,N$ הם איברי מטריצה H .

תכונת האי-תלות של האיברים (חלקי האיברים) של מטריצה H גוררת שפונקציית צפיפות ההסתברות שלהם היא : $P(H) = \prod_{(\lambda)}\prod_{k\le j} f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$

תכונת השמורות (*Invariance*) $P(H)\cdot dH = P(H')\cdot dH'$ גוררת ש- $P(H)$ היא פונקציה בלתי תלויה במשתנה θ .

$$\frac{\partial P(H)}{\partial\theta} = \sum_{\substack{k\le j\\(\lambda)}}\left[\frac{\partial f_{kj}^{(\lambda)}\left(H_{kj}^{(\lambda)}\right)}{\partial H_{kj}^{(\lambda)}}\cdot\frac{\partial H_{kj}^{(\lambda)}}{\partial\theta}\cdot\frac{P(H)}{f_{kj}^{(\lambda)}\left(H_{kj}^{(\lambda)}\right)}\right] = 0$$

חלוקה ב $P(H)$; $$\sum_{\substack{k\le j\\(\lambda)}}\left[\frac{1}{f_{kj}^{(\lambda)}}\cdot\frac{\partial f_{kj}^{(\lambda)}}{\partial H_{kj}^{(\lambda)}}\cdot\frac{\partial H_{kj}^{(\lambda)}}{\partial\theta}\right] = 0$$

עכשיו נניח **המכלול האורתוגונלי הגאוסי** (אותו תהליך לגבי מכלול יונטרי וסימפלקטי) .
כלומר : נניח כי מטריצה H' היא מטריצה ממשית סימטרית והטרנספורמציה המוגדרת ע"י מטריצה U היא טרנספורמציה אורתוגונלית ולכן איברי מטריצה H הם H_{kj} ממשיים .

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\leq j}\left[\ \frac{1}{f_{kj}}\cdot\frac{\partial f_{kj}}{\partial H_{kj}}\cdot\frac{\partial H_{kj}}{\partial\theta}\ \right]=0$$

נטפל באיברי מטריצה H : H_{kj} , $k\leq j$. לפי מטריצה $\frac{\partial H}{\partial\theta}$:

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial\theta}=-2\cdot H_{12}= \ ; \ \frac{\partial H_{12}}{\partial\theta}=H_{11}-H_{22} \ ; \ \frac{\partial H_{22}}{\partial\theta}=2\cdot H_{12}$$

$$\frac{\partial H_{1j}}{\partial\theta}=-H_{2j} \quad ; \quad \frac{\partial H_{2j}}{\partial\theta}=H_{1j} \qquad j=3,\dots,N$$

$$\frac{\partial H_{kj}}{\partial\theta}=0 \quad k\leq j \quad k,j=3,\dots\ ,N$$

נציב במשוואה הנ"ל :

$$\left[\frac{1}{f_{22}}\cdot\frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}}-\frac{1}{f_{11}}\cdot\frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}}\right]\cdot 2H_{12}+\frac{1}{f_{12}}\cdot\frac{\partial f_{12}}{\partial H_{12}}\cdot(H_{11}-H_{22})+$$

$$+\sum_{j=3}^{N}\left[\ \frac{1}{f_{2j}}\cdot\frac{\partial f_{2j}}{\partial H_{2j}}\cdot H_{1j}-\frac{1}{f_{1j}}\cdot\frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}}\cdot H_{2j}\ \right]=0$$

צורת המשוואה היא כמו : $x(H_{11},H_{12},H_{22})+\sum_{j=3}^{N}y_j(H_{1j},H_{2j})=0$

כל אחת מתוך הפונקציות : $x(H_{11},H_{12},H_{22})$; $y_j\left(H_{1j},H_{2j}\right)$ $j=3,\dots,N$ בלתי תלויה בפונקציה אחרת כי הן פונקציות של משתנים (אקראיים) בלתי תלויים אחד בשני ובנוסף הסכום שלהן קבוע שווה לאפס , לכן :

$$y_j\left(H_{1j},H_{2j}\right)\equiv constant \ \ ; \ \ x(H_{11},H_{12},H_{22})\equiv constant$$

$$\frac{1}{f_{2j}}\cdot\frac{\partial f_{2j}}{\partial H_{2j}}\cdot H_{1j}-\frac{1}{f_{1j}}\cdot\frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}}\cdot H_{2j}=C_j \quad ; \quad \text{קבוע } C_j$$

נחלק את המשוואה ב- $H_{1j}\cdot H_{2j}$:

$$\frac{1}{f_{2j}}\cdot\frac{\partial f_{2j}}{\partial H_{2j}}\cdot\frac{1}{H_{2j}}-\frac{1}{f_{1j}}\cdot\frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}}\cdot\frac{1}{H_{1j}}=\frac{C_j}{H_{1j}\cdot H_{2j}}$$

פונקציה $h(x)=\frac{C_j}{x}$, $x\neq 0$; גזירה ברציפות .

שתי פונקציות $f_{1j}(H_{1j})$ ו- $f_{2j}(H_{2j})$ הן פונקציות צפיפות ההסתברות גזירות ברציפות .

. פונקציה זו גזירה ברציפות ; $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{x}$

$C_j = 0$: הנמצאת בנספח (**1**) לפי טענת העזר ; $g_{2j}(H_{2j}) - g_{1j}(H_{1j}) = h(H_{1j}H_{2j})$

$g_{2j}(H_{2j}) = g_{1j}(H_{1j}) = const$; $h(x) \equiv 0 \ \Leftarrow \ a \cdot ln(|x|)$: אינה מהצורה $h(x)$ כי

$$\frac{1}{f_{2j}} \cdot \frac{\partial f_{2j}}{\partial H_{2j}} \cdot \frac{1}{H_{2j}} = \frac{1}{f_{1j}} \cdot \frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}} \cdot \frac{1}{H_{1j}} = -4a \ ; \ \text{קבוע} \ a$$

$$\frac{1}{f_{1j}} \cdot \frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}} \cdot \frac{1}{H_{1j}} = -4a \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_{1j}}{\partial H_{1j}} = -4a \cdot H_{1j} \cdot f_{1j}(H_{1j})$$

$$\boxed{f_{1j}(H_{1j}) = C_{1j} \cdot exp(-2a \cdot {H_{1j}}^2) \ ; \ f_{2j}(H_{2j}) = C_{2j} \cdot exp(-2a \cdot {H_{2j}}^2) \ ; \ j = 3, \dots , N}$$

$$\left[\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} - \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}}\right] \cdot 2H_{12} + \frac{1}{f_{12}} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial H_{12}} \cdot (H_{11} - H_{22}) = 0$$

נחלק ב- $2H_{12} \cdot (H_{11} - H_{22})$:

$$\frac{1}{f_{12}} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial H_{12}} \cdot \frac{1}{2H_{12}} = \left[\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} - \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}}\right] \cdot \frac{1}{H_{22} - H_{11}}$$

המשוואה היא מהצורה $y(H_{12}) = x(H_{11}, H_{22})$, לכן $x = y = constant$

$$\frac{1}{f_{12}} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial H_{12}} \cdot \frac{1}{2H_{12}} = \left[\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} - \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}}\right] \cdot \frac{1}{H_{22} - H_{11}} = -2a$$

! יש לנו חופש בבחירת הקבוע

$$\frac{1}{f_{12}} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial H_{12}} \cdot \frac{1}{2H_{12}} = -2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{12}(H_{12}) = C_{12} \cdot exp(-2a \cdot {H_{12}}^2)}$$

$$\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} - \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}} = 2a \cdot H_{11} - 2a \cdot H_{22}$$

$$\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} + 2a \cdot H_{22} = \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}} + 2a \cdot H_{11} \quad ; \quad y(H_{22}) = x(H_{11}) = const$$

$$\frac{1}{f_{22}} \cdot \frac{\partial f_{22}}{\partial H_{22}} + 2a \cdot H_{22} = \frac{1}{f_{11}} \cdot \frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}} + 2a \cdot H_{11} = b \ ; \ \text{קבוע} \ b$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial H_{11}} = (-2a \cdot H_{11} + b) \cdot f_{11}(H_{11})$$

$$\boxed{f_{11}(H_{11}) = C_{11} \cdot exp\left(-a \cdot {H_{11}}^2 + b \cdot H_{11}\right) ;\ \ f_{22}(H_{22}) = C_{22} \cdot exp\left(-a \cdot {H_{22}}^2 + b \cdot H_{22}\right)}$$

לגבי האיברים H_{kj} ; $k,j = 3, \dots\ ,N$ $\ k \le j$ מתקיים $\frac{\partial H_{kj}}{\partial \theta} = 0$, תוצאה זו מצביעה על אי-תלותם במשתנה θ , נחשב אותם במפורש :

$$H_{kj} = \sum_{y=1}^{N} \sum_{x=1}^{N} {U^{-1}}_{kx} \cdot {H'}_{xy} \cdot U_{yj} = {U^{-1}}_{kk} \cdot {H'}_{kj} \cdot U_{jj} = {H'}_{kj}$$

ולכן $f_{kj}\left(H_{kj}\right) = f_{kj}\left({H_{kj}}'\right)$

האיברים ${H_{kj}}'$ לא השתנו תחת ההעתקה .

$$P(H) = C \cdot exp\left\{-a \cdot \left[{H_{11}}^2 + {H_{22}}^2 + 2{H_{12}}^2 + 2\sum_{j=3}^{N}\left({H_{1j}}^2 + {H_{2j}}^2\right)\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot\, exp\{\, b \cdot [\, H_{11} + H_{22}\,]\,\} \cdot \prod_{3 \le k \le j}^{N} f_{kj}\left(H_{kj}\right)$$

העקיבה של מטריצה H : $\ tr(H) = \sum_{j=1}^{N} H_{jj}$

העקיבה של מטריצה H^2 : $\ {H^2}_{jj} = \sum_{k=1}^{N} H_{jk} \cdot H_{kj} = \sum_{k=1}^{N} {H_{kj}}^2$

$$tr(H^2) = \sum_{j=1}^{N} {H^2}_{jj} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} {H_{kj}}^2 = \sum_{j=1}^{N} {H_{jj}}^2 + 2 \cdot \sum_{1 \le k < j}^{N} {H_{kj}}^2$$

העקיבה של מטריצה H^N ; $2 < N$: $\ tr(H^N) = \sum_{j=1}^{N} {H_{jj}}^N + \cdots$

אם H' ו- H הן מטריצות מסדר 2×2 ומטריצה U היא : $U = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ אזי

$$P(H) = C \cdot exp\left\{\, -a \cdot \left[\, {H_{11}}^2 + {H_{22}}^2 + 2{H_{12}}^2 \,\right] + b \cdot [\, H_{11} + H_{22}\,]\,\right\}$$

$$P(H) = C \cdot exp\{\, -a \cdot tr(H^2) + b \cdot tr(H)\,\}$$

לחישוב $f_{kj}\left(H_{kj}\right)$; $k,j=3,\dots\ ,N$ $k\le j$, אנחנו אמורים לדון באופן כללי בכל הטרנספורמציות U האורתוגונליות האפשריות אך אפשר להסיק בעזרת תכונת השמורות הקובעת $P(H)$ היא פונקציה של $tr(H)\ ,\ tr(H^2)\ ,\dots\dots,tr(H^N)$. מתוך חישוב מפורש של $tr(H)$ ו- $tr(H^2)$. חישוב מחובר ראשון ב- $tr(H^N)$ $2<N$ ומתוצאות החישוב פונקציות הצפיפות של חלק מאיברי מטריצה H , הצורה הכללית של פונקציית הצפיפות ההסתברות המשותפת של איברי מטריצה אקראית H גם היא :

$\boldsymbol{P(H)=C\cdot exp\{-a\cdot tr(H^2)+b\cdot tr(H)\}}$ כאשר $a\ ,b\ ,C$ קבועים ממשיים $a\ ,C>0$

הקבועים $a\ ,b$ נקבעים ע"י תנאים מצורפים , הקבוע C נקבע ע"י כך שהאינטגרל של $P(H)$ על כל התחום בו מוגדרים איברי H שווה ל- 1 .

פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת (פצה"מ) של ערכים עצמיים של מטריצות אקראיות :

תזכורת : יהיה θ_j ערך עצמי של מטריצה H מסדר $N \times N$, $1 \le j \le N$:

(1) θ^k הוא ערך עצמי של מטריצה H^k ; (2) $tr(H) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j$

פצה"מ של אברי H :

$$P(H) = C \cdot exp\{ -a \cdot tr(H^2) + b \cdot tr(H) \} = C \cdot exp\left\{ -a \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j^2 + b \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j \right\}$$

ערכים עצמיים של מטריצה אקראית הם כמובן משתנים אקראיים .

(1) המכלול האורתוגונלי הגאוסי :

H היה מטריצה סימטרית , לכן היה לכסינה אורתוגונלית וע"ע שלה הם מספרים ממשים :

$$H = U \cdot D \cdot U^T$$

מטריצה D אלכסונית , אברי האלכסון הראשי הם ע"ע של H . מטריצה U היא אורתוגונלית העמודות שלה הם וקטורים עצמיים של H השייכים לע"ע בהתאמה .

$P(H)$ היא פצה"מ של $\frac{N^2+N}{2} = N + \frac{N^2-N}{2}$ משתנים אקראיים (מ"א) בלתי תלויים .

N מספר אברי האלכסון הראשי ו- $\frac{N^2-N}{2}$ מספר האברים מעל או מתחת האלכסון הראשי .

נניח כי ה-ע"ע הם מ"א שונים ,אם יש שני ע"ע שווים , זה יתקיים בתחום אינפיניטסימלי של פצה"ם שלהם , לכן אפשר להתעלם ממקרה זה .

המטריצה U אינה תלויה ב-ע"ע של מטריצה H , נניח בלי הגבלת הכלליות כי אברי U תלויים ב- $\ell = \frac{N^2-N}{2}$ מ"א בלתי תלויים בלבד , מ"א אלה הם $p_1 , \dots , p_\mu , \dots , p_\ell$.

נבנה העתקה כלשהי לקבלת θ_j , p_μ מ - H_{kj} $k \le j$, לפי תורת ההסתברות פצה"מ של θ_j , p_μ היא :

$$P(\theta_1, \dots , \theta_N, p_1 , \dots , p_\ell) = P(H) \cdot | J(\theta, p) | =$$
$$= C \cdot exp\left\{ -a \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j^2 + b \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j \right\} \cdot | J(\theta_1, \dots , \theta_N, p_1 , \dots , p_\ell) |$$

$J(\theta, p)$ הוא יעקוביאן ההעתקה : $$J(\theta, p) = \frac{\partial(H_{11}, \dots, H_{NN}, H_{12}, \dots, H_{N-1\, N})}{\partial(\theta_1, \dots , \theta_N, p_1 , \dots, p_\ell)}$$

נגזור את המשוואה $U^T \cdot U = I$ לפי p_μ $\mu = 1,2,\dots,\ell$:

$$\frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} \cdot U + U^T \cdot \frac{\partial U}{\partial p_\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} \cdot U = -\, U^T \cdot \frac{\partial U}{\partial p_\mu}$$

נסמן : $S^{(\mu)} = U^T \cdot \frac{\partial U}{\partial p_\mu}$ מטריצה זו היא אנטי סימטרית .

נגזור את המשוואה $H = U \cdot D \cdot U^T$ לפי p_μ :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_\mu} = \frac{\partial U}{\partial p_\mu} \cdot D \cdot U^T + U \cdot D \cdot \frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} \quad \Longrightarrow \quad U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U = U^T \cdot \frac{\partial U}{\partial p_\mu} \cdot D + D \cdot \frac{\partial U^T}{\partial p_\mu} \cdot U$$

$$\Longrightarrow \quad U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U = S^{(\mu)} \cdot D - D \cdot S^{(\mu)} \qquad (\mathbf{1})$$

נגזור את המשוואה : $U^T \cdot H \cdot U = D \implies H = U \cdot D \cdot U^T$; לפי θ_γ $\gamma = 1,2,\dots,N$:

$$\Longrightarrow \quad U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta_\gamma} \cdot U = \frac{\partial D}{\partial \theta_\gamma} \qquad (\mathbf{2})$$

המטריצות $U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U$, $U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta_\gamma} \cdot U$ הן סימטריות בגלל H סימטרית .

נכתוב משוואות $(\mathbf{1})$ ו- $(\mathbf{2})$ לפי רכיבים , נניח שהאינדקסים α ו- β מקיימים $1 \le \alpha \le \beta \le N$ בגלל הסימטריות .

$$\left[\, S^{(\mu)} \cdot D - D \cdot S^{(\mu)} \,\right]_{\alpha\beta} = \left[\, S^{(\mu)} \cdot D \,\right]_{\alpha\beta} - \left[\, D \cdot S^{(\mu)} \,\right]_{\alpha\beta} =$$

$$= \sum_{x=1}^{N} S^{(\mu)}{}_{\alpha x} \cdot D_{x\beta} - \sum_{x=1}^{N} D_{\alpha x} \cdot S^{(\mu)}{}_{x\beta} = S^{(\mu)}{}_{\alpha\beta} \cdot D_{\beta\beta} - D_{\alpha\alpha} \cdot S^{(\mu)}{}_{\alpha\beta} =$$

$$= S^{(\mu)}_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta - \theta_\alpha \cdot S^{(\mu)}_{\alpha\beta} = S^{(\mu)}_{\alpha\beta} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)$$

$$\left[\frac{\partial D}{\partial \theta_\gamma}\right]_{\alpha\beta} = \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \theta_\gamma} = \begin{cases} 1 \;, & \alpha = \beta = \gamma \\ 0 \;, & else \end{cases} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma}$$

; $\delta_{\alpha\beta}$ דלתא של קרוניקר

$$\left[U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} U^T{}_{\alpha k} \cdot \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\beta} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\alpha} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1 \le k < j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1 \le j < k}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} =$$

$$\left\{ \sum_{1 \le j < k}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} = \sum_{1 \le j < k}^{N} \frac{\partial H_{jk}}{\partial p_\mu} \cdot U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} = \sum_{1 \le k < j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\alpha} \cdot U_{k\beta} \right\}$$

$$\left[U^T \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\alpha} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1 \le k < j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot \left(U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} + U_{j\alpha} \cdot U_{k\beta} \right)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial \theta_\gamma} \cdot U_{j\alpha} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial \theta_\gamma} \cdot (U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} + U_{j\alpha} \cdot U_{k\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \\ \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\alpha} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot \left(U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} + U_{j\alpha} \cdot U_{k\beta}\right) = S_{\alpha\beta}^{(\mu)} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \end{cases}$$

מערכת משוואות אלגברית לינארית זו ($\frac{N^2+N}{2}$ משוואות) אפשר לכתוב אותה בצורת כפל מטריצות בצורה הבאה :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_{jj}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{kj}}{\partial \theta_\gamma} \\ \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{j\alpha} \cdot U_{j\beta} \\ U_{k\alpha} \cdot U_{j\beta} + U_{j\alpha} \cdot U_{k\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \\ S_{\alpha\beta}^{(\mu)} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \end{pmatrix}$$

המטריצה השמאלית היא מטריצת היעקוביאן $[J(\theta,p)]$ בעלת $\frac{N^2+N}{2}$ שורות , שורה ראשונה : $\gamma = 1,2,\dots,N$, שורה שניה : $\mu = 1,2,\dots,\ell$; ו- $\frac{N^2+N}{2}$ עמודות , עמודה ראשונה : $j = 1,2,\dots,N$, עמודה שניה : $1 \le k < j \le N$.

המטריצה האמצעית המוכפלת במטריצת היעקוביאן מצד ימין , בעלת $\frac{N^2+N}{2}$ שורות בהתאמה לחלוקת עמודות מטריצת היעקוביאן , ו- $\frac{N^2+N}{2}$ עמודות $1 \le \alpha \le \beta \le N$.

מטריצת התוצאה (ימינית) בעלת $\frac{N^2+N}{2}$ שורות בהתאמה לחלוקת שורות מטריצת היעקוביאן ו- $\frac{N^2+N}{2}$ עמודות בהתאמה לחלוקת עמודות המטריצה האמצעית .

שלושת המטריצות ריבועיות מסדר $\frac{N^2+N}{2}$, ניקח דטרמיננטה :
דטרמיננטה של כפל שתי מטריצות שווה לכפל בין שתי הדטרמיננטה של שתי המטריצות .

אברי המטריצה האמצעית ומטריצה $S^{(\mu)}$ תלויים באברי מטריצה U ולכן תלויים ב- p_μ $\mu = 1,2,\dots,\ell$ בלבד , הדטרמיננטה שלהן היא פונקציה של p_μ בלבד .
נסמן את הדטרמיננטה של המטריצה האמצעית ב- $f(p) = f(p_1, \dots ,p_\ell)$.
מתקיים $f(p) \neq 0$.

דטרמיננטה של מטריצת התוצאה :
נשים לב : עבור $\alpha < \beta$ מתקיים : $\delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) = 0$
פעולה אלמנטרית על מטריצה מסוג כפל סקלר בעמודה או בשורה גוררת כי דטרמיננטה של המטריצה המתקבלת שווה לכפל דטרמיננטה של המטריצה המקורית באותו סקלר .

$$\begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \\ S_{\alpha,\beta}^{(\mu)} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \end{vmatrix} = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \cdot \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} \\ S_{\alpha,\beta}^{(\mu)} \end{vmatrix} = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \cdot g(p_1, \dots, p_\ell)$$

$$g(p) = g(p_1, \dots, p_\ell) \neq 0$$

הדטרמיננטה של מערכת המשוואות האלגברית הליניארית היא :

$$J(\theta,p)\cdot f(p)=\prod_{\alpha<\beta}\left(\theta_\beta-\theta_\alpha\right)\cdot g(p)$$

חלוקה ב- $f(p)$ תיתן : $J(\theta,p)=\prod_{\alpha<\beta}\left(\theta_\beta-\theta_\alpha\right)\cdot h(p)$

נציב $J(\theta,p)$ בפונקצית צפיפות המשותפת של המשתנים האקראיים $\theta_j\ ,p_\mu$:

$$P(\theta,p)=C\cdot exp\left\{-a\cdot\sum_{j=1}^{N}\theta_j^2+b\cdot\sum_{j=1}^{N}\theta_j\right\}\cdot\prod_{\alpha<\beta}\left|\theta_\beta-\theta_\alpha\right|\cdot|h(p)|$$

נבצע אינטגרציה על כל התחום בו מוגדרים p_μ כאשר θ_j נשארים קבועים ואז פונקציית צפיפות ההסתברות המשותפת של ערכים עצמיים θ_j היא :

$$P(\theta_1,\dots,\theta_N)=C\cdot exp\left\{-a\cdot\sum_{j=1}^{N}\theta_j^2+b\cdot\sum_{j=1}^{N}\theta_j\right\}\cdot\prod_{1\le\alpha<\beta\le N}\left|\theta_\beta-\theta_\alpha\right|$$

נבצע העתקה ליניארית על כל התחום בו מוגדרים הערכים העצמיים האקראיים כך ש-

$\theta_j=\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot x_j+\frac{b}{2\cdot a}\ ;\ a>0$, יעקוביאן ההעתקה הוא $J(x_1,\dots,x_N)=\frac{\partial(\theta_1,\dots,\theta_N)}{\partial(x_1,\dots,x_N)}=\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{N}{2}}$

$$-a\cdot\theta_j^2+b\cdot\theta_j=-a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot x_j+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+b\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot x_j+\frac{b}{2\cdot a}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x_j^2-\frac{b}{\sqrt{2a}}\cdot x_j-\frac{b^2}{4\cdot a}+\frac{b}{\sqrt{2a}}\cdot x_j+\frac{b^2}{2\cdot a}=-\frac{1}{2}x_j^2+\frac{b^2}{4\cdot a}\quad;\ \theta_\beta-\theta_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\left(x_\beta-x_\alpha\right)$$

$$\Longrightarrow\quad P(x_1,\dots,x_N)=P(\theta_1,\dots,\theta_N)\cdot|\,J(x_1,\dots,x_N)\,|=$$

$$=C\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2+N\cdot\frac{b^2}{4\cdot a}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{\ell}{2}}\cdot\prod_{1\le\alpha<\beta\le N}\left|x_\beta-x_\alpha\right|\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{N}{2}}=$$

$$=C\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{\ell+N}{2}}\cdot exp\left\{N\cdot\frac{b^2}{4\cdot a}\right\}\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2\right\}\cdot\prod_{1\le\alpha<\beta\le N}\left|x_\beta-x_\alpha\right|$$

נסמן : $C_1=C\cdot\left(\frac{1}{2a}\right)^{\frac{\ell+N}{2}}\cdot exp\left\{N\cdot\frac{b^2}{4\cdot a}\right\}$ מספר קבוע

$$\Longrightarrow\quad P(x_1,\dots,x_N)=C_1\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}x_j^2\right\}\cdot\prod_{1\le\alpha<\beta\le N}\left|x_\beta-x_\alpha\right|$$

הקבוע C_1 נקבע כאשר ההסתברות על כל התחום היא 1 .

(2) המכלול היונטרי הגאוסי :

H היה מטריצה הרמיטית , לכן היה לכסינה יונטרית וע"ע שלה הם מספרים ממשים:

$$H = U \cdot D \cdot U^{\dagger}$$

מטריצה D אלכסונית , אברי האלכסון הראשי הם ע"ע של H . מטריצה U היא יונטרית העמודות שלה הם וקטורים עצמיים של H השייכים לע"ע בהתאמה .

כל מה עשינו במקרה האורתוגונלי חל גם על המקרה היונטרי חוץ מכמה דברים :

במקום U^T תהיה $U^{\dagger}$, מטריצה $S^{(\mu)}$ היא אנטי הרמיטית .

$P(H)$ היא פצה"מ של $\mathrm{N}^2 = N + 2 \cdot \frac{N^2-N}{2}$ משתנים אקראיים בלתי תלויים .

מספר המשתנים האקראיים p_μ הוא $\ell = 2 \cdot \frac{N^2-N}{2} = N^2 - N$.

$$S_{\alpha\beta}^{(\mu)} = S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)} + i \cdot S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)} \quad ; \quad (U^{\dagger})_{kj} = {U_{jk}}^{*} \quad ; \quad H_{kj} = H_{kj}^{(0)} + i \cdot H_{kj}^{(1)}$$

הערה : a^* הוא מספר מרוכב צמוד של $a \in C$.

יעקוביאן ההעתקה :

$$J(\theta,p) = \frac{\partial\left({H_{11}}^{(0)},\dots,{H_{NN}}^{(0)},{H_{12}}^{(0)},\dots,{H_{N-1\,N}}^{(0)},{H_{12}}^{(1)},\dots,{H_{N-1\,N}}^{(1)}\right)}{\partial(\theta_1,\dots,\theta_N,p_1,\dots,p_\ell)}$$

$$\left[U^{\dagger} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} {U^{\dagger}}_{\alpha k} \cdot \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot U_{j\beta} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le j<k}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta}$$

$$\left\{ \sum_{1\le j<k}^{N} \frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} = \sum_{1\le j<k}^{N} \frac{\partial {H_{jk}}^{*}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} = \sum_{1\le k<j}^{N} \frac{\partial {H_{kj}}^{*}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{k\beta} \right\}$$

$$\left[U^{\dagger} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^{N} \left(\frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} {U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + \frac{\partial {H_{kj}}^{*}}{\partial p_\mu} {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{k\beta} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial {H_{jj}}^{(0)}}{\partial p_\mu} \cdot {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^{N} \left\{ \frac{\partial {H_{kj}}^{(0)}}{\partial p_\mu} \cdot \left({U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} + {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{k\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial {H_{kj}}^{(1)}}{\partial p_\mu} \cdot \left({U_{k\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} \cdot i - {U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{k\beta} \cdot i\right) \right\}$$

נסמן :

$${U_{j\alpha}}^{*} \cdot U_{j\beta} = {A_1}^{(j)(\alpha\beta)} + i \cdot {A_2}^{(j)(\alpha\beta)} \quad ; \quad {A_1}^{(j)(\alpha\beta)}, {A_2}^{(j)(\alpha\beta)} \in \boldsymbol{R}$$

$${U_{k\alpha}}^{*} U_{j\beta} + {U_{j\alpha}}^{*} U_{k\beta} = {B_1}^{(kj)(\alpha\beta)} + i \cdot {B_2}^{(kj)(\alpha\beta)} \quad ; \quad {B_1}^{(kj)(\alpha\beta)}, {B_2}^{(kj)(\alpha\beta)} \in \boldsymbol{R}$$

$${U_{k\alpha}}^{*} U_{j\beta} \cdot i - {U_{j\alpha}}^{*} U_{k\beta} \cdot i = {C_1}^{(kj)(\alpha\beta)} + i \cdot {C_2}^{(kj)(\alpha\beta)} \quad ; \quad {C_1}^{(kj)(\alpha\beta)}, {C_2}^{(kj)(\alpha\beta)} \in \boldsymbol{R}$$

$$(\mathbf{1})\quad \left[U^{\dagger}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_{\mu}}\cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}\cdot\left(A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} + i\cdot A_2{}^{(j)(\alpha\beta)}\right) +$$

$$+\ \sum_{1\le k<j}^{N}\left\{\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}\left(B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + i\cdot B_2{}^{(kj)(\alpha\beta)}\right) + \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_{\mu}}\left(C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + i\cdot C_2{}^{(kj)(\alpha\beta)}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}\cdot A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\left(\frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_{\mu}}\ C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)}\right) +$$

$$+\ i\cdot\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}\cdot A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\left(\frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_{\mu}}\ C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)}\right)\right\} =$$

$$=\ S_{\alpha\beta}^{(\mu)}\cdot\left(\theta_{\beta}-\theta_{\alpha}\right)\ = S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)}\cdot\left(\theta_{\beta}-\theta_{\alpha}\right) + i\cdot S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)}\cdot\left(\theta_{\beta}-\theta_{\alpha}\right)$$

גזירה לפי θ_{γ} גם היא : $\quad(\mathbf{2})\quad \left[U^{\dagger}\cdot\frac{\partial H}{\partial \theta_{\gamma}}\cdot U\right]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\cdot\delta_{\alpha\gamma}$

גם כאן נניח ש- $1\le\alpha\le\beta\le N$ בגלל ההרמטיות של $U^{\dagger}\cdot\frac{\partial H}{\partial \theta_{\gamma}}\cdot U\ ;\ U^{\dagger}\cdot\frac{\partial H}{\partial \theta_{\gamma}}\cdot U$

נפרק שתי המשוואות $(\mathbf{1})$ ו- $(\mathbf{2})$ כל אחת לשתי משוואות עבור החלק הממשי והחלק המדומה :

משוואה $(\mathbf{1})$:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} +\ \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_{\mu}}C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} = S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)}\left(\theta_{\beta}-\theta_{\alpha}\right)\\ \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}A_2{}^{(j)(\alpha\beta)} +\ \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_{\mu}}B_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_{\mu}}C_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} = S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)}\left(\theta_{\beta}-\theta_{\alpha}\right)\end{cases}$$

משוואה $(\mathbf{2})$:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial \theta_{\gamma}}A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} +\ \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial \theta_{\gamma}}B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial \theta_{\gamma}}C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} = \delta_{\alpha\beta}\cdot\delta_{\alpha\gamma}\\ \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial \theta_{\gamma}}A_2{}^{(j)(\alpha\beta)} +\ \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial \theta_{\gamma}}B_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} + \sum_{1\le k<j}^{N}\ \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial \theta_{\gamma}}C_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} = 0\end{cases}$$

נוכיח כי $A_2{}^{(j)(\alpha\beta)} = B_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} = C_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} = 0$ עבור המקרה $\alpha=\beta$, הוכחה :

$$U_{j\alpha} = a + b\cdot i\quad ;\quad U_{k\alpha} = x + y\cdot i$$

$$U_{j\alpha}{}^{*}\cdot U_{j\alpha} = \left|U_{j\alpha}\right|^{2} = a^{2}+b^{2}\quad\Longrightarrow\quad A_2{}^{(j)(\alpha\alpha)} = 0$$

$$U_{k\alpha}{}^{*}\cdot U_{j\alpha} = (x-y\cdot i)\cdot(a+b\cdot i) = ax+by+(bx-ay)\cdot i$$

$$U_{j\alpha}{}^{*}\cdot U_{k\alpha} = (a-b\cdot i)\cdot(x+y\cdot i) = ax+by+(ay-bx)\cdot i$$

$$U_{k\alpha}{}^{*}\cdot U_{j\alpha} + U_{j\alpha}{}^{*}\cdot U_{k\alpha} = 2ax+2by\quad\Longrightarrow\quad B_2{}^{(kj)(\alpha\alpha)} = 0$$

$$\left(U_{k\alpha}{}^{*}\cdot U_{j\alpha} - U_{j\alpha}{}^{*}\cdot U_{k\alpha}\right)\cdot i = 2ay-2bx\quad\Longrightarrow\quad C_2{}^{(kj)(\alpha\alpha)} = 0$$

נכתוב את המשוואות האלגבריות הליניאריות בצורת כפל מטריצות תוך הפרדה בין המקרה $\alpha<\beta$ למקרה $\alpha=\beta$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial \theta_\gamma} \\ \frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1{}^{(j)(\alpha\alpha)} & A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} & A_2{}^{(j)(\alpha\beta)} \\ B_1{}^{(kj)(\alpha\alpha)} & B_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} & B_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} \\ C_1{}^{(kj)(\alpha\alpha)} & C_1{}^{(kj)(\alpha\beta)} & C_2{}^{(kj)(\alpha\beta)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)} \cdot \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right) \end{pmatrix}$$

שלושת המטריצות הן ריבועיות מסדר N^2 .

ניקח דטרמיננטה :

$$J(\theta,p) \cdot f(p) = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^2 \cdot g(p) \implies J(\theta,p) = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^2 \cdot h(p)$$

על ידי אותו תהליך נקבל פצה"מ של הערכים העצמיים θ_j , $1 \le j \le N$:

$$P(\theta_1, \dots, \theta_N) = C \cdot exp\left\{ -a \cdot \sum_{j=1}^N \theta_j^2 + b \cdot \sum_{j=1}^N \theta_j \right\} \cdot \prod_{1\le\alpha<\beta\le N} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^2$$

ועל ידי העתקה ליניארית מתאימה על θ_j נקבל פצה"מ חדשה :

$$P(x_1, \dots, x_N) = C \cdot exp\left\{ - \sum_{j=1}^N x_j^2 \right\} \cdot \prod_{1\le\alpha<\beta\le N} (x_\beta - x_\alpha)^2$$

הקבוע C נקבע כאשר ההסתברות על כל התחום היא 1 .

(3) המכלול הסימפלקטי הגאוסי :

עוד פעם כל מה עשינו במקרה האורתוגונלי והיונטרי חל על המקרה הסימפלקטי עם קצת שנויים .

H מטריצה דואלית לעצמה והרמיטית כלומר איברים שלה הם מספרים קווטרניונים ממשיים .
על פי משפט קיים H לכסינה כך ש : $H = U \cdot D \cdot U^R$, כאשר U היא מטריצה סימפלקטית ויונטרית $\mathrm{Z} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{Z} \cdot U^T$, D מטריצה אלכסונית עם ערכים עצמיים של H על האלכסון הראשי .

כל המטריצות הן מעל המרחב $H^{N\times N}$.

מעל המרחב $C^{2N\times 2N}$, המטריצה D היא אלכסונית של בלוקים : $\begin{pmatrix} \theta_j & 0 \\ 0 & \theta_j \end{pmatrix}$

הערכים העצמיים θ_j הם מספרים ממשיים .

ל- H ע"ע בעלי ריבוי אלגברי 2 , לכן : $tr(H^2) = 2 \cdot \sum_{j=1}^N \theta_j^2 \;\; ; \;\; tr(H) = 2 \cdot \sum_{j=1}^N \theta_j$

$P(H)$ היא פצה"מ של $2\mathrm{N}^2 - \mathrm{N} = N + 4 \cdot \frac{N^2-N}{2}$ משתנים אקראיים בלתי תלויים .
מספר המשתנים האקראיים p_μ הוא $\ell = 2N^2 - 2N$.

$$(U^R)_{kj} = \overline{U_{jk}} \quad ; \quad H_{kj} = H_{kj}^{(0)} \cdot 1 + H_{kj}^{(1)} \cdot e_1 + H_{kj}^{(2)} \cdot e_2 + H_{kj}^{(3)} \cdot e_3$$

$$S_{\alpha\beta}^{(\mu)} = S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)} \cdot 1 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)} \cdot e_1 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(2)} \cdot e_2 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(3)} \cdot e_3$$

הערה : $\bar{a}$ הוא מספר קווטרניוני דואלי של $a \in H$.

יעקוביאן ההעתקה : $J(\theta,p) = \frac{\partial\left(H_{11}{}^{(0)},\dots,H_{NN}{}^{(0)},H_{12}{}^{(\lambda)},\dots,H_{N-1\,N}{}^{(\lambda)}\right)}{\partial(\theta_1,\dots,\theta_N,p_1,\dots,p_\ell)} \quad ; \quad \lambda = 0,1,2,3$

$$\left[U^R \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{jj}}{\partial p_\mu} \cdot \overline{U_{j\alpha}} \cdot U_{j\beta} + \sum_{1\le k<j}^N \left\{\frac{\partial H_{kj}}{\partial p_\mu} \cdot \overline{U_{k\alpha}} \cdot U_{j\beta} + \frac{\partial \overline{H_{kj}}}{\partial p_\mu} \cdot \overline{U_{j\alpha}} \cdot U_{k\beta}\right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} \cdot A + \sum_{1\le k<j}^N \left\{ \frac{\partial H_{kj}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} \cdot B + \frac{\partial H_{kj}{}^{(1)}}{\partial p_\mu} \cdot C + \frac{\partial H_{kj}{}^{(2)}}{\partial p_\mu} \cdot D + \frac{\partial H_{kj}{}^{(2)}}{\partial p_\mu} \cdot E\right\}$$

$$A = A_0{}^{(j)(\alpha\beta)} \cdot 1 + A_1{}^{(j)(\alpha\beta)} \cdot e_1 + A_2{}^{(j)(\alpha\beta)} \cdot e_2 + A_3{}^{(j)(\alpha\beta)} \cdot e_3$$

$$B,C,D,E \implies B = B_0{}^{(jk)(\alpha\beta)} \cdot 1 + B_1{}^{(jk)(\alpha\beta)} \cdot e_1 + B_2{}^{(jk)(\alpha\beta)} \cdot e_2 + B_3{}^{(jk)(\alpha\beta)} \cdot e_3$$

$$\left[U^R \cdot \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \left(S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)} \cdot 1 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)} \cdot e_1 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(2)} \cdot e_2 + S_{\alpha\beta}^{(\mu)(3)} \cdot e_3 \right) \cdot (\theta_\beta - \theta_\alpha)$$

$$\left[U^R \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta_\gamma} \cdot U\right]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma}$$

על ידי אותו פיתוח משוואות כמו במקרה היונטרי נגיע למערכת משוואות ליניארית המוצגת באמצעות כפל מטריצות , $1 \le \alpha < \beta \le N$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(0)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(1)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(2)}}{\partial \theta_\gamma} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(3)}}{\partial \theta_\gamma} \\ \frac{\partial H_{jj}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(0)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(1)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(2)}}{\partial p_\mu} & \frac{\partial H_{jk}{}^{(3)}}{\partial p_\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{A_0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \widetilde{B_0} & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ \widetilde{C_0} & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ \widetilde{D_0} & D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ \widetilde{E_0} & E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(0)}(\theta_\beta - \theta_\alpha) & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(1)}(\theta_\beta - \theta_\alpha) & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(2)}(\theta_\beta - \theta_\alpha) & S_{\alpha\beta}^{(\mu)(3)}(\theta_\beta - \theta_\alpha) \end{pmatrix}$$

שלושת המטריצות הן ריבועיות מסדר $2N^2 - N$

ניקח דטרמיננטה :

$$J(\theta,p) \cdot f(p) = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^4 \cdot g(p) \implies J(\theta,p) = \prod_{\alpha<\beta} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^4 \cdot h(p)$$

על ידי אותו תהליך נקבל פצה"מ של הערכים העצמיים θ_j , $1 \le j \le N$:

$$P(\theta_1, \dots, \theta_N) = C \cdot exp\{-2a \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j^2 + 2b \cdot \sum_{j=1}^{N} \theta_j\} \cdot \prod_{1\le\alpha<\beta\le N} \left(\theta_\beta - \theta_\alpha\right)^4$$

ועל ידי העתקה ליניארית מתאימה על θ_j נקבל פצה"מ חדשה :

$$P(x_1, \dots, x_N) = C \cdot exp\{-2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j^2\} \cdot \prod_{1\le\alpha<\beta\le N} (x_\beta - x_\alpha)^4$$

הקבוע C נקבע כאשר ההסתברות על כל התחום היא 1 .

מודל הלוקליזציה של אנדרסון - Anderson localization :

בשנת 1958 חקר הפיזיקאי פיליפ אנדרסון מערכות קוונטיות הנמצאות במצבי אי – סדר כמו למשל מוצקים אמורפיים , במערכות אלה סידור היונים הוא אקראי אך המרחק בין כל שני יוניים שכנים כמעט שווה בכל המערכת .

אנדרסון מצא כי במתכות החל בהן מצבי אי – סדר האינטראקציה בין האלקטרונים החופשים והיונים מתוארת על ידי פוטנציאל חשמלי סטטי אקראי ותנועת האלקטרונים סביב היונים היא לוקאלית ואינה גלובלית , במילים אחרות , פונקציית הגל של האלקטרון אינה מתפשטת בכל מרחב המערכת אלה מתמקמת סביב האזור הנמצא בו האלקטרון וזה מה שקובע רמת ההולכה החשמלית של החומר .

המערכת תתואר באמצעות המילטוניאן במרחב n ממדי ,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\nabla^2 + V(\vec{x}) \quad , \quad \vec{x} \in R^n$$

$V(\vec{x})$ פוטנציאל סטטי אקראי .

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$ אופרטור הלפלסיאן .

$\hbar = 1.06 \times 10^{-34}\, J\cdot s$ קבוע פלאנק המצומצם .

$m = 9.11 \times 10^{-31}\, Kg$ מסת האלקטרון .

הבעיה היא בהינתן התפלגות ההסתברות של $V(\vec{x})$, איזה רמות של אנרגיה (ערכים עצמיים) , המצביים העצמיים (פונקציות הגל של האלקטרון) של ההימלטוניאן הם ממוקמים .

כלומר , מצב המערכת נקרא ממוקם (לוקאלי) בקטע אנרגיה A אם כל הפתרונות הלא – טריוויאליים של משוואת שרדינגר הלא תלויה בזמן : $H\cdot\psi(\vec{x}) = e\cdot\psi(\vec{x}) \quad , \quad e \in A$
שייכים למרחב הילברט : $\psi(\vec{x}) \in L^2(\boldsymbol{C})$.

$$L^2(\boldsymbol{C}) = \left\{ \psi(\vec{x}) \in \boldsymbol{C} \;\middle|\; \int_{R^n} |\psi(\vec{x})|^2 \cdot dv \; < \; \infty \right\}$$

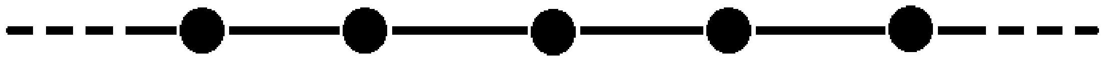
$dv = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ הוא אלמנט נפח אינפיניטסימאלי .

אחרת , אם האינטגרל מתבדר מצב המערכת נקרא גלובלי ← אין לוקליזציה .

- בניתוח מודל הלוקליזציה של אנדרסון נשתמש הן בשיטות אנליטיות והן בשיטות נומריות .

הלוקליזציה במערכות חד ממדיות :

נגדיר סריג חד-ממדי (תיל) אינסופי של יונים עם מרווח a בין כל יון .



ההמילטוניאן החד-ממדי הוא : $H = -\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$

משוואת שרדינגר החד ממדית היא : $-\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\frac{d^2\,\psi(x)}{dx^2}+V(x)\cdot\psi(x)=e\cdot\psi(x)$

ננתח את הבעיה בשיטה נומרית , נעשה דיסקרטיזציה על משוואת שרדינגר .

נפתח את $\psi(x)$ לטור טיילור סביב הנקודה $x=na$ (מיקום היון ה-n-י) עד לסדר 2 .

נסמן : $\psi_n \equiv \psi(na)$, $E = 2-\frac{2ma^2}{\hbar^2}\cdot e$, $V_n = -\frac{2ma^2}{\hbar^2}\cdot V(na)$

$$\psi(x)\cong\psi(na)+\psi'(na)\cdot(x-na)+\frac{1}{2}\psi''(na)\cdot(x-na)^2$$

$$\psi_{n+1}\equiv\ \psi(na+a)\cong\psi(na)+\psi'(na)\cdot a+\frac{1}{2}\psi''(na)\cdot a^2$$

$$\psi_{n-1}\equiv\ \psi(na-a)\cong\psi(na)-\psi'(na)\cdot a+\frac{1}{2}\psi''(na)\cdot a^2$$

$$\psi_{n+1}+\psi_{n-1}=2\cdot\psi_n+\psi''(na)\cdot a^2$$

$$\left.\frac{d^2\psi(x)}{dx}\right|_{x=na}=\psi''(na)=\frac{1}{a^2}\cdot[\,\psi_{n+1}-2\cdot\psi_n+\psi_{n-1}\,]$$

משוואת שרדינגר בנקודה $x=na$ היא :

$$-\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\psi''(na)+V(na)\cdot\psi(na)=e\cdot\psi(na)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2a^2m}\cdot\left[\psi_{n+1}-2\cdot\psi_n+\psi_{n-1}\right]=-V(na)\cdot\psi_n+e\cdot\ \psi_n$$

$$\psi_{n+1}+\psi_{n-1}=\frac{2a^2m}{\hbar^2}\cdot V(na)\cdot\psi_n+\left[\,2-\frac{2a^2m}{\hbar^2}\cdot e\,\right]\cdot\ \psi_n$$

משוואת שרדינגר הדיסקרטית : $\psi_{n+1}+\psi_{n-1}=(E-V_n)\cdot\ \psi_n$

המערכת קיימת בה לוקליזציה אם סדרת המספרים $\{\psi_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ שייכת למרחב הילברט של סדרות : $\{\psi_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\in\ell^2(\boldsymbol{C})$.

$$\ell^2(\boldsymbol{C}) = \left\{ \{f_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \ \middle|\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 < \infty \right\}$$

תנאי הכרחי לא מספיק לקיום הלוקליזציה (התכנסות הטור) הוא : $\lim_{n\to\pm\infty} |\psi_n| = 0$

דוגמא : ניקח למשל $V_n \equiv 0$, הפוטנציאל הוא זהותית אפס : $\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = E \cdot \psi_n$

אנרגיות עצמיות הן : $E = 2\cos(k)$, מצבים עצמיים הם : $\psi_n = A \cdot e^{i\cdot kn} + B \cdot e^{-i\cdot kn}$

k הוא מספר ממשי . הוכחה :

$$\begin{aligned}\psi_{n+1} + \psi_{n-1} &= A \cdot e^{i\cdot k(n+1)} + B \cdot e^{-i\cdot k(n+1)} + A \cdot e^{i\cdot k(n-1)} + B \cdot e^{-i\cdot k(n-1)} \\ &= A \cdot e^{i\cdot kn} \cdot \left(e^{i\cdot k} + e^{-i\cdot k}\right) + B \cdot e^{-i\cdot kn} \cdot \left(e^{-i\cdot k} + e^{i\cdot k}\right) \\ &= 2\cos(k) \cdot \left[\, A \cdot e^{i\cdot kn} + B \cdot e^{-i\cdot kn} \,\right] = 2\cos(k) \cdot \psi_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\psi_n|^2 = \psi_n \cdot \overline{\psi_n} &= \left(A \cdot e^{i\cdot kn} + B \cdot e^{-i\cdot kn}\right) \cdot \left(A \cdot e^{-i\cdot kn} + B \cdot e^{i\cdot kn}\right) = \\ &= A^2 + B^2 + AB \cdot e^{i\cdot 2kn} + AB \cdot e^{-i\cdot 2kn} = A^2 + B^2 + 2AB \cdot \cos(2kn)\end{aligned}$$

הטור $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2$ מתבדר , מסקנה : טווח האנרגיה $|E| < 2$ הוא פס של המצבים העצמיים של משוואת שרדינגר הדיסקרטית בלי לוקליזציה כאשר אין פוטנציאל.

נציע פתרון איטרטיבי למשוואת שרדינגר הדיסקרטית בעזרת מטריצת מעבר :

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = (E - V_n)\,\psi_n - \psi_{n-1} \\ \psi_n = \psi_n \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix}$$

עם תנאי התחלה : ψ_0 , ψ_1 ; ${\psi_0}^2 + {\psi_1}^2 \neq 0$, $n = 0,1,2,\dots$

נסמן : $\boldsymbol{A}(n) = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}(n) = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \ \Leftarrow\ \boldsymbol{z}(n) = \boldsymbol{P}(n-1) \cdot \boldsymbol{z}(1)$

כאשר : $\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{A}(n) \cdots \boldsymbol{A}(2) \cdot \boldsymbol{A}(1)$

הדטרמיננטה של מטריצה $\boldsymbol{A}(n)$ היא : $det[\,\boldsymbol{A}(n)\,] = 1$, לכן היא הפיכה .

טענה : $\boldsymbol{A}(n)$ היא מטריצה אקראית סימפלקטית ולכן שייכת למכלול הגאוסי הסימפלקטי .

הוכחה : צריך להראות שמתקיים $\mathrm{Z} = \boldsymbol{A}(n) \cdot \mathrm{Z} \cdot \boldsymbol{A}(n)^T$ כאשר : $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}(n) \cdot \mathrm{Z} \cdot \boldsymbol{A}(n)^T = \begin{pmatrix} E - V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}(n)^T = \begin{pmatrix} 1 & E - V_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - V_n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Z$$

מטריצה ההופכית היא : $\boldsymbol{A}(n)^{-1} = \boldsymbol{A}(n)^{R} = Z \cdot \boldsymbol{A}(n)^{T} \cdot Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & E - V_n \end{pmatrix}$

הנחה : איברי התהליך האקראי בזמן בדיד $\{ V_n \mid n \geq 1 \}$ הם משתנים אקראיים שווי התפלגות ובלתי תלויים , **לכן** איברי סדרת המטריצות האקראיות $\{ \boldsymbol{A}(n) \mid n \geq 1 \}$ הם שווי התפלגות ובלתי תלויים .

השערת פורלנד : עבור ערך אנרגיה E שרירותי לא נקבל תמיד ψ_n מצביים עצמיים מתאימים של המערכת , באמת על ψ_n לקיים בנוסף לתנאי התחלה גם תנאי שפה של המערכת הנדונה כדי לקבל קוונטיזציה של אנרגיה (אנרגיות עצמיות) ולהיות מצב עצמי , לכן על פרמטר E להיות בטווח האנרגיות העצמיות כדי לקבל פתרון שלם .

בתנאי הלוקליזציה המצבים העצמיים של רוב המערכות הקוונטיות במצב אי – סדר ממוקמים לפי דעיכה מעריכית : לכל $n \in N$ מתקיים $|\psi_n| \leq |\psi_0| \cdot e^{-\lambda_1 \cdot |n|}$ כך ש- λ_1 הוא מעריך ליאפונוב המקסימאלי של מטריצה האקראית $\boldsymbol{P}(n)$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 \leq |\psi_0|^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\lambda_1 \cdot n}\right) = |\psi_0|^2 \cdot \left(1 + \frac{2e^{-2\lambda_1}}{1-e^{-2\lambda_1}}\right) = |\psi_0|^2 \cdot \frac{1+e^{-2\lambda_1}}{1-e^{-2\lambda_1}}$$

מסקנה : ככל ש- λ_1 גדול הלוקליזציה יותר חזקה זאת או החומר העשוי ממנו הסריג יותר דיאלקטרי (יותר מבודד) .

הגדרה : **אורך הלוקליזציה** ε_0 של המערכת הנמצאת במצב אי – סדר מוגדר באמצעות ההופכי שלו כך ש - $\varepsilon_0^{-1} = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N} \cdot \langle \, ln[\, \|\boldsymbol{P}(N)\| \,] \, \rangle$

$\langle \quad \rangle$ מסמל התוחלת (ממוצע) של המשתנה האקראי , $\|\cdot\|$ מסמל הנורמה .

נורמה p של מטריצה מסדר $m \times n$ מעל שדה F מוגדרת בהתאם לאותה נורמה p של ויקטור כך ש – $\{ \|\vec{x}\|_p = 1 \quad \vec{x} \in F^n : \|A \cdot \vec{x}\|_p \} \|A\|_p = max$, $A \in F^{m \times n}$.

$p \geq 1$ הוא מספר ממשי , F הוא $\boldsymbol{R}$ או $\boldsymbol{C}$

נורמה p של ויקטור $\vec{x} \in F^n$ היא : $\|\vec{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$|a|$ הוא ערך המוחלט של $a \in F$.

נורמה $p = 1$: $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

נורמה $p = 2$: $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$

נורמת האינסוף $p = \infty$: $\|\vec{x}\|_\infty = max\{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \}$

באופן כללי הפיתוחים והתוצאות אינן תלויות באיזה נורמה p אנחנו משתמשים , ולכן לפשטות נשתמש בסמל $\|\cdot\|$. כאשר רוצים לדייק נשתמש בנורמה $p = 2$.

בתנאי השערת פורלנד מתקיים : $\lambda_1 = \varepsilon_0^{-1}$.

נחשב λ_1 ; למעשה נוכיח שוויון יותר חזק: $\lambda_1 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\cdot ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|]$

נגדיר תהליך אקראי $\{ U_n \ : \ n \geq 1 \}$ הבא :

$$U_1 = ln\left[\left\| \boldsymbol{A}(1)\cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|\right] , \ldots\ldots , \ U_n = ln\left[\left\| \boldsymbol{A}(n)\cdot \frac{\boldsymbol{P}(n-1)\cdot\vec{x}}{\|\boldsymbol{P}(n-1)\cdot\vec{x}\|}\right\|\right]$$

כך ש- $\vec{x}\in R^2$ כלשהו וההתפלגות של U_1 אינה תלויה ב- $\vec{x}$ אזי על פי משפט קיים הנזכר במקור $\boldsymbol{I.2}$: $[\boldsymbol{4}]$ $U_1, \ldots, U_n$ הם משתנים אקראיים שווי התפלגות ובלתי תלויים .

נסמן את הממוצע שלהם ב - $\bar{U}$: $\bar{U} = \frac{U_1+U_2+\cdots+U_{N-1}+U_N}{N}$, התפלגותו בלתי תלויה ב- $\vec{x}$

תוחלת הממוצע : $\langle \bar{U} \rangle = \frac{1}{N}\cdot\langle U_1+U_2+\cdots+U_{N-1}+U_N\rangle = \frac{\langle U_1\rangle+\langle U_2\rangle+\cdots+\langle U_N\rangle}{N} = \langle U_1\rangle$

נחשב סכום איברי התהליך האקראי עד איבר ה-N-י :

$$U_1+U_2+\cdots+U_{N-1}+U_N = ln\left[\left\| \boldsymbol{A}(1)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|\right]+\cdots+ln\left[\left\| \boldsymbol{A}(n)\cdot\frac{\boldsymbol{P}(n-1)\cdot\vec{x}}{\|\boldsymbol{P}(n-1)\cdot\vec{x}\|}\right\|\right] =$$

$$= ln[\ \frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\|\boldsymbol{A}(1)\cdot\vec{x}\|\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{P}(1)\cdot\vec{x}\|}\cdot\|\boldsymbol{A}(2)\cdot\boldsymbol{P}(2)\cdot\vec{x}\|\cdots$$

$$\cdots\frac{1}{\|\boldsymbol{P}(N-2)\cdot\vec{x}\|}\cdot\|\boldsymbol{A}(N-1)\cdot\boldsymbol{P}(N-2)\cdot\vec{x}\|\cdot\frac{1}{\|\boldsymbol{P}(N-1)\cdot\vec{x}\|}\cdot\|\boldsymbol{A}(N)\cdot\boldsymbol{P}(N-1)\cdot\vec{x}\|\ ] =$$

$$= ln\left[\frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\ \|\boldsymbol{A}(N)\cdot\boldsymbol{P}(N-1)\cdot\vec{x}\|\right] = ln\left[\left\|\boldsymbol{P}(N)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|\right]$$

$$ln\left[\left\|\boldsymbol{P}(N)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|\right] = U_1+U_2+\cdots+U_{N-1}+U_N$$

נחשב $ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|]$:

$$ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|] = ln\left[max\left\{\left\|\boldsymbol{P}(N)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\| \ : \ \vec{x}\in R^2 \right\}\right]$$

$$= max\left\{ ln\left[\left\|\boldsymbol{P}(N)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\|\right] \ : \ \vec{x}\in R^2 \right\}$$

$$= max\{ U_1+U_2+\cdots+U_{N-1}+U_N \ : \ \vec{x}\in R^2 \}$$

אזי : $\frac{1}{N}\cdot ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|] = max\{\bar{U} \ : \ \vec{x}\in R^2\}$ התוחלת היא :

$$\frac{1}{N}\cdot\langle ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|]\rangle = \langle\frac{1}{N}\cdot ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|]\rangle = \langle max\{\bar{U} \ : \ \vec{x}\in R^2\}\rangle$$

מצד אחד לפי משפט הגבול המרכזי : בהיתן N מספר גדול מאוד $\overline{U}$ מתפלג נורמלית . ידוע ערך מקסימאלי של משתנה אקראי נורמלי הוא התוחלת שלו .

לכן : $\langle\, max\{\ \overline{U}\ :\ \vec{x}\in R^2\ \}\,\rangle = max\{\ \langle\overline{U}\rangle\ :\ \vec{x}\in R^2\ \}$

אזי $\lambda_1 = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\cdot\langle\, ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|\,]\,\rangle = max\{\ \langle U_1\rangle\ :\ \vec{x}\in R^2\ \}$

מצד שני לפי חוק המספרים הגדולים : $\lim\limits_{N\to+\infty} P\,[\,|\,\overline{U} - \langle\overline{U}\rangle\,| \ge \varepsilon\,] = 0\ ,\ \forall\varepsilon > 0$

נקבל : $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\cdot ln[\|\boldsymbol{P}(N)\|\,] = max\{\ \langle U_1\rangle\ :\ \vec{x}\in R^2\ \} = \lambda_1$

נקבע ש- $V_1 \sim N(\,\mu\,,\sigma^2\,)$ הוא מ"א נורמלי עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

יהי $\|\vec{z}\| = 1\ ,\ \vec{z}\in R^2 \implies \vec{z} = (\,cos(\theta)\quad sin(\theta)\,)^T\ ,\ \theta\in R$

$$\boldsymbol{A}(1)\cdot\vec{z} = \begin{pmatrix} E - V_1 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} cos(\theta)\\ sin(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(E-V_1)\cdot cos(\theta) - sin(\theta)\\ cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{A}(1)\cdot\vec{z}\| = \sqrt{[\,(E-V_1)\cdot cos(\theta) - sin(\theta)\,]^2 + [\,cos(\theta)\,]^2} =$$

$$= \sqrt{(E-V_1)^2\cdot cos^2(\theta) - 2\cdot(E-V_1)\cdot cos(\theta)\cdot sin(\theta) + sin^2(\theta) + cos^2(\theta)}$$

$$= \sqrt{(V_1 - E)^2\cdot cos^2(\theta) + sin(2\theta)\cdot(V_1 - E) + 1}$$

נבצע טרנספורמציה של המשתנה האקראי V_1 ע"י $U = V_1 - E$ לכן $U\sim N(\mu - E, \sigma^2)$

$$U_1 = ln\big[\,\|\boldsymbol{A}(1)\cdot\vec{z}\|\,\big] = ln\left[\sqrt{U^2\cdot cos^2(\theta) + sin(2\theta)\cdot U + 1}\ \right]$$

$$\langle\, U_1\,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(u+E-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{u^2\cdot cos^2(\theta) + sin(2\theta)\cdot u + 1}\right]du$$

שתי הפונקציות $sin(2\theta)$ ו- $cos^2(\theta)$ הן מחזוריות עם מחזור השווה ל- π .

$$sin[2\cdot(\theta+\pi)] = sin(2\theta + 2\pi) = sin(2\theta)\ \ ,\ \ cos^2(\theta+\pi) = [-cos(\theta)]^2 = cos^2(\theta)$$

$cos(\theta) = cos(-\theta)$ פונקציה זוגית , $sin(2\theta) = -sin(-2\theta)$ פונקציה אי-זוגית

בהינתן ערכם של $E\,,\mu\,,\sigma$ מעריך ליאפונוב המקסימאלי הוא הערך המקסימאלי של $\langle\, U_1\,\rangle$ כפונקציה של θ בקטע הסגור $[0,\pi]$ או בקטע הסגור $[-\pi, 0]$.

$$\lambda_1 = \max_{0\le\theta\le\pi}\ \langle\, U_1\,\rangle$$

נתייחס ל- λ_1 כפונקציה של $E\,,\mu\,,\sigma$: $\lambda_1 = \lambda_1(E,\mu,\sigma)$

טענה : $\lambda_1(E,\mu,\sigma)$ היא פונקציה זוגית (סימטרית) לאורך הציר E ביחס לנקודה (μ,μ,σ) , כלומר : $\lambda_1(\mu+E,\mu,\sigma)=\lambda_1(\mu-E,\mu,\sigma)$. הוכחה :

$$\lambda_1(\mu+E,\mu,\sigma)=\max_{0\le\theta\le\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(u+E)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{u^2\cdot cos^2(\theta)+sin(2\theta)\cdot u+1}\right]du$$

$$=\max_{0\le\theta\le\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(u+E)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{(-u)^2\cdot cos^2(-\theta)+sin(-2\theta)\cdot(-u)+1}\right]du$$

נבצע החלפת משתנים $x=-u$, $dx=-du$, גבולות האינטגרציה מתחלפים .

$$=\max_{0\le\theta\le\pi}-\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(-x+E)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{x^2\cdot cos^2(-\theta)+sin(-2\theta)\cdot x+1}\right]dx$$

$$=\max_{0\le\theta\le\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-E)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{x^2\ \cdot cos^2(-\theta)+sin(-2\theta)\cdot x+1}\right]dx$$

נחליף את הזווית θ ב- $\alpha=-\theta$

$$=\max_{-\pi\le\alpha\le0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-E)^2}{2\cdot\sigma^2}}\cdot ln\left[\sqrt{x^2\ \cdot cos^2(\alpha)+sin(2\alpha)\,x+1}\right]dx$$

$$=\lambda_1(\mu-E,\mu,\sigma)$$

מסקנה : $\lambda_1(\mu+E,\mu,\sigma)=\lambda_1(\mu-E,\mu,\sigma)=\lambda_1(E,0,\sigma)$

חקירת המודל : נבצע סימולציה נומרית בתוכנת *MATLAB* להדגמת קיום לוקליזציה במערכות חד-ממדיות הנמצאות במצב אי סדר .

נזכיר הקשר בין אורך הלוקליזציה ε_0 ומעריך ליאפונוב המקסימאלי λ_1 של מטריצה המעבר האקראית $\boldsymbol{P}(n)$: $\lambda_1={\varepsilon_0}^{-1}$.

אם $\varepsilon_0\longrightarrow0\ \Leftrightarrow\ \lambda_1\longrightarrow+\infty$ במצב זה **יש לוקליזציה** : התיל הוא מבודד טוב

אם $\varepsilon_0\longrightarrow+\infty\ \Leftrightarrow\ \lambda_1\longrightarrow0$ במצב זה **אין לוקליזציה** : התיל הוא מוליך טוב

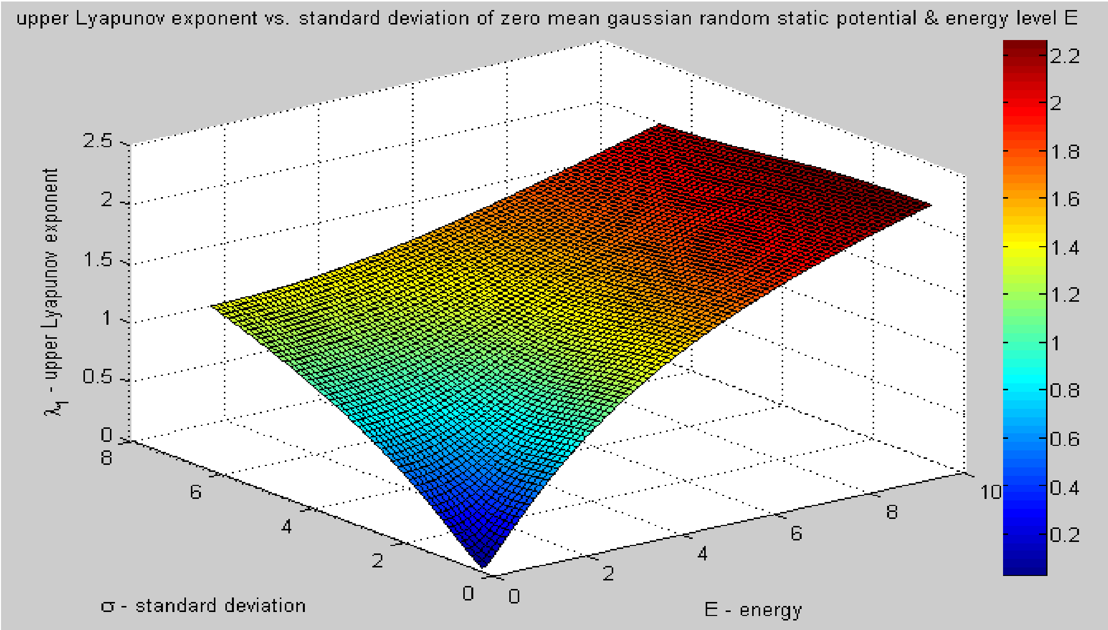
אנחנו נחקור מעריך ליאפונוב המקסימלי λ_1 הנותן לנו מידע על טיב ההולכה החשמלית של התיל (לחלופין טיב הדיאלקטריות של התיל) כפונקציה של שני משתנים : סטיית התקן σ של הפוטנציאל הסטטי האקראי V אשר ממוצעו $\boldsymbol{\mu}$ **נתון** , ורמת האנרגיה העצמית בה נמצא האלקטרון.

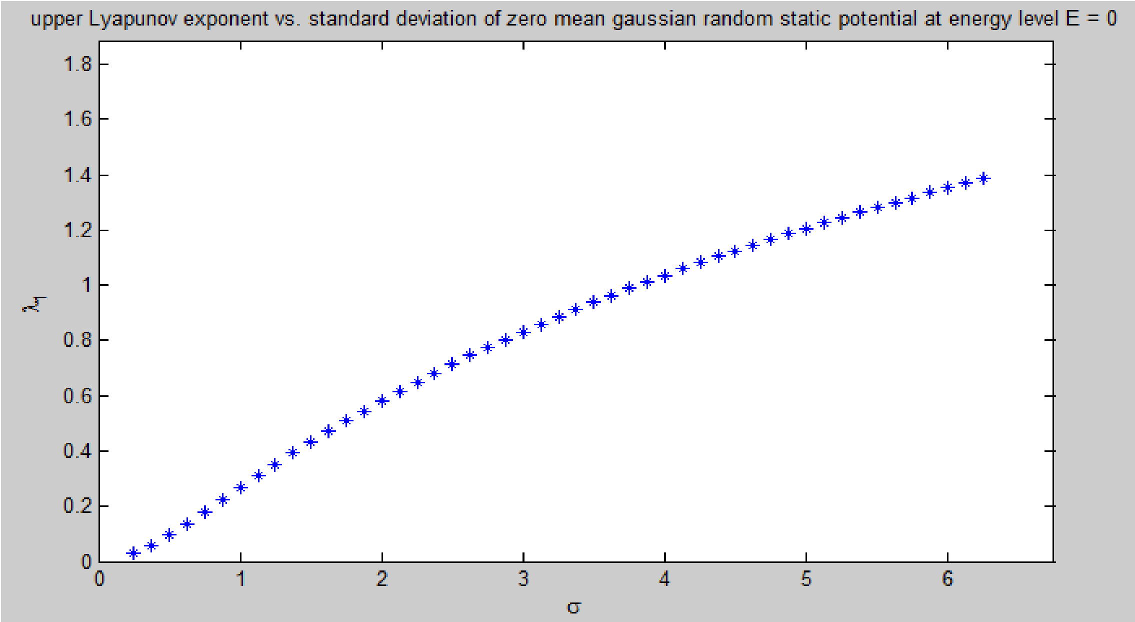
מספיק לחקור את המערכת כאשר $\mu=0$ ו- $E\ge0$ בגלל תוכנת הסימטריות של λ_1 הנ"ל .
הבהרה : יהיה μ^* ממוצע של V , נזיז ציר E ב- μ^* יחידות שמולאה אם $\mu^*>0$, או ב- $|\mu^*|$ יחידות ימינה אם $\mu^*<0$: $E\longrightarrow E+\mu^*$, אזי גם ערכי λ_1 יזוזו בהתאם ונקבל לפי המסקנה :

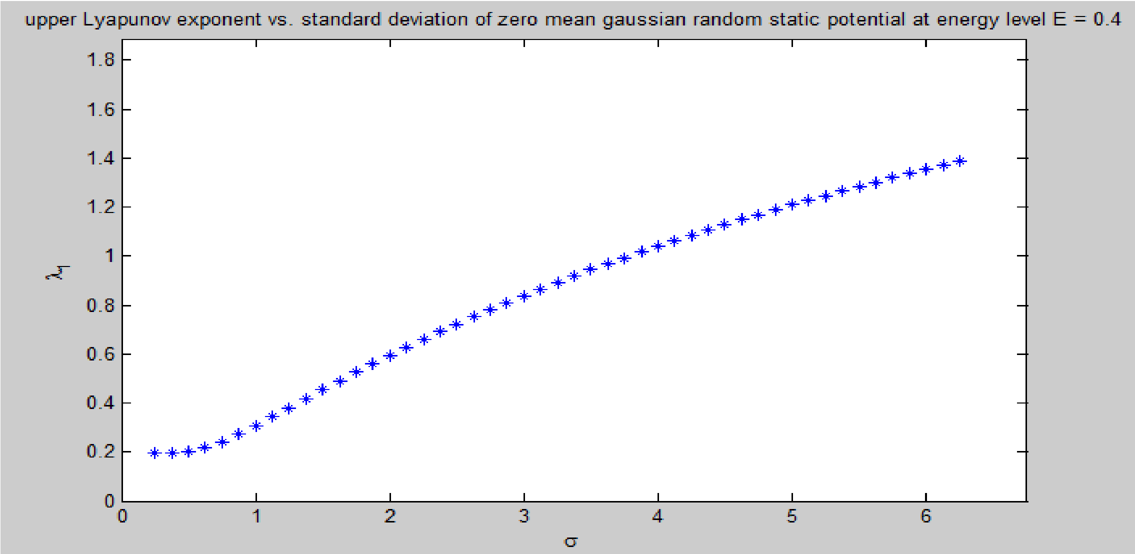
$$\lambda_1(E+\mu^*,\mu^*,\sigma)=\lambda_1(E,0,\sigma)=\lambda_1(-E,0,\sigma)$$

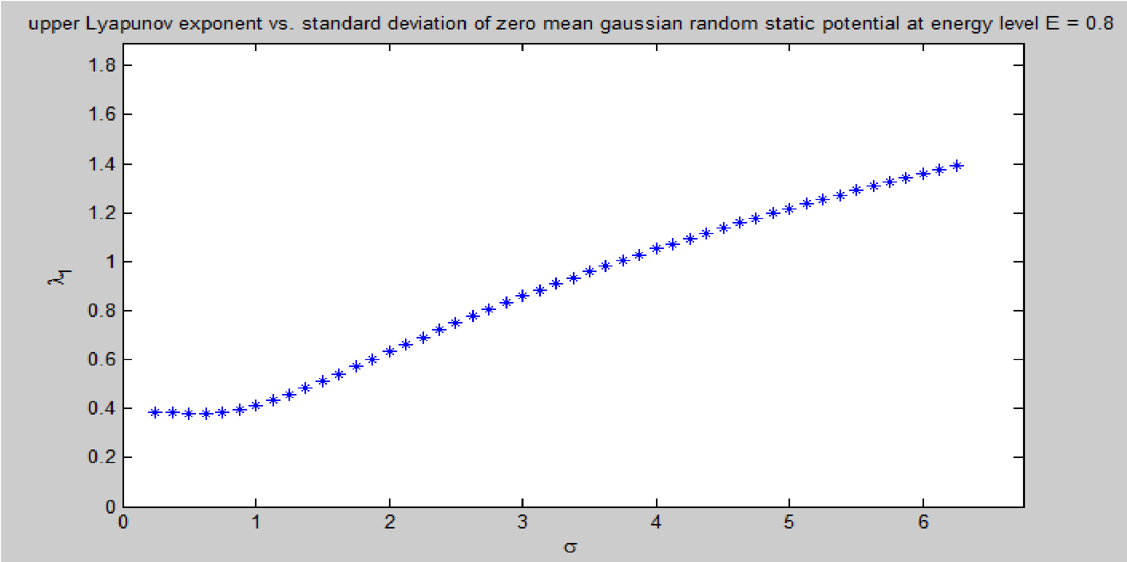
ככל ש- λ_1 יותר קטן התיל הוא יותר מוליך וככל ש- λ_1 יותר גדול התיל הוא יותר דיאלקטרי .
סטיית התקן הוא ממד לתיאור הפיזור סביב התוחלת (ממוצע) של ערכי המשתנה האקראי V ,
במילים אחרות היא המרחק הממוצע של ערכי V מהתוחלת .

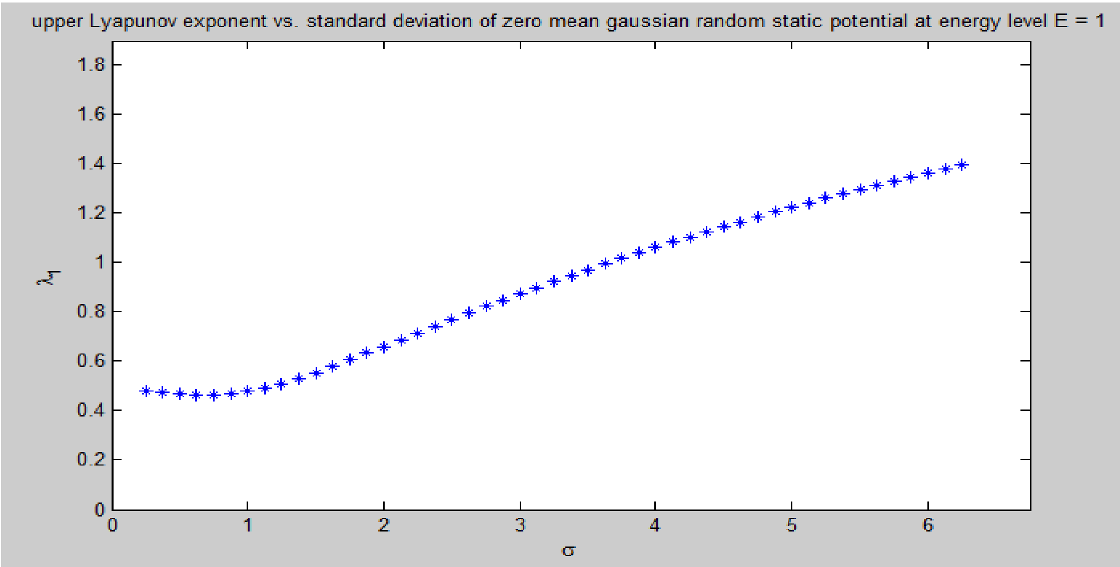
נציג גרף דו-ממדי של λ_1 כפונקציה של E בקטע $[0,9.5]$ ושל σ בקטע $[0.25,6.25]$ ושמונה גרפים חד-ממדים של λ_1 כפונקציה של σ באותו קטע בהינתן רמות אנרגיה עצמית והן $E = 0 , 0.4 , 0.8 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5$.

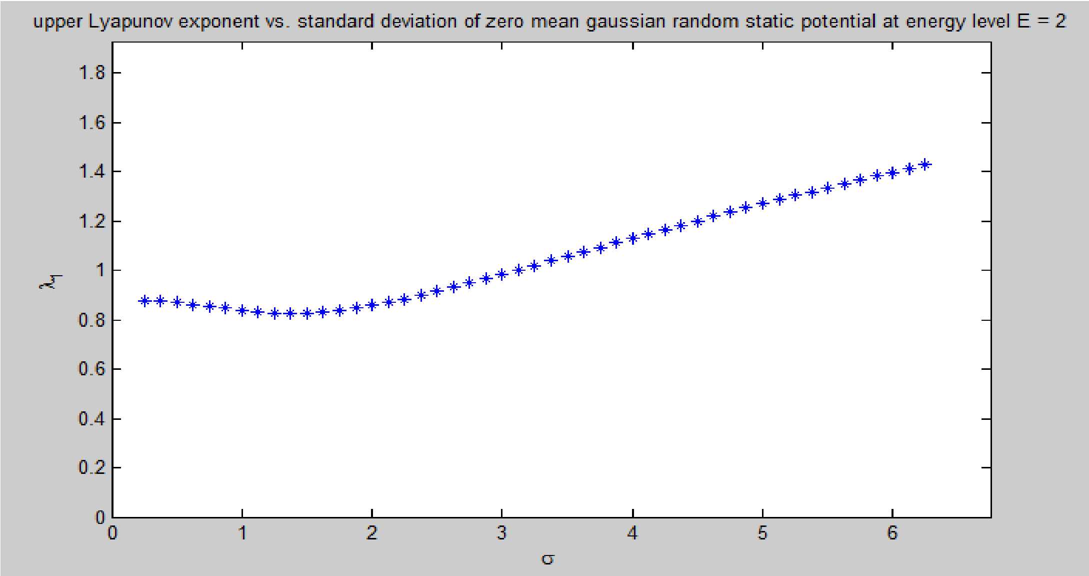


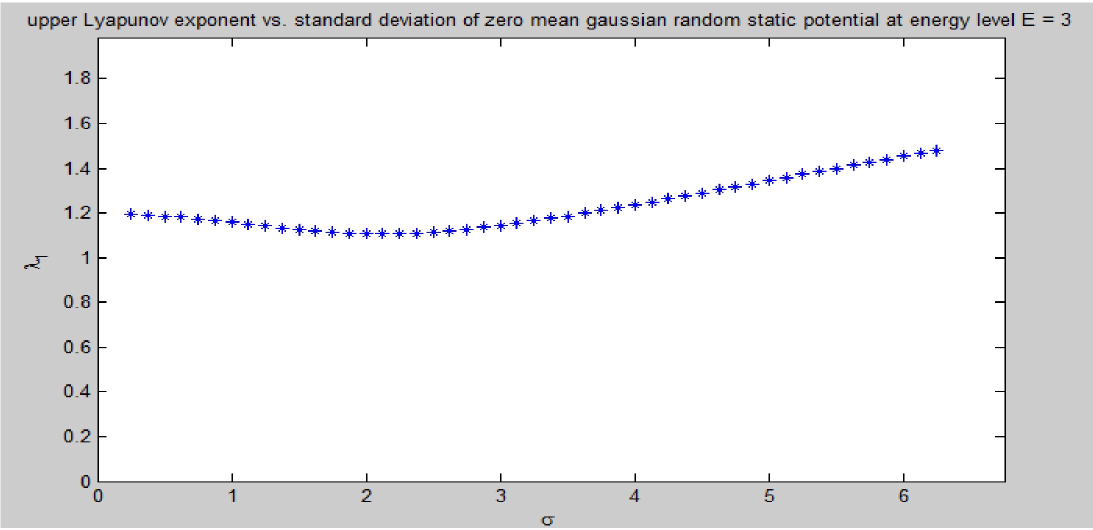


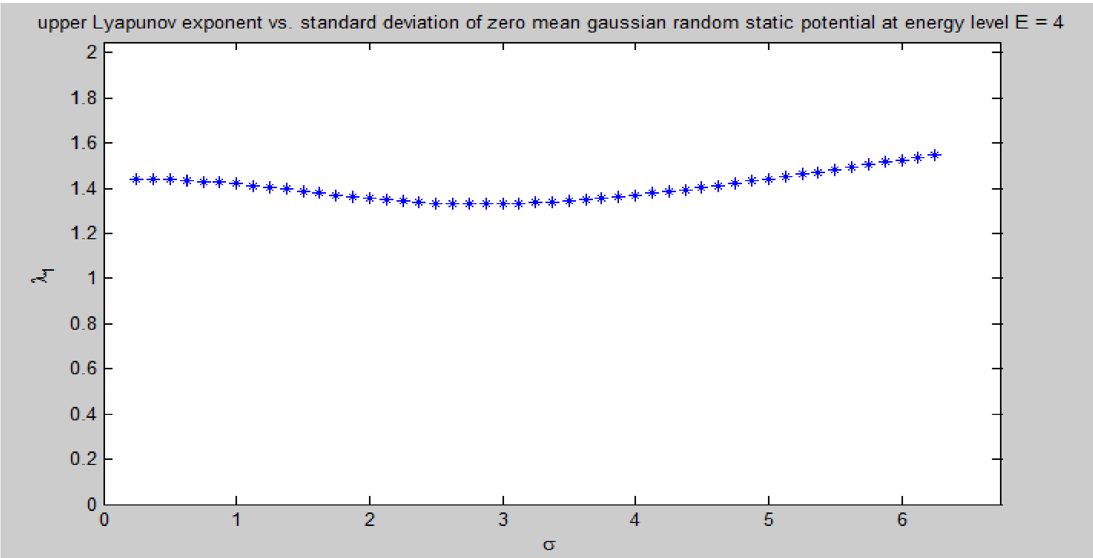

upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 0.4
λ_1
σ

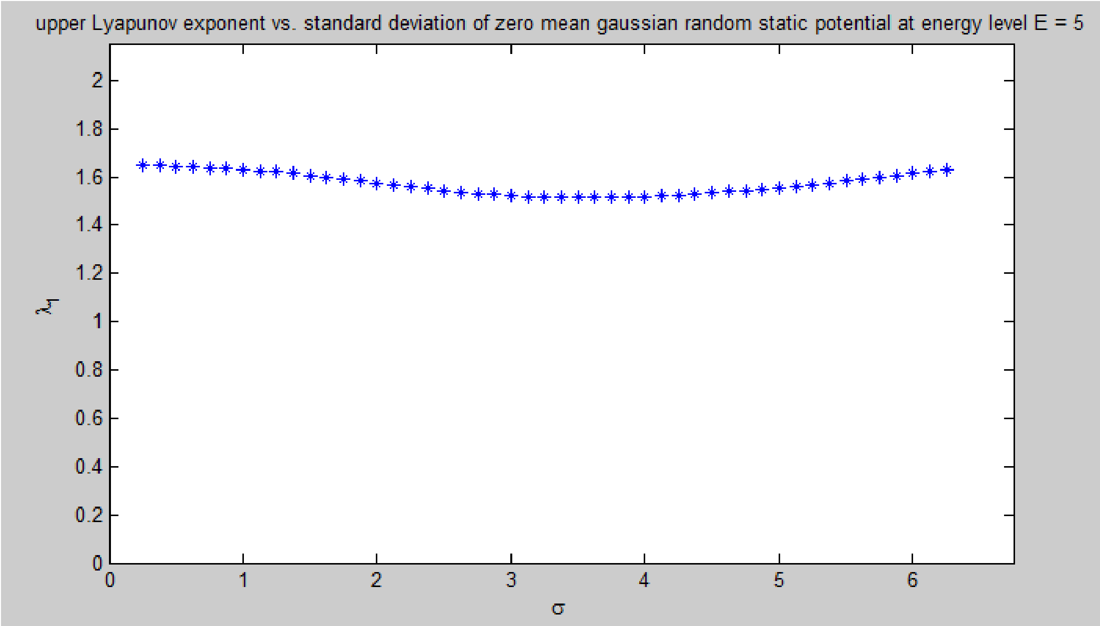

upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 0.8
λ_1
σ


upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 1
λ_1
σ


upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 2
λ_1
σ


upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 3
λ_1
σ


upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean gaussian random static potential at energy level E = 4
λ_1
σ



מסקנה על התנהגות המערכת על פי הגרפים :

ברמות אנרגיה גבוהות ערך λ_1 גדול ביחס לערכו ברמות אנרגיה נמוכות עבור כל ערך של סטיית התקן של הפוטנציאל הסטטי האקראי הגאוסי אשר מצביע על קיום תופעת הלוקליזציה ברמות אנרגיה אלו ולכן התיל במצבים אלו הוא דיאלקטרי , אין הולכה חשמלית בו .
לעומת זאת , ברמות אנרגיה נמוכות ערך λ_1 גדול עבור ערכים גבוהים של סטיית התקן אשר גם מצביע על הלוקליזציה , מנגד עבור ערכים נמוכים של סטיית התקן , כלומר ערכי הפוטנציאל הם זעירים הקרובים לממוצעו השווה לאפס , ערך λ_1 קטן ולכן יש חוסר לוקליזציה והתיל הוא מוליך .

אנליזה טנסורית

הקדמה :

יסודות האנליזה הטנסורית התפתחה לראשונה על ידי הפיסיקאי והמתמטיקאי הדגול קרל פרידריך גאוס כאשר עסק במבנים אלגבריים וגיאומטריה דיפרנציאלית , הפתוח הושלם ע"י המתמטיקאי האיטלקי **Gregorio Ricci-Curbastro** בשנת 1890 . הטנסור הוא מערך רב-ממדי של רכיבים המייצגים גודל פיסיקלי שיש לו טרנספורמציה מוגדרת תחת שינוי קואורדינטות. לחשבון טנסורים יש יישומים רחבים בתורת היחסות הכללית של אלברט איינשטיין , במכניקת הרצף ובחקירת תנועה בראונית , ביישום נתעסק בחקירת תנועה בראונית על משטחים שטוחים ועקומים תוך כדי שימוש בתוכנת MATLAB .

מערכת קואורדינטות עקומות :

תהי (x,y,z) קואורדינטות קרטזיות לנקודה $\boldsymbol{P}$ **כלשהי** במרחב R^3 **,** נניח כי כל קואורדינטה של הנקודה P היא פונקציה של שלושה משתנים בלתי תלויים : u_1,u_2,u_3 **.**

לכן קיימת העתקה ממערכת קואורדינטות (u_1,u_2,u_3) למערכת קואורדינטות קרטזיות (x,y,z) הבאה : $z=z(u_1,u_2,u_3)$ $\quad y=y(u_1,u_2,u_3)$ $\quad x=x(u_1,u_2,u_3)$ $\quad \mathbf{(1)}$

בהנחה כי שלושת הפונקציות גזירות ברציפות בכל מרחב R^3 ויעקוביאן ההעתקה אינו מתאפס. אז ההעתקה היא חד-חד ערכית והפיכה כלומר קיימת העתקה ממערכת קרטזית (x,y,z) למערכת (u_1,u_2,u_3) הבאה : $u_3=u_3(x,y,z)$ $\quad u_2=u_2(x,y,z)$ $\quad u_1=u_1(x,y,z)$ $\quad \mathbf{(2)}$

המערכת (u_1,u_2,u_3) נקראת **קואורדינטות עקומות** של הנקודה P .

תהי (c_1,c_2,c_3) קואורדינטות הנקודה P במערכת (u_1,u_2,u_3) , נגדיר משטחי רמה הבאים :

$u_1=c_1$ לאורכו u_2 ו- u_3 משתנים.

$u_2=c_2$ לאורכו u_1 ו- u_3 משתנים.

$u_3=c_3$ לאורכו u_1 ו- u_2 משתנים .

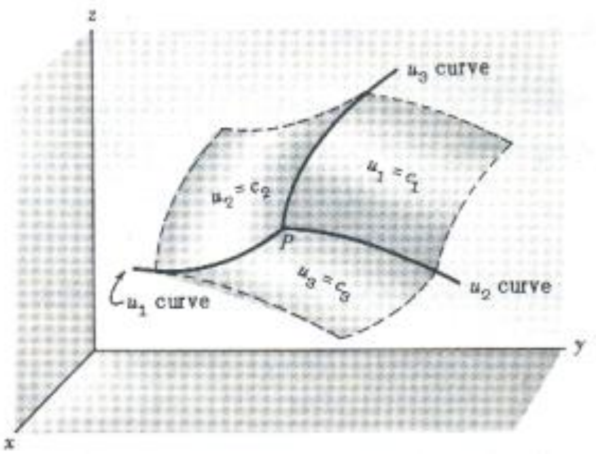
החיתוך בין המשטחים $u_1=c_1$ ו- $u_2=c_2$ נותן את העקום u_3 .

החיתוך בין המשטחים $u_1=c_1$ ו- $u_3=c_3$ נותן את העקום u_2 .

החיתוך בין המשטחים $u_2=c_2$ ו- $u_3=c_3$ נותן את העקום u_1 .

אם החיתוך בין כל שני משטחים הוא בזווית ישרה אז המערכת נקראת :
מערכת קואורדינטות עקומות אורתוגונלית .

ציור הדגמה למערכת קואורדינטות העקומות , בדף הבא :



בסיס במערכת קואורדינטות עקומות :

יהי $\vec{r} = x \cdot \hat{\imath} + y \cdot \hat{\jmath} + z \cdot \hat{k}$ וקטור מיקום נקודה כלשהי במרחב R^3 , אפשר לכתוב אותו על פי $(\mathbf{1})$ כך ש : $\vec{r}(u_1, u_2, u_3) = x(u_1, u_2, u_3) \cdot \hat{\imath} + y(u_1, u_2, u_3) \cdot \hat{\jmath} + z(u_1, u_2, u_3) \cdot \hat{k}$

וקטורי המשיקים לעקומים u_1, u_2, u_3 הם : $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$ בהתאמה .

וקטורי המשיקים לעקומים בנקודה P הם :

$$\boldsymbol{\ell_1} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right|_{u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3} \qquad \boldsymbol{\ell_2} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|_{u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3} \qquad \boldsymbol{\ell_3} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right|_{u_1=c_1, u_2=c_2, u_3=c_3}$$

נסמן ב - h_1, h_2, h_3 גדלי וקטורי המשיקים לעקומים בנקודה P הנקראים **מקדמי הסקלה** , ואז נכתוב : $\boldsymbol{\ell_1} = h_1 \cdot \boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{\ell_2} = h_2 \cdot \boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{\ell_3} = h_3 \cdot \boldsymbol{e_3}$

כאשר $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ וקטורי היחידה בכוונים המתאימים ומצביעים על הגדלת u_1, u_2, u_3 והם בלתי תלויים ליניארית.

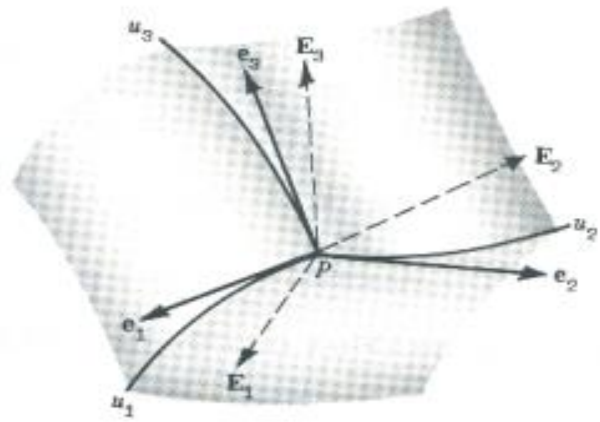
יהיו $\vec{\nabla} u_i(x, y, z)$ וקטורי הגראדינט של הפונקציות $u_i(x, y, z)$ $i = 1,2,3$, הם מאונכים למשטחי הרמה $u_i = c_i$.

נסמן ב- $\boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{L_2}, \boldsymbol{L_3}$ וקטורי הגראדינט המאונכים למשטחי הרמה : $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, $u_3 = c_3$ בנקודה P בהתאמה וב- $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}$ וקטורי היחידה המתאימים והם בלתי תלויים ליניארית.

לסיכום : לכל מערכת קואורדינטות עקומות נגדיר שתי קבוצות $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$, $\{\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}\}$ המהוות בסיס במרחב R^3, והן זהות אם ורק אם מערכת הקואורדינטות העקומות (u_1, u_2, u_3) היא אורתוגונלית .

הקבוצה $\{\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}\}$ נקראת **contravariance of vectors** .

הקבוצה $\{\boldsymbol{L_1}, \boldsymbol{L_2}, \boldsymbol{L_3}\}$ נקראת **covariance of vectors**.



יהי $\boldsymbol{A} \in R^3$, נפרק אותו לפי בסיס ה-**contravariance** ולפי בסיס ה-**covariance** :

$$\boldsymbol{A} = A^1 \cdot \boldsymbol{\ell_1} + A^2 \cdot \boldsymbol{\ell_2} + A^3 \cdot \boldsymbol{\ell_3} \quad , \quad \boldsymbol{A} = A_1 \cdot \boldsymbol{L_1} + A_2 \cdot \boldsymbol{L_2} + A_3 \cdot \boldsymbol{L_3}$$

המקדמים A^1, A^2, A^3 נקראים : contravariant component of $\boldsymbol{A}$.

המקדמים A_1, A_2, A_3 נקראים : covariant component of $\boldsymbol{A}$.

אלמנט אורך ונפח אינפיניטסימליים במערכת קואורדינטות עקומות:

יהי $d\vec{r} = dx \cdot \hat{\imath} + dy \cdot \hat{\jmath} + dz \cdot \hat{k}$ אלמנט וקטור העתק אינפיניטסימלי במרחב R^3 .

הדיפרנציאלים של ההעתקה $(\mathbf{1})$ הם :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} \cdot du_3$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3} \cdot du_3$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3} \cdot du_3$$

בהנחה כי הדיפרנציאלים חושבו בנקודה P , נציב ב- $d\vec{r}$:

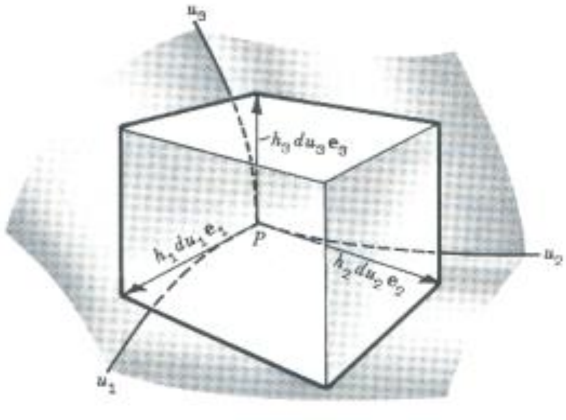
$$d\vec{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} \cdot du_3\right) \cdot \hat{\imath} + \left(\frac{\partial y}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3} \cdot du_3\right) \cdot \hat{\jmath} +$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3} \cdot du_3\right) \cdot \hat{k} \ = \ \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \cdot \hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \hat{k}\right) \cdot du_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot \hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \cdot \hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \cdot \hat{k}\right) \cdot du_2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u_3} \cdot \hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial u_3} \cdot \hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial u_3} \cdot \hat{k}\right) \cdot du_3$$

$$d\vec{r} = du_1 \cdot \boldsymbol{\ell_1} + du_2 \cdot \boldsymbol{\ell_2} + du_3 \cdot \boldsymbol{\ell_3}$$

$$d\vec{r} = (h_1 \cdot du_1) \cdot \boldsymbol{e_1} + (h_2 \cdot du_2) \cdot \boldsymbol{e_2} + (h_3 \cdot du_3) \cdot \ \boldsymbol{e_3}$$



נסמן ב- ds אלמנט אורך אינפיניטסימלי , מתקיים : $ds^2 = d\vec{r} * d\vec{r}$.

$$ds^2 = (\boldsymbol{\ell_1} \cdot du_1 + \boldsymbol{\ell_2} \cdot du_2 + \boldsymbol{\ell_3} \cdot du_3) * (\boldsymbol{\ell_1} \cdot du_1 + \boldsymbol{\ell_2} \cdot du_2 + \boldsymbol{\ell_3} \cdot du_3)$$

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq} \cdot du_p du_q$$

כאשר : $g_{pq} = \boldsymbol{\ell_p} * \boldsymbol{\ell_q} = h_{\boldsymbol{p}} \cdot h_{\boldsymbol{q}} \cdot \left(\boldsymbol{e_p} * \boldsymbol{e_q}\right)$ הנקרא מקדם **המטריקה** .

במערכת אורתוגונלית מתקיים : $\boldsymbol{e_1} * \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_1} * \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_2} * \boldsymbol{e_3} = 0$, $\boldsymbol{e_1} \perp \boldsymbol{e_2} \perp \boldsymbol{e_3}$

מסקנה : $g_{pq} = 0$, $p \neq q$ אם ורק אם מערכת הקואורדינטות העקומות היא אורתוגונלית ואז

$$ds^2 = {h_1}^2 \cdot {du_1}^2 + {h_2}^2 \cdot {du_2}^2 + {h_3}^2 \cdot {du_3}^2$$

אלמנט נפח במערכת אורתוגונלית :

$$dv = |(h_1 \cdot du_1 \cdot \boldsymbol{e_1}) * (h_2 \cdot du_2 \cdot \boldsymbol{e_2}) \times (h_3 \cdot du_3 \cdot \boldsymbol{e_3})| =$$
$$= \boldsymbol{h_1 h_2 h_3} \cdot du_1 du_2 du_3 \cdot |\boldsymbol{e_1} * (\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_3})| = \boldsymbol{h_1 h_2 h_3} \cdot du_1 du_2 du_3$$

כאשר : $|\boldsymbol{e_1} * (\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_3})| = |\boldsymbol{e_1} * \boldsymbol{e_1}| = 1$

נציג שתי מערכות עקומות אורתוגונלית מיוחדות במרחב $\boldsymbol{R^3}$:

מערכת גלילית : $x = \rho \cdot \cos\theta$, $y = \rho \cdot \sin\theta$, $z = z$

$$\rho \geq 0 \;,\quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad,\quad -\infty < z < +\infty$$

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \cdot \cos\theta \cdot \hat{\imath} + \rho \cdot \sin\theta \cdot \hat{\jmath} + z \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\theta \cdot \hat{\imath} + \sin\theta \cdot \hat{\jmath} \quad,\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho \cdot \sin\theta \cdot \hat{\imath} + \rho \cdot \cos\theta \cdot \hat{\jmath} \quad,\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{k}$$

$$h_\rho = 1 \;,\quad h_\theta = \rho \quad,\quad h_z = 1$$

אלמנט אורך בריבוע : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2 + dz^2$, אלמנט נפח : $dv = \rho \cdot d\rho d\theta dz$

מערכת כדורית : $x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \quad , \quad y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \quad , \quad z = \rho \cdot \cos\varphi$

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\vec{r}(\rho,\theta,\varphi) = \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\imath} + \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\jmath} + \rho \cdot \cos\varphi \cdot \hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\imath} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\jmath} + \cos\varphi \cdot \hat{k}$$

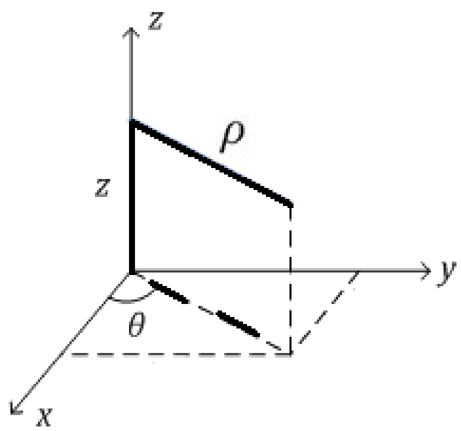
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\imath} + \rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot \hat{\jmath}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \rho \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot \hat{\imath} + \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \hat{\jmath} - \rho \cdot \sin\varphi \cdot \hat{k}$$

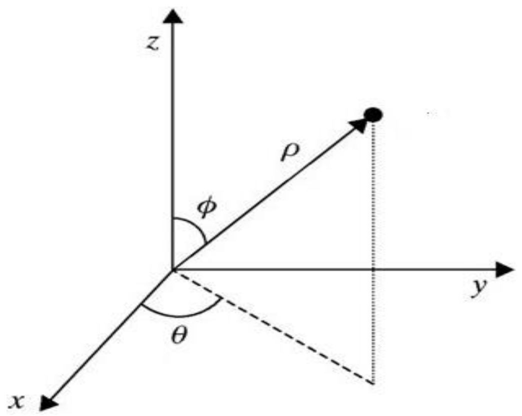
$$h_\rho = 1 \quad , \quad h_\theta = \rho \cdot \sin\varphi \quad , \quad h_\varphi = \rho$$

אלמנט אורך בריבוע : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \cdot sin^2\varphi \cdot d\theta^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2$

אלמנט נפח : $dv = \rho^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\rho d\theta d\varphi$



מערכת גלילית



מערכת כדורית

טנסורים מסדר ראשון :

נמצא קשר בין מרכיבי ה-contravariant **בין שתי מערכות קואורדינטות עקומות שונות** (u_1,u_2,u_3) ו- $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$:

על פי הגדרת ההעתקה $(\mathbf{1})$ בין המערכת הקרטיזית (x,y,z) לשתי המערכות (u_1,u_2,u_3) ו- $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$ נוכל למוצא את ההעתקה הבא :

$$(\mathbf{3}) \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_1(u_1,u_2,u_3) \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_2(u_1,u_2,u_3) \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_2(u_1,u_2,u_3)$$

נציג את וקטור ההעתק האינפיניטסימלי בשתי המערכות :

במערכת (u_1,u_2,u_3) : $d\vec{r} = \boldsymbol{\ell_1} \cdot du_1 + \boldsymbol{\ell_2} \cdot du_2 + \boldsymbol{\ell_3} \cdot du_3$

במערכת $(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)$: $d\vec{r} = \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} \cdot d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} \cdot d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}} \cdot d\bar{u}_3$

$$\boldsymbol{\ell_1} \cdot du_1 + \boldsymbol{\ell_2} \cdot du_2 + \boldsymbol{\ell_3} \cdot du_3 = \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} \cdot d\bar{u}_1 + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} \cdot d\bar{u}_2 + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}} \cdot d\bar{u}_3$$

נחשב את הדיפרנציאלים של ההעתקה $(\mathbf{3})$ בנקודה P :

$$d\bar{u}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} \cdot du_3$$
$$d\bar{u}_2 = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} \cdot du_3$$
$$d\bar{u}_3 = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3} \cdot du_3$$

נציב הדיפרנציאלים במשוואה לעיל ונשווה בין המקדמים של du_1, du_2, du_3 בשני הצדדים ונקבל :

$$\boldsymbol{\ell_1} = \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1}$$
$$\boldsymbol{\ell_2} = \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2}$$
$$\boldsymbol{\ell_3} = \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} + \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3}$$

נציג $\boldsymbol{A} \in R^3$ לפי שתי המערכות על פי הבסיס ה-contravariant :

$$\boldsymbol{A} = A^1 \cdot \boldsymbol{\ell_1} + A^2 \cdot \boldsymbol{\ell_2} + A^3 \cdot \boldsymbol{\ell_3} \quad , \quad \boldsymbol{A} = \bar{A}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} + \bar{A}^2 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} + \bar{A}^3 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}}$$

$$A^1 \cdot \boldsymbol{\ell_1} + A^2 \cdot \boldsymbol{\ell_2} + A^3 = \bar{A}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}} + \bar{A}^2 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}} + \bar{A}^3 \cdot \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}}$$

נציב $\boldsymbol{\ell_1}, \boldsymbol{\ell_2}, \boldsymbol{\ell_3}$ במשוואה ונשווה מקדמים של $\bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{1}}, \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{2}}, \bar{\boldsymbol{\ell}}_{\mathbf{3}}$ ונקבל ההעתקה הבאה :

$$\begin{aligned} \bar{A}^1 &= \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} \cdot A^1 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} \cdot A^2 + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_3} \cdot A^3 \\ \bar{A}^2 &= \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} \cdot A^1 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} \cdot A^2 + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_3} \cdot A^3 \\ \bar{A}^3 &= \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_1} \cdot A^1 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_2} \cdot A^2 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial u_3} \cdot A^3 \end{aligned} \qquad (\mathbf{4})$$

נציג הקשר בין המרכיבים A^1, A^2, A^3 והמרכיבים $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \bar{A}^3$ בצורה מקוצרת כך ש-

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_1} \cdot A^1 + \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_2} \cdot A^2 + \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_3} \cdot A^3 \quad , \quad p = 1,2,3$$
$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^{3} \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q} \cdot A^q \quad , \quad p = 1,2,3$$

ההעתקה $(\mathbf{4})$ מאפשרת לנו להציג את **ההגדרה** הבאה :
אומרים שנתון **טנסור ה-contravariant מסדר ראשון** אם בכל מערכת קואורדינטות עקומות נתונה קבוצה סדורה של שלושה מספרים A^1, A^2, A^3 אשר משתנים תחת ההעתקה $(\mathbf{4})$ לקבוצה סדורה $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \bar{A}^3$ במערכת קואורדינטות עקומות אחרת .
טנסור ה-contravariant מסדר ראשון נקרא גם **וקטור ה-Contravariant .**

נמצא קשר בין מרכיבי ה-covariant **בין שתי מערכות קואורדינטות עקומות שונות**
: $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ **-ו** (u_1, u_2, u_3)

נציג $\boldsymbol{A} \in R^3$ לפי שתי המערכות על פי הבסיס ה-contravariant :

$$\boldsymbol{A} = A_1 \cdot \boldsymbol{L_1} + A_2 \cdot \boldsymbol{L_2} + A_3 \cdot \boldsymbol{L_3} \quad , \quad \boldsymbol{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{1}} + \bar{A}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{2}} + \bar{A}_3 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{3}}$$

$$A_1 \cdot \boldsymbol{L_1} + A_2 \cdot \boldsymbol{L_2} + A_3 \cdot \boldsymbol{L_3} = \bar{A}_1 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{1}} + \bar{A}_2 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{2}} + \bar{A}_3 \cdot \bar{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{3}}$$

משוואה וקטורית זו מוליכה לשלוש משוואות סקאלריות עם נגזרות חלקיות של u_1, u_2, u_3
ו- $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ לפי x, y, z בנקודה P המוכפלים במרכיבי ה-covariant A_1, A_2, A_3 ו- $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$.
נחשב נגזרות חלקיות של u_1, u_2, u_3 לפי x, y, z על פי כלל השרשרת מתוך ההעתקה
ההופכית של העתקה $(\mathbf{3})$ ונציב אותן באחת משלוש המשוואות הסקאלריות ונשווה מקדמים של
הנגזרות החלקיות של $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ לפי x, y, z ונקבל :

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} \cdot A_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} \cdot A_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_1} \cdot A_3 \\ \bar{A}_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} \cdot A_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} \cdot A_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_2} \cdot A_3 \\ \bar{A}_3 &= \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_3} \cdot A_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_3} \cdot A_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_3} \cdot A_3 \end{aligned} \qquad (\mathbf{5})$$

נציג הקשר בין המרכיבים A_1, A_2, A_3 והמרכיבים $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ בצורה מקוצרת כך ש -

$$\Longrightarrow \quad \bar{A}_p = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_p} \cdot A_1 + \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_p} \cdot A_2 + \frac{\partial u_3}{\partial \bar{u}_p} \cdot A_3 \quad , \quad p = 1,2,3$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{A}_p = \sum_{q=1}^{3} \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p} \cdot A_q \quad , \quad p = 1,2,3$$

ההעתקה $(\mathbf{5})$ מאפשרת לנו להציג את **ההגדרה** הבאה :
אומרים שנתון **טנסור ה-covariant מסדר ראשון** אם בכל מערכת קואורדינטות עקומות נתונה
קבוצה סדורה של שלושה מספרים A_1, A_2, A_3 אשר משתנים תחת ההעתקה $(\mathbf{5})$ לקבוצה
סדורה $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ במערכת קואורדינטות עקומות אחרת .
טנסור ה-covariant מסדר ראשון נקרא גם **וקטור ה-covariant .**

טנסורים מסדר שני :

אומרים שנתון **טנסור ה-contravariant מסדר שני** אם בכל מערכת קואורדינטות עקומות
נתונה קבוצה סדורה של תשעה מספרים A^{ij} ; $i, j = 1,2,3$ אשר משתנים **תחת ההעתקה**
הבאה לקבוצה סדורה $\bar{A}^{pq}$; $p, q = 1,2,3$ במערכת קואורדינטות עקומות אחרת :

$$\bar{A}^{pq} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_j} \cdot A^{ij} \quad ; \quad p,q = 1,2,3$$

אומרים שנתון **טנסור ה-covariant מסדר שני** אם בכל מערכת קואורדינטות עקומות נתונה קבוצה סדורה של תשעה מספרים A_{ij} ; $i,j = 1,2,3$ אשר משתנים תחת **ההעתקה הבאה** לקבוצה סדורה $\bar{A}_{pq}$; $p,q = 1,2,3$ במערכת קואורדינטות עקומות אחרת :

$$\bar{A}_{pq} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_p} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot A_{ij} \quad ; \quad p,q = 1,2,3$$

אומרים שנתון **טנסור מעורב מסדר שני (contravariant & covariant)** אם בכל מערכת קואורדינטות עקומות נתונה קבוצה סדורה של תשעה מספרים A_j^i ; $i,j = 1,2,3$ אשר משתנים תחת **ההעתקה הבאה** לקבוצה סדורה $\bar{A}_q^p$; $p,q = 1,2,3$ במערכת קואורדינטות עקומות אחרת :

$$\bar{A}_q^p = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot A_j^i \quad ; \quad p,q = 1,2,3$$

בהנחה כי הנגזרות החלקיות חושבו בנקודה P כפי שהגדרנו .

טנסור מסדר שני הוא מטריצה ריבועית מממד 3 .

הסכם הסכימה של איינשטיין :

בכתיבת ביטוי של סכום כמו למשל $a_1 \cdot x^1 + \cdots + a_n \cdot x^n$ אנחנו כותבים אותו בצורה מקוצרת כך ש- $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x^i$, אלברט איינשטיין הציג צורה יותר מקוצרת , בפשטות כותבים את הביטוי כך ש- $\boldsymbol{a_i \cdot x^i}$.

אנחנו מאמצים ביטוי זה לכל אינדקס עבורו מבצעים את הסכימה , אותו אינדקס נקרא אינדקס **דמה** .

אינדקס המופיע פעם אחד בביטוי סיכמה או בכל ביטוי מתמטי אחר נקרא אינדקס **חופשי** המקבל כל המספרים שלו כמו למשל הביטוי $\bar{u}_k = \bar{u}_k(u_1, u_2, u_3)$ מציג את ההעתקה $(\mathbf{3})$ (k מקבל מספרים $1,2,3$) .

על פי הסכם הסכימה הטנסורים ייכתבו בצורה הבאה :

טנסור ה-contravariant מסדר ראשון : $\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q} \cdot A^q$

טנסור ה-covariant מסדר ראשון : $\bar{A}_p = \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_p} \cdot A_q$

q – אינדקס דמה ; p – אינדקס חופשי

טנסור ה-contravariant מסדר שני : $\bar{A}^{pq} = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_q}{\partial u_j} \cdot A^{ij}$

טנסור ה-covariant מסדר שני : $\bar{A}_{pq} = \frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_p} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot A_{ij}$

טנסור מעורב מסדר שני : $\bar{A}_q^p = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot A_j^i$

$i\ ,j$ – שני אינדקסים דמה ; p,q – שני אינדקסים חופשיים

טנסורים מסדר גבוה מוגדרים באותו אופן כמו למשל A_{kl}^{qst} הוא טנסור מעורב מסדר 5 ; הוא טנסור contravariant מסדר 3 והוא טנסור covariant מסדר 2 ; אם קיימת ההעתקה הבא :

$$\bar{A}_{\boldsymbol{ij}}^{prm} = \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial u_q} \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial u_s} \cdot \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial u_t} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial \bar{u}_j} \cdot A_{kl}^{qst}$$

מסקנה : טנסור מסדר n במרחב R^3 יש לו 3^n מקדמים .

- באופן כללי ניתן להגדיר טנסור מסדר n במרחב כלשהו R^m עם מספר מקדמים m^n
  טנסור מסדר ראשון הוא וקטור m ממדי .
  טנסור מסדר שני הוא מטריצה ריבועית מממד m .
  כל הפעולות במרחב R^3 אנלוגיים במרחב R^m .

הערה : הסכמה ברורה טנסור ה- contravariant הוא עם אינדקס למעלה ומנגד טנסור ה- covariant הוא עם אינדקס למטה .

סקלר : תהי $\varphi : R^3 \longrightarrow R$ פונקציה של מערכת הקואורדינטות (u_1, u_2, u_3) , ותהי $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ מערכת קואורדינטות האחרת , וקיימת בין שתי המערכות העתקה הופכית של העתקה $(\mathbf{3})$, אז $\bar{\varphi} : R^3 \longrightarrow R$ היא פונקציה שמתקבלת תחת העתקה זו .
אם מתקיים תמיד $\bar{\varphi} = \varphi$ תחת ההעתקה אז φ נקראת סקלר או (לא משתנה - Invariant) , גם נקראת **טנסור מסדר אפס** .

שדה של טנסור : אם בכל נקודה במרחב R^n מוגדר טנסור , אנחנו אומרים קיים שדה של טנסור .
שדה סקלרי הוא שדה של טנסור מסדר אפס .
שדה וקטורי הוא שדה של טנסור מסדר ראשון .
שדה מטריצי הוא שדה של טנסור מסדר שני .
הערה : טנסור או שדה של טנסור אינם מוגדרים רק באמצעות קבוצת מקדמים במערכת קואורדינטות בודדת אלה באמצעות כל קבוצות של מקדמים שמתקבלות תחת כל ההעתקות האפשריות בין מערכות קואורדינטות שונות במרחב R^n .

טנסור סימטרי וטנסור אנטי-סימטרי :

טנסור נקרא **סימטרי ביחס לשני** אינדקסים contravariant **או** לשני אינדקסים covariant אם מקדמי הטנסור נשארים בלי שנוי אחרי שנוי ההדדי של מקומי שני האינדקסים.
למשל : טנסור A_{qs}^{mpr} נקרא סימטרי ביחס לשני אינדקסים m ו- p אם מתקיים $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$
טנסור נקרא **טנסור סימטרי** אם הוא טנסור סימטרי ביחס לכל שני אינדקסים contravariant **וגם** לכל שני אינדקסים covariant .

טנסור נקרא **אנטי-סימטרי ביחס לשני** אינדקסים contravariant **או** לשני אינדקסים covariant אם מקדמי הטנסור משנים רק סימן אחרי שנוי ההדדי של מקומי שני האינדקסים.
למשל : טנסור A_{qs}^{mpr} נקרא אנטי-סימטרי ביחס לשני אינדקסים m ו- p אם מתקיים $A_{qs}^{mpr} = -A_{qs}^{pmr}$. טנסור נקרא **טנסור אנטי-סימטרי** אם הוא טנסור אנטי-סימטרי ביחס לכל שני אינדקסים contravariant **וגם** לכל שני אינדקסים covariant .

פעולות בסיסיות עם טנסורים :

חיבור , Addition : חיבור שני טנסורים או יותר מוגדר עבור טנסורים מאותו סדר ומאותו סוג (אותו מספר אינדקסים של contravariant ושל covariant) והתוצאה טנסור מאותו סוג ומאותו סדר . למשל A_k^{ij} ו- B_q^{mp} שני טנסורים מאותו סדר וסוג , פעולת החיבור היא :

$$C_q^{mp} = B_q^{mp} + A_q^{mp}$$

חיסור , Subtraction : חיסור שני טנסורים או יותר מוגדר עבור טנסורים מאותו סדר ומאותו סוג (אותו מספר אינדקסים של contravariant ושל covariant) והתוצאה טנסור מאותו סוג ומאותו סדר . למשל A_k^{ij} ו- B_q^{mp} שני טנסורים מאותו סדר וסוג , פעולת החיסור היא :

$$C_q^{mp} = B_q^{mp} - A_q^{mp}$$

כפל , Outer product : הכפל מוגדר בין שני טנסורים כלשהם ואין חשיבות לסוג ולסדר שלהם , התוצאה המתקבלת היא טנסור מסדר השווה לסכום שני סדרי הטנסורים המוכפלים.
למשל תוצאת הכפל בין שני הטנסורים A_q^{pr} ו- B_s^m היא : $C_{qs}^{prm} = A_q^{pr} \cdot B_s^m$
הערה : לא כל טנסור אפשר לכתוב אותו ככפל בין שני טנסורים אחרים שסדר שלהם נמוך יותר, ולכן פעולת החילוק בין הטנסורים לא תמיד מגודרת .

צמצום , Contraction : אם יש אינדקס contravariant אחד השווה לאינדקס covariant אחר בטנסור כלשהו , למשל בטנסור A_{sq}^{mpr} מסדר 5 נניח כי שמתקיים $r = s$, אז התוצאה מסכום מקדמי הטנסור עבור אותם אינדקסים שווים מתקבלת על פי הסכם הסכימה של איינשטיין .
תוצאת הסכימה היא טנסור מסדר קטן בשניים מסדר הטנסור המקורי .

B_q^{mp} הסדר שלו 3 , $\sum_{r=1}^{3} A_{rq}^{mpr} = A_{rq}^{mpr} = B_q^{mp} \quad \Longrightarrow$

עוד הנחה כי $p = q$, מקבלים : $\sum_{p=1}^{3} B_p^{mp} = B_p^{mp} = C^m$, C^m הסדר שלו 1

מכפלה פנימית , Inner product : מכפלה פנימית בין שני טנסורים מרוכבת משתי פעולות בהתחלה פעולת כפל בין שני הטנסורים ואחר כך פעולת צמצום (בהנחה קיים שוויון בין אינדקס contravariant אחד לאינדקס covariant אחר) , תוצאת המכפלה הפנימית היא טנסור אשר הסדר שלו קטן בשניים מסכום סדרי שני הטנסורים המקוריים .
למשל המכפלה הפנימית בין A_q^{mp} ו- B_{st}^r (בהנחה: $r = q$) היא : $C_{st}^{mp} = A_q^{mp} \cdot B_{st}^q$.
הערה : אפשר לבצע מכפלה פנימית כפולה כך למשל (בהנחה: $r = q$ וגם $p = s$) :

$$D_t^m = C_{pt}^{mp} = A_q^{mp} \cdot B_{pt}^q$$

חוק המנה , Quotient law : נניח כי נתונה לנו הכמות ***X*** ואיננו יודעים אם היא טנסור או לא , אם תוצאת המכפלה הפנימית בין הכמות ***X*** לבין טנסור **כלשהו** היא טנסור אז הכמות ***X*** היא בוודאות טנסור .

- שלושת הפעולות שהגדרנו : חיבור , כפל ומכפלה פנימית הן קומוטטיבית ואסוציאטיבית .

טענה : דלתא של קרוניקר היא טנסור מעורב מסדר 2 .
הוכחה : במערכת $(u_1, \dots, u_n)$ כל קואורדינטה אינה פונקציה לקואורדינטה אחרת ולכן :
$\frac{\partial u_p}{\partial u_q} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$; כמובן קיימת העתקה (וגם הופכית) בין המערכת $(u_1, \dots, u_n)$ לבין מערכת $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ אז לפי כלל השרשרת :

$$\frac{\partial u_p}{\partial u_q} = \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial u_q} = \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_q} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1, & r = k \\ 0, & r \neq k \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

נסמן דלתא של קרוניקר ב- δ_q^p $\Leftarrow$ $\frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_r} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_q} \cdot \delta_k^r = \delta_q^p$ $\Leftarrow$ טנסור מעורב מסדר 2 .

טנסור המטריקה :

מצאנו כי ריבוע אלמנט אורך במערכת קואורדינטות עקומות במרחב R^3 הוא :

$$ds^2 = \sum_{p=1}^{3} \sum_{q=1}^{3} g_{pq} \cdot du_p du_q$$

הכללה למרחב R^n ריבוע אלמנט אורך הוא : $ds^2 = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_{pq} \cdot du_p du_q$.
על פי הסכם הסכימה אפשר לכתוב : $ds^2 = g_{pq} \cdot du_p du_q$.

טענה: מקדמי המטריקה g_{pq} מרכיבים טנסור covariant מסדר 2 סימטרי .
הוכחה : תחילה נוכיח כי ביטוי בצורה $\Phi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot A^j \cdot A^k = a_{jk} \cdot A^j \cdot A^k$ אפשר לכתוב אותו עם מקדמים b_{jk} סימטריים כך ש- $\Phi = b_{jk} \cdot A^j \cdot A^k$

$$\Phi = a_{jk} \cdot A^j \cdot A^k = a_{kj} \cdot A^k \cdot A^j = a_{kj} \cdot A^j \cdot A^k \implies 2 \cdot \Phi = a_{jk} \cdot A^j \cdot A^k + a_{kj} \cdot A^j \cdot A^k$$

$$\implies \Phi = \frac{1}{2} \cdot (a_{jk} + a_{kj}) \cdot A^j \cdot A^k = b_{jk} \cdot A^j \cdot A^k \implies b_{jk} = \frac{1}{2} \cdot (a_{jk} + a_{kj}) = b_{kj}$$

אלמנט אורך ds במרחב הוא סקלר ואינו משתנה במעבר בין מערכת $(u_1, \dots, u_n)$ לבין מערכת $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ ולכן : $ds^2 = \bar{g}_{pq} \cdot d\bar{u}_p d\bar{u}_q = g_{ij} \cdot du_i du_j$, g_{ij} ו- $\bar{g}_{pq}$ הם מקדמים

סימטריים לפי הטענה הנ"ל , נציב הדיפרנציאלים $du_i = \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_p} \cdot d\bar{u}_p$, $du_j = \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot d\bar{u}_q$

$$\bar{g}_{pq} \cdot d\bar{u}_p d\bar{u}_q = g_{ij} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_p} \cdot d\bar{u}_p d\bar{u}_q \implies \bar{g}_{pq} = g_{ij} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_q} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_p}$$

$\boldsymbol{g_{pq}}$ הוא טנסור covariant מסדר 2 סימטרי , ייקרא **טנסור המטריקה** או **טנסור יסודי**

נסמן ב- g את הדטרמיננטה של מטריצת המטריקה g_{pq} **:** $g = |g_{pq}|$, ונסמן ב- $G(p,q)$ את הפקטור של המקדם g_{pq} בחישוב הדטרמיננטה.
(הפקטור הוא הדטרמיננטה של המינור של המקדם g_{pq} כפול $(-1)^{p+q}$ **)**
$g = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot G(i,j)$ עבור שורה מספר i ; $i = 1, \dots, n$, בהנחה : $g \neq 0$.
ידועה התכונה : מטריצה ריבועית יש בה שורות שוות הדטרמיננטה של המטריצה שווה לאפס**.**
נבנה מטריצה ריבועית המתקבלת ממטריצת המטריקה כך שיש בה שורה אחת חוזרת על עצמה על חשבון שורה אחרת .
נחשב את הדטרמיננטה לפי השורה החוזרת על עצמה במקום שאינו מקורי (מינורים לא משתנים) , נסמן ב- i המקום המקורי וב-k המקום שאינו מקורי , $i \neq k$:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj} \cdot G(k,j) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot G(k,j) = 0$$

נסמן **:** $g^{pq} = \frac{1}{g} \cdot G(p,q) \quad \Leftarrow \quad \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot g^{kj} = g_{ij} \cdot g^{kj} = \begin{cases} 1 \ , & i = k \\ 0 \ , & i \neq k \end{cases} = \delta_i^k$

טענה : g^{pq} הוא טנסור contravariant מסדר 2 סימטרי .
הוכחה : g_{pq} סימטרי וידוע כי מטריצת המינורים של כל מטריצה סימטרית הם סימטריים **ולכן** $G(q,p) = G(p,q)$ ואז g^{pq} סימטרי , נניח כי B^p הוא וקטור contravariant כלשהו **,** נכפול את B^p בטנסור g_{pq} (מכפלה פנימית) ונקבל וקטור covariant כלשהו : $B_q = g_{pq} \cdot B^p$ **.**
נכפול את B_q במקדם g^{jq} **:** $g^{jq} \cdot B_q = g^{jq} \cdot g_{pq} \cdot B^p = \delta_p^j \cdot B^p = B^j \quad \Longrightarrow$
$\Leftarrow$ קבלנו ש- $g^{jq} \cdot B_q = B^j$, לפי חוק המנה g^{jq} הוא טנסור contravariant מסדר 2 והוא סימטרי .
$\Leftarrow$ $g_{rq} \cdot g^{pq} = \delta_r^p$, $\boldsymbol{g^{pq}}$ הוא טנסור הצמוד של טנסור המטריקה g_{pq}
נקרא **: טנסור המטריקה הצמוד .**
$\Leftarrow$ δ_r^p היא מטריצת היחידה והיות שמטריצת המטריקה g^{pq} ומטריצה הצמודה לה g_{pq} סימטריות ומתחלפות בכפל $g_{rq} \cdot g^{qp} = g^{pq} \cdot g_{qr} = \delta_r^p$ הן הפיכות זו לזו : $\boldsymbol{g^{pq}} = \left(\boldsymbol{g_{pq}}\right)^{-\mathbf{1}}$
נשים לב : הפקטורים $G(p,q)$ הם אברי מטריצת ה- adj של מטריצת המטריקה g_{pq} $\Longleftarrow$
$adj\left(g_{pq}\right)_{ij} = G(j,i) = G(i,j)$ **.**

באופן כללי מרחב מגודרת בו מטריקה נקרא **מרחב רימן** (**Riemann**)

מרחב אוקלידי ומערכת קרטזית :

מצאנו קודם במערכת אורתוגונלית מתקיים $g_{pq} = 0 \;\; p \neq q$, וריבוע אלמנט אורך הוא :
$ds^2 = g_{pp} \cdot {du_p}^2$, במקרה פרטי אם מתקיים $g_{pp} = 1 \;\; \forall\, p = 1, \dots, n \;\; \Leftarrow \;\; ds^2 = {du_p}^2$ אז
המרחב בו אנו עוסקים ייקרא **מרחב אוקלידי ממד n** והמערכת תיקרא **מערכת קרטזית** .

טנסורים קשורים , Associated Tensors :

בהינתן טנסור כלשהו , אנחנו יכולים להנפיק ממנו טנסור נוסף באמצעות העלאת או הורדת אינדקס אחד או יותר , כלומר הפיכת אינדקס contravariant ל-covariant או להפיך .
הטנסור הנוסף נקרא **טנסור קשור** לטנסור המקורי והוא מתקבל באמצעות מספר מכפלות פנימיות בין הטנסור המקורי לבין טנסור המטריקה g_{pq} להורדת מספר אינדקסים או לבין טנסור המטריקה הצמוד g^{pq} להעלאת מספר אינדקסים .
הסבר : נתון q הוא אינדקס contravariant בטנסור כדי להפוך אותו ל- covariant (הורדת אינדקס q) מסמנים אותו אינדקס באות שלא מופיעה בטנסור נגיד למשל באות r במקום האות q וכופלים את הטנסור בטנסור המטריקה בסימון הכי מקובל g_{rq} בדגש על $r = q$, אותו דבר לגבי העלאת אינדקס .
למשל : A^p ו- A_p הם שני טנסורים קשורים , הקשר ביניהם נתון על ידי :

$$A_p = g_{pq} \cdot A^q \qquad \text{או} \qquad A^q = g^{pq} \cdot A_q$$

במערכת קרטזית : $g_{pq} = \delta_{pq} \;\; \Rightarrow \;\; A_p = \delta_{pq} \cdot A^q = \delta_{pp} \cdot A^p = A^p \;\; \Rightarrow \;\; A_p = A^p$

דוגמאות : $A^p{}_{qs} = g_{qr} \cdot A^{pr}{}_s \quad ; \quad A^{pq} = g^{rp} \cdot g^{sq} \cdot A_{rs} \quad ; \quad A^p{}_q = g^{rp} \cdot A_{rq}$

$$A^{qm}{}_n{}^{tk} = g^{pk} \cdot g_{sn} \cdot g^{rm} \cdot A^q{}_r{}^{st}{}_p$$

סמלי כריסטופל , Christoffel symbols :

$$\textbf{(1)} \qquad [pq, r] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial u_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial u_r} \right)$$

$$\textbf{(2)} \qquad \left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{sr} \cdot [pq, r] = \frac{1}{2} \cdot g^{sr} \cdot \left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial u_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial u_r} \right)$$

שני הביטויים לעיל נקראים סמלי כריסטופל מהסוג הראשון ומהסוג השני בהתאמה .
סמלי כריסטופל אינם טנסורים בדרך כלל אלא אם מתקיים תנאי מסוים.
נשים לב שני הביטויים סימטריים עבור p ו- q .

חוקי הטרנספורמציה של סמלי כריסטופל :

תהי $\bar{u}_k$ מערכת הקואורדינטות האחרת אז שני הביטויים הבאים :

$$\textbf{(1)} \qquad \overline{[jk, m]} = [pq, r] \cdot \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_j} \cdot \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_k} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \bar{u}_m} + g_{pq} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_m} \cdot \frac{\partial^2 u_q}{\partial \bar{u}_j \partial \bar{u}_k}$$

$$(2) \qquad \overline{\begin{Bmatrix} n \\ jk \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} \cdot \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial u_s} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial \bar{u}_j} \cdot \frac{\partial u_q}{\partial \bar{u}_k} + \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial u_q} \cdot \frac{\partial^2 u_q}{\partial \bar{u}_j \partial \bar{u}_k}$$

מגדירים את הטרנספורמציה לסמלי כריסטופל ממערכת u_k למערכת $\bar{u}_k$.

נשים לב : סמלי כריסטופל יוגדרו כמו טנסורים אם המחובר הימני בסכום של שני הביטויים שווה לאפס כלומר אם מתקיים : $\frac{\partial^2 u_q}{\partial \bar{u}_j \partial \bar{u}_k} = 0$, אז $[pq, r]$ יסומן ב- Γ_{rpq} ו- $\begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix}$ יסומן ב- $\Gamma^s{}_{pq}$; Γ_{rpq} ו- $\Gamma^s{}_{pq}$ שני טנסורים קשורים .

התנאי : $\frac{\partial^2 u_q}{\partial \bar{u}_j \partial \bar{u}_k} = 0$ נקרא תנאי הרמוניות .

סמלי כריסטופל של מערכת קרטזית : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Leftarrow$ קבוע $g_{pq} = \delta_{pq}$
$p, q = x, y, z$; $\frac{\partial \delta_{pq}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \delta_{pq}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \delta_{pq}}{\partial \mathrm{z}} = 0$, שווים לאפס .

טנסור העקמומיות : הוא מסדר רביעי שנותן מידע על מידת העקמומיות של היריעות ,
טנסור העקמומיות המעורב נתון ע"י :

$$R^i{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial u_k} \begin{Bmatrix} i \\ jh \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u_h} \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r \\ jh \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i \\ rh \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r \\ jk \end{Bmatrix}$$

טנסור העקמומיות הוא טנסור אנטי סימטרי ביחס לשני אינדקסים covariant והם k ו- h :

$$R^i{}_{jhk} = -R^i{}_{jkh}$$

אורך וקטור וזווית בין שני וקטורים :

המכפלה הפנימית בין שני וקטורים A^p ו- B_p - $A^p \cdot B_p$ - היא סקלר .
מגדירים אורך וקטור L של וקטור A^p או A_p בצורה הבאה :

$$L^2 = A^p \cdot A_p = g^{pq} \cdot A_p \cdot A_q = g_{pq} \cdot A^p \cdot A^q \quad \Longrightarrow \quad L = \sqrt{A^p \cdot A_p}$$

מגדירים זווית θ בין שני וקטורים A^p ו- B_p בצורה הבאה :

$$\cos(\theta) = \frac{A^p \cdot B_p}{\sqrt{A^p \cdot A_p} \cdot \sqrt{B^p \cdot B_p}}$$

מסילה גאודזית , Geodesic : תהי A ו- B שתי נקודות במרחב רימן , נקשר ביניהם על ידי מספר עקומים , תהי $\boldsymbol{\ell} : u_k(t)$ פרמטריזציה של עקום כלשהו , נחשב אורך כל עקום בין שתי נקודות אלה (המרחק בין שתי הנקודות על גבי העקום) בצורה הבאה :

$$\boldsymbol{d}(A,B) = s = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{g_{pq} \cdot \frac{du_p}{dt} \cdot \frac{du_q}{dt}}\, dt$$

העקום הנותן מרחק מינימלי בין שתי הנקודות A ו- B נקרא **מסילה גאודזית** של המרחב.
באמצעות חשבון ווראציות אפשר למצוא מערכת משוואות דיפרנציאליות הנותנת את העקום

הגאודזי במרחב , המערכת היא : $\frac{d^2u_r}{ds^2} + \left\{ {r \atop pq} \right\} \cdot \frac{d^2u_p}{ds} \cdot \frac{d^2u_q}{ds} = 0$ (ללא הוכחה)

כאשר : $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{pq} \cdot \frac{du_p}{dt} \cdot \frac{du_q}{dt}}$, תנאי השפה הם בנקודות A ו- B .

למשל: קו ישר הוא עקום גאודזי על מישור לעומת בכדור העקום הגאודזי הוא קשת מעגל שרדיוס שלו שווה לרדיוס הכדור ומרכזו במרכז הכדור .

נגזרת ה- covariant :

נגזרת ה-covariant של טנסור A_p לפי u_q מסמנת ב- $A_{p,q}$ מוגדרת כך ש -

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial u_q} - \left\{ {s \atop pq} \right\} \cdot A_s$$

$A_{p,q}$ הוא טנסור covariant מסדר 2 .

נגזרת ה-covariant של טנסור A^p לפי u_q מסמנת ב- $A^p{}_{,q}$ מוגדרת כך ש -

$$A^p{}_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial u_q} + \left\{ {p \atop qs} \right\} \cdot A^s$$

$A^p{}_{,q}$ הוא טנסור מעורב מסדר 2 .

במערכת קרטזית סמלי כריסטופל שווים לאפס לכן הנגזרות ה-covariant הם בפשטות נגזרות חלקיות .
באופן כללי נגזרות ה-covariant של טנסורים הן בעצמן טנסורים .

נגזרת ה-covariant לטנסור מסדר גבוה $A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}$ לפי u_q היא :

$$A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n,q} = \frac{\partial A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n}}{\partial u_q} + \\ - \left\{ {s \atop r_1 q} \right\} \cdot A^{p_1\cdots p_m}_{s\, r_2\cdots r_n} - \left\{ {s \atop r_2 q} \right\} \cdot A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\, s\, r_3\cdots r_n} - \cdots - \left\{ {s \atop r_n q} \right\} \cdot A^{p_1\cdots p_m}_{r_1\cdots r_{n-1} s} \\ + \left\{ {p_1 \atop qs} \right\} \cdot A^{s\, p_2\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \left\{ {p_2 \atop qs} \right\} \cdot A^{p_1\, s\, p_3\cdots p_m}_{r_1\cdots r_n} + \cdots + \left\{ {p_n \atop qs} \right\} \cdot A^{p_1\cdots p_{m-1}\, s}_{r_1\cdots r_n}$$

נוכיח כי נגזרת ה-covariant של g_{jk} , g^{jk} ו- δ_k^j (שלושתם סימטריים) שווה לאפס :

$$g_{jk,q} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ jq \end{matrix} \right\} \cdot g_{sk} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} \cdot g_{js} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} - [jq,k] - [kq,j] =$$

$$= \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{kq}}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} = 0$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_q} = [jq,k] + [kq,j]$$

$$g^{jk}{}_{,q} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial u_q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} \cdot g^{sk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ qs \end{matrix} \right\} \cdot g^{js}$$

$$\frac{\partial (g^{mk} \cdot g_{im})}{\partial u_q} = \frac{\partial \delta_i^k}{\partial u_q} = 0 \implies g^{mk} \cdot \frac{\partial g_{im}}{\partial u_q} + \frac{\partial g^{mk}}{\partial u_q} \cdot g_{im} = 0$$, g^{ij} – כופלים ב

$$\implies g^{ij} \cdot g^{mk} \cdot \frac{\partial g_{im}}{\partial u_q} + g^{ij} \cdot g_{im} \cdot \frac{\partial g^{mk}}{\partial u_q} = 0$$

$$\implies \delta_m^j \cdot \frac{\partial g^{mk}}{\partial u_q} + g^{ij} \cdot g^{mk} \cdot ([iq,m] + [mq,i]) = 0$$

$$\implies \frac{\partial g^{jk}}{\partial u_q} + \left\{ \begin{matrix} j \\ mq \end{matrix} \right\} \cdot g^{mk} + \left\{ \begin{matrix} k \\ iq \end{matrix} \right\} \cdot g^{ij} = 0$$

נניח כי $i = m = s$ ונקבל $\Longleftarrow$ $g^{jk}{}_{,q} = 0$.

$$\delta_{k,q}^j = \frac{\partial \delta_k^j}{\partial u_q} - \left\{ \begin{matrix} s \\ kq \end{matrix} \right\} \cdot \delta_s^j + \left\{ \begin{matrix} j \\ qs \end{matrix} \right\} \cdot \delta_k^s = 0 - \left\{ \begin{matrix} j \\ kq \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} j \\ qk \end{matrix} \right\} = 0$$

חוקי הנגזרות של סכום וכפל של טנסורים הם כמו חוקי הנגזרות של סכום וכפל של פונקציות רגילות .

נגזרות ה-covariant מצביעות על קצב שינוי כמויות פיסיקליות בלי תלות במערכות ייחוס ולכן הן שימושיות בניתוח חוקי הפיסיקה .

נגזרת מכוונת (פנימית) של טנסור :

תהי $u_k(t)$: $\boldsymbol{\ell}$ פרמטריזציה של עקום מסוים במרחב רימן .
נגזרת מכוונת של טנסור A_p לאורך אותו עקום ומסומנת ב- $\frac{\delta A_p}{\delta t}$ היא המכפלה הפנימית בין נגזרת ה-covariant של A_p לבין וקטור כיוון של העקום דהיינו בין $A_{p,q}$ לבין $\frac{du_q(t)}{dt}$:

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = A_{p,q} \cdot \frac{du_q}{dt} = \frac{\partial A_p}{\partial u_q} \cdot \frac{du_q}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} \cdot A_s \cdot \frac{du_q}{dt} = \frac{dA_p}{dt} - \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} \cdot A_s \cdot \frac{du_q}{dt}$$

נגזרת מכוונת של טנסור A^p לאורך אותו עקום ומסומנת ב- $\frac{\delta A^p}{\delta t}$ היא המכפלה הפנימית בין נגזרת ה-covariant של A^p לבין וקטור כיוון של העקום דהיינו בין ${A^p}_{,q}$ לבין $\frac{du_q(t)}{dt}$:

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = {A^p}_{,q} \cdot \frac{du_q}{dt} = \frac{\partial A^p}{\partial u_q} \cdot \frac{du_q}{dt} + \begin{Bmatrix} s \\ pq \end{Bmatrix} \cdot A^s \cdot \frac{du_q}{dt} = \frac{dA^p}{dt} + \begin{Bmatrix} p \\ qs \end{Bmatrix} \cdot A^s \cdot \frac{du_q}{dt}$$

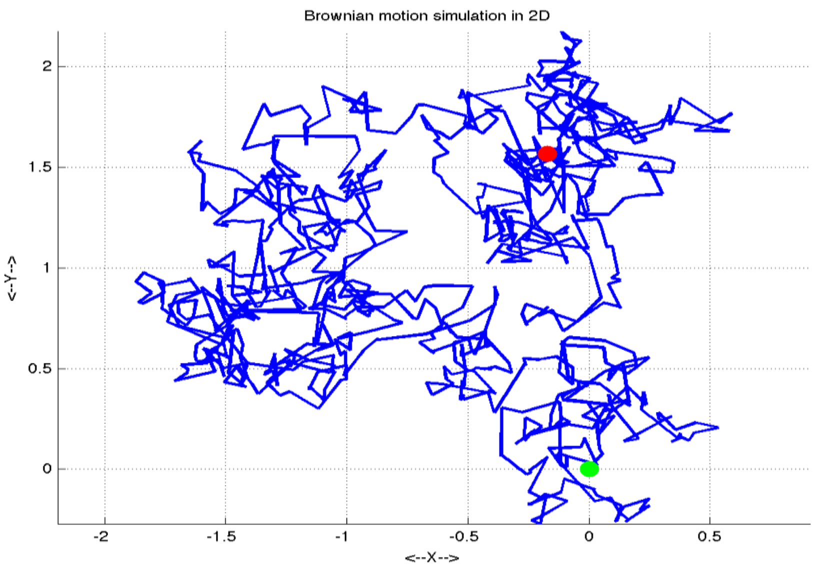
הטנסור (וקטור) A_p או A^p נע בניצב לעקום אם"ם נגזרת המכוונת היא אפס , נגזרות מכוונות לטנסורים מסדר גבוה מוגדרות באופן דומה .

תנועה בראונית

תנועה בראונית היא כנוי לתופעה פיזיקאלית המתארת תנועה אקראית של מספר רב של חלקיק זעירים המתנגשים ביניהם בתוך תווך לרבות נוזל או גז . התופעה נתגלתה לראשונה ע"י מדען הצמחים הסקוטי רוברט בראון בשנת 1827 כאשר שם גרגירי אבקה של שמח בתוך כוס מים וראה כי אופן תנועתם מוזרה וגם לא ידע להסביר מה הוא המנגנון הבסיסי העומד מאחורי תופעה זו . אלברט איינשטיין חקר תופעה זו ונתן בשנת 1905 הסבר מלא על המנגנון הפיזיקאלי הבסיסי . תנועה בראונית נקראת גם תהליך דיפוזיה עקב אופן התרחבות תנועת החלקיקים בתוך התווך . תהליכי דיפוזיה נחקרים בהרבה תחומים בפיסיקה כמו למשל : חומר מעובה , פיסיקת החלקיקים , אסטרופיזיקה וביופיזיקה .

תנועה בראונית שימושית מאוד בחקירת תנועת חלקיקים בתווך לא רק על משטחים שטוחים אלא גם על משטחים עקומים למשל באסטרופיזיקה התנועה נחקרת תחת השפעת עקמומיות מרחב-זמן ואחד המודלים המתעסקים בעניין זה נקרא **Robertson-Walker** , בעבודה זו נחקור את ההיבטים המתמטיים של אותו מודל על כדור "יקום סגור" ועל היפרבולואיד חד-יריעתי "יקום פתוח" . בביופיזיקה חוקרים את הדיפוזיה של החלבונים בתוך התא כך שאפשר להתייחס לקרום התא כסריג ולחלבון כחלקיק זעיר .

תמונה מייצגת איך נראה מסלול התנועה של חלקיקים על משטח דו-ממדי :



משוואת לנז'בן (Langevin) על יריעות עקומות

תיאור המשוואה בקואורדינטות קרטזית גלובליות :

יהי $\vec{x} \in R^{d+1}$, נתון משטח : $\mathrm{M} = \{\ \vec{x} \in R^{d+1} :\ \phi(\vec{x}) = 0\ \}$

נתון חלקיק נע על משטח M ומיקומו כפונקציה של הזמן נתון על ידי $\vec{x}(t)$, t זמן , זאת אומרת קיים אילוץ על מסלול התנועה והוא $\phi\big(\vec{x}(t)\big) = 0$.

וקטור מיקום החלקיק : $\vec{x}(t) = (\ x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t), x_{d+1}(t)\ )$

וקטור מהירות החלקיק : $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = (\ \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_d(t), \dot{x}_{d+1}(t)\ )$

כאשר : $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(t)\ ,\ i = 1, 2, \dots, d, d+1$

יהי $T_{\vec{x}}(\mathrm{M})$ מרחב המשיק של הנקודה $\vec{x}$ הנמצאת על משטח M , $\Leftarrow$ $\vec{v}(t) \in T_{\vec{x}(t)}(\mathrm{M})$
כי וויקטור המהירות תמיד משיק למסלול התנועה .

וויקטור התנע של החלקיק : $\vec{P}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$, m מסת החלקיק , $\Leftarrow$ $\vec{P}(t) \in T_{\vec{x}(t)}(\mathrm{M})$.

תהי תנועת החלקיק בתוך תווך המאולץ לנוע על תחום מסוים בתוך התווך .

- הכוחות הפועלים על החלקיק במהלך תנועתו :
  - כוח התנגדות התווך : $\vec{F}_1 = -\zeta \cdot \vec{v}(t)$, ζ : מקדם התנגדות של התווך .
  - כוח אילוץ הפועל על החלקיק המכריע אותו לנוע רק בתוך התחום (משטח M) :
    $\vec{F}_2 = \lambda \cdot \vec{\nabla}\phi(\ \vec{x}(t)\ )$, λ : מקדם כופל לגרנז' .
  - כוח אקראי המופעל על החלקיק הנובע מההתנגשויות עם החלקיקים האחרים :
    $\vec{F}_3 = \vec{f}(t) = (\ f_1(t), f_2(t), \dots, f_d(t), f_{d+1}(t)\ )^T$
    $i = 1, 2, \dots, d, d+1$, $f_i(t)$: משתנה אקראי עם התפלגות גאוסית כפונקציה של הזמן .
    $\vec{f}(t)$: ויקטור אקראי גאוסי כפונקציה של הזמן .
    התוחלת של $f_i(t)$ היא אפס : $\langle\ f_i(t)\ \rangle = 0$.
    פונקציית הקורלציה בין רכיבי $\vec{f}(t)$: $\langle\ f_i(t) \cdot f_j(t')\ \rangle = \Omega \cdot \delta_{ij} \cdot \delta(t - t')$
    $\Omega \in R$ קבוע , δ_{ij} : דלתה של קרוניקר , $\delta(t - t')$: פונקציית דלתה של דיראק .
    $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1\ ,\ i = j \\ 0\ ,\ i \neq j \end{cases}\quad ;\quad g(t') = \int_D g(t) \cdot \delta(t - t') \cdot dt\ ,\ t' \in D \subseteq \boldsymbol{R}$$
    $g(t)$ פונקציה רציפה ב- D

תוחלת ויקטור הכוח האקראי היא אפס :

$$\langle \vec{f}(t) \rangle = \boldsymbol{\mu}_{\vec{f}} = (\langle f_1(t)\rangle, \dots, \langle f_{d+1}(t)\rangle)^T = \vec{0}$$

ולכן מטריצת הקורלציה של ויקטור הכוח האקראי : $\langle f_i(t) \cdot f_j(t) \rangle = 0 \;,\; i \neq j$

$\boldsymbol{R}\{\vec{f}(t)\} = \langle \vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t)^T \rangle$ היא מטריצה אלכסונית .

מטריצת הקוואריאנס של כוח אקראי : $\boldsymbol{COV}\{\vec{f}(t)\} = \boldsymbol{R}\{\vec{f}(t)\} - \boldsymbol{\mu}_{\vec{f}} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\vec{f}}^{\,T} = \boldsymbol{R}\{\vec{f}(t)\}$

לכן ויקטור הכוח האקראי $\vec{f}(t)$ בעל רכיבים בלתי תלויים

פונקציית הקורלציה של רכיב כוח בודד : $\langle f_i(t) \cdot f_i(t') \rangle = \Omega \cdot \delta(t-t')$

$\{ f_i(t) \,;\, t \geq 0 \}$ הוא תהליך אקראי גאוסי סטציונרי במובן הרחב *WSS* .

$\langle f_i(t) \cdot f_j(t') \rangle = 0 \;,\; i \neq j$

$\{ \vec{f}(t) \,;\, t \geq 0 \}$ הוא תהליך אקראי וקטורי גאוסי סטציונרי במובן הרחב *WSS* .

משוואת תנועת החלקיק : $\dot{\vec{P}}(t) = -\frac{\zeta}{m} \cdot \vec{P}(t) + \lambda \cdot \vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,) + \vec{f}(t)$

- נחשב את λ באמצעות נתוני הבעיה :

ויקטור הגראדינט $\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_{d+1}} \right)$ מאונך למרחב המשיק $T_{\vec{x}}(\mathrm{M})$ בנקודה $\vec{x}$.

ולכן : $\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,) \perp \vec{P}(t) \;\Leftarrow\; \vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,) \cdot \vec{P}(t)^T = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i} \cdot P_i(t) = 0$, נגזור

משוואה זו לפי הזמן ונקבל : $\sum_{i=1}^{d+1} \left[\frac{\partial \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i} \cdot \dot{P}_i(t) + P_i(t) \cdot \sum_{j=1}^{d+1} \frac{\partial^2 \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \dot{x}_j(t) \right] = 0$

$\dot{x}_j(t) = \frac{1}{m} \cdot P_j(t) \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i} \cdot \dot{P}_i(t) = -\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{d+1} \sum_{j=1}^{d+1} P_i(t) \cdot \frac{\partial^2 \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot P_j(t)$.

נסמן : $\hat{n}(t) = \frac{\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\|}$ ויקטור יחידה נורמלי על מרחב המשיק $T_{\vec{x}}(\mathrm{M})$ (משטח M) בנקודה $\vec{x}$,

$G(t)$ היא מטריצה ריבועית מסדר $d+1$, האיבר שלה הוא : $G_{ij}(t) = \frac{1}{\|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\|} \cdot \frac{\partial^2 \phi(\,\vec{x}(t)\,)}{\partial x_i \partial x_j}$

i שורה , j עמודה . $\|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\|$ היא הנורמה של וויקטור הגראדינט .

המשוואה האחרונה תכתב בצורת כפל מטריצות : $\hat{n}(t) \cdot \dot{\vec{P}}(t)^T = -\frac{1}{m} \cdot \vec{P}(t) \cdot G(t) \cdot \vec{P}(t)^T$

נכפול סקלרית את משוואת התנועה ב – $\hat{n}(t)$ ($*$ סימן מכפלה סקלרית) :

$$\hat{n}(t) * \dot{\vec{P}}(t) = -\frac{\zeta}{m} \cdot \hat{n}(t) * \vec{P}(t) + \lambda \cdot \hat{n}(t) * \vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,) + \hat{n}(t) * \vec{f}(t)$$

$$-\frac{1}{m} \cdot \vec{P}(t) \cdot G(t) \cdot \vec{P}(t)^T = -\frac{\zeta}{m} \cdot 0 + \lambda \cdot \|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\| + \hat{n}(t) * \vec{f}(t)$$

$$\lambda = -\frac{1}{m \cdot \|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\|} \cdot \vec{P}(t) \cdot G(t) \cdot \vec{P}(t)^T - \frac{1}{\|\vec{\nabla}\phi(\,\vec{x}(t)\,)\|} \cdot \hat{n}(t) * \vec{f}(t)$$

מטריצה $G(t)$ מקודדת גיאומטרית המשטח M .

$$\boxed{\dot{\vec{P}}(t) + \frac{1}{m} \cdot \left[\vec{P}(t)G(t)\vec{P}(t)^T\right] \cdot \hat{n}(t) = -\frac{\zeta}{m}\vec{P}(t) + \vec{f}(t) - \left[\hat{n}(t) * \vec{f}(t)\right] \cdot \hat{n}(t)}$$

נציב במשוואת התנועה ונקבל **משוואת לנז'בן** :

משוואת לנז'בן לוקחת בחשבון רק היטל הכוח $\vec{f}(t)$ על מרחב המשיק $T_{\vec{x}(t)}(\mathrm{M})$ השייך לווקטור מיקום החלקיק $\vec{x}(t)$.

המעבר לתיאור משוואת לנז'בן בקואורדינטות לוקאליות :

משוואת לנז'בן בקואורדינטות לוקאליות בשפת הטנסורים ניתנת ע"י (ללא הוכחה) :

$$\begin{cases} \dot{p^c} + \frac{1}{m}\left\{ {c \atop ba} \right\} p^b p^a = -\frac{\zeta}{m} p^c + f^c \\ \dot{x^a} = \frac{1}{m} g^{ab} p_b = \frac{1}{m} p^a \end{cases}$$

$x^a = x^a(t)$: רכיב של וקטור ה-contravariant של וקטור מיקום החלקיק $\vec{x}(t)$.
x_a רכיב covariant
$p^a = p^a(t)$: רכיב של וקטור ה-contravariant של וקטור מיקום החלקיק $\vec{p}(t)$.
p_a רכיב covariant
$f^c = f^c(t)$: רכיב של וקטור ה-contravariant של היטל הכוח האקראי $\vec{f}(t)$ על $T_{\vec{x}(t)}(\mathrm{M})$.
מקיים אותם תנאים : $\langle\, f_a(t) \,\rangle = 0$; $\langle\, f_a(t) \cdot f_b(t') \,\rangle = \Omega \cdot \delta_{ab} \cdot \delta(t-t')$
f_a רכיב covariant
$-\frac{\zeta}{m} p^c$: ביטוי לוקאלי של כוח החיכוך .
$-\frac{1}{m}\left\{ {c \atop ba} \right\} p^b p^a$: ביטוי לוקאלי של כוח האילוץ של המשטח M , מופיע בו סמל כריסטופל.

ניתוח הבעיה יהיה באמצעות קואורדינטות לוקאליות .

מקרה ראשון :

המשטח M הוא מרחב אוקלידי , $\mathrm{M} = R^d$: המערכת המתארת את הבעיה היא מערכת קרטיזית.
סמלי כריסטופל שווים לאפס ולכן כוח האילוץ של המשטח הוא אפס , טנסור המטריקה $g_{ab} = \delta_{ab}$, טנסורים ה-contravariant וה-covariant מסדר ראשון שווים .

משוואת לנז'בן : $\begin{cases} \dot{p^c} = -\frac{\zeta}{m} \cdot p^c + f^c \\ \dot{x^c} = \frac{1}{m} \cdot p^c \end{cases}$ שתי משוואות דיפר' לינאריות מסדר ראשון .

תנאי התחלה : $x^c(0) = x_0^c$; $p^c(0) = p_0^c$

נפתור שתי המשוואות : הראשונה , $\dot{p^c}+\frac{\zeta}{m}\cdot p^c=f^c$ נכפול משוואה זו בפונקציה $e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}$:

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot \dot{p^c}(t)+\frac{\zeta}{m}\cdot e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot p^c(t)=e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot f^c(t)$$

$$\left[e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot p^c(t)\right]'=e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot f^c(t)$$

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\cdot p^c(t')\Big|_{t'=0}^{t}=\int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\cdot f^c(t')\cdot dt'$$

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot p^c(t)-e^{\frac{\zeta}{m}\cdot 0}\cdot p^c(0)=\int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\cdot f^c(t')\cdot dt'$$

$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot p^c(t)=p_0^c+\int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\cdot f^c(t')\cdot dt'$, נכפול משוואה זו בפונקציה $e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}$

$$p^c(t)=p_0^c\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}+e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot\int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\cdot f^c(t')\cdot dt'$$

השנייה $\dot{x^c}(t)=\frac{1}{m}\cdot p^c(t)$: $x^c(t')\,|_{t'=0}^{t}=x^c(t)-x^c(0)=\frac{1}{m}\cdot\int_0^t p^c(t')\cdot dt'$

$$x^c(t)=x_0^c+\frac{1}{m}\cdot\int_0^t p^c(t')\cdot dt'$$

נציג כמה תכונות :

1- תכונת הליניאריות של התוחלת : יהיו X ו- Y שני משתנים אקראיים ו- $a,b\in\boldsymbol{R}$ אז :

$$\langle\, a\cdot X+b\cdot Y\,\rangle=a\cdot\langle\, X\,\rangle+b\cdot\langle\, Y\,\rangle$$

2- תהי $g(t)$ פונקציה דטרמיניסטית אז $\langle\, g(t)\,\rangle=g(t)$

3- אם X מ"א גאוסי אז $Y=a\cdot X+b$ גם הוא מ"א גאוסי

טענה :

יהי $\{\, x(t)\,;t\ge 0\,\}$ תהליך אקראי בזמן רציף , ויהי $\{\, y(t)\,;t\ge 0\,\}$ תהליך אקראי בזמן רציף אחר כך ש- $y(t)=\int_0^t x(t')\,dt'$, מתקיימות שתי התכונות הבאות :

(1) $\langle\, y(t)\,\rangle=\int_0^t\langle\, x(t')\,\rangle\,dt'$

(2) אם $\{\, x(t)\,;t\ge 0\,\}$ הוא תהליך גאוסי אז $\{\, y(t)\,;t\ge 0\,\}$ גם הוא תהליך גאוסי

הוכחה: נפרק את האינטגרל $\int_0^t x(t')\cdot dt'$ לסכום רימן $\int_0^t x(t')\cdot dt'=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n x(c_i)\cdot\Delta t'_i$

$$\langle\, y(t)\,\rangle=\langle\,\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n x(c_i)\cdot\Delta t'_i\,\rangle=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n\langle\, x(c_i)\,\rangle\cdot\Delta t'_i=\int_0^t\langle\, x(t')\,\rangle\cdot dt'$$

אם $\{\, x(t)\,;t\ge 0\,\}$ הוא תהליך גאוסי אז כל צירוף ליניארי של מספר נקודות זמן שונות של התהליך : $\sum_{j=1}^k a_j\cdot x(t_j)$ הוא מ"א גאוסי ולכן $y(t)$ הוא מ"א גאוסי כפונקציה של הזמן $\Longleftarrow$ $\{\, y(t)\,;t\ge 0\,\}$ הוא תהליך גאוסי .

מסקנה :

על פי התכונות והטענה הנ"ל פונקציית המיקום $x^c(t)$ ופונקציית התנע $p^c(t)$ הן אקראיות המתפלגות גאוסית ומתארים תהליך גאוסי .

נחשב את התוחלת/ממוצע שלהן כפונקציה של זמן t :

בהינתן $\langle f^c(t) \rangle = 0$ נקבל : $\langle p^c(t) \rangle = p_0^c \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}$

$$\langle x^c(t) \rangle = x_0^c + \frac{1}{m}\cdot \int_0^t \langle p^c(t') \rangle \cdot dt' = x_0^c + p_0^c \cdot \int_0^t \frac{1}{m}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t'} \cdot dt' =$$

$$= x_0^c - \frac{1}{\zeta}\cdot p_0^c \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t'}\Big|_{t'=0}^{t} = x_0^c + \frac{1}{\zeta}\cdot p_0^c \cdot \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}\right)$$

אחרי זמן רב , $t \gg \frac{m}{\zeta}$, ממוצע תנע החלקיק דועך לאפס וממוצע מיקום החלקיק מוסט ב- $\frac{1}{\zeta}\cdot p_0^c$

לפשטות נניח ש- $x_0^c = 0$ ו- $p_0^c = 0$ $\Leftarrow$ $\langle x^c(t) \rangle = 0$, $\langle p^c(t) \rangle = 0$.

נחשב פונקציית הקורלציה $\langle \boldsymbol{p^a(t)p^b(t')} \rangle$:

$$p^a(t) = e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t} \cdot \int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u} \cdot f^a(u)\cdot du \ \ , \ p^b(t') = e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t'} \cdot \int_0^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot v} \cdot f^b(v)\cdot dv$$

$$p^a(t)p^b(t') = e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)} \cdot f^a(u)\cdot f^b(v)\cdot dudv$$

$$\langle p^a(t)p^b(t') \rangle = e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)} \cdot \langle f^a(u)\cdot f^b(v) \rangle \cdot dudv =$$

$$= e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)} \cdot \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot \delta(u-v)\cdot dudv$$

תחום האינטגרציה הוא מלבן $\{ (u,v) \mid 0 \le u \le t \ \ 0 \le v \le t' \}$ ובאינטגרד נמצאת פונקציית δ של דראק בצורה $\delta(u-v)$, ולכן אינטגרל דו-ממדי הנ"ל מצמצם לאינטגרל חד-ממדי על קו ישר $\{ (u,v) \mid u = v \ , \ 0 \le v \le t \}$, נפריד בין $t \ge t'$ ו- $t < t'$.

$$= \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \int_{v=0}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot v} \cdot \left[\int_{u=0}^{t} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u} \cdot \delta(u-v)\cdot du \right] \cdot dv$$

$$= \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \int_{v=0}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot v} \cdot \left[\ e^{\frac{\zeta}{m}\cdot v}\Big|_{0\le v\le t} \ \right] \cdot dv =$$

$$= \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \begin{cases} \int_0^{t'} e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot v} \cdot dv \ ; \ t \ge t' \\ \int_0^{t} e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot v} \cdot dv \ ; \ t < t' \end{cases}$$

$$= \frac{m}{2\zeta}\cdot \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \cdot \begin{cases} e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot t'} - 1 \ ; \ t \ge t' \\ e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot t} - 1 \ ; \ t < t' \end{cases}$$

$$= \frac{m}{2\zeta}\cdot \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot \begin{cases} e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot(t-t')} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \ ; \ t \ge t' \\ e^{\frac{2\zeta}{m}\cdot(t'-t)} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \ ; \ t < t' \end{cases}$$

$$\langle p^a(t)p^b(t') \rangle = \frac{m}{2\zeta}\cdot \Omega \cdot \delta^{ab} \cdot \left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-t'|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')} \right]$$

פונקציית הקורלציה $\langle\, x^a(t) x^b(t')\, \rangle$:

$$x^a(t) = \frac{1}{m}\cdot \int_0^t p^a(u)\cdot du \quad , \quad x^b(t') = \frac{1}{m}\cdot \int_0^{t'} p^b(v)\cdot dv$$

$$\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t')\, \rangle = \frac{1}{m^2}\cdot \langle\, \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} p^a(u)\cdot p^b(v)\cdot dudv\, \rangle =$$

$$= \frac{1}{m^2}\cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} \langle\, p^a(u)\cdot p^b(v)\, \rangle\cdot dudv =$$

$$= \frac{1}{m^2}\cdot\frac{m}{2\zeta}\cdot\Omega\cdot\delta^{ab}\cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)}\right]\cdot dudv =$$

$$= \frac{\Omega}{2\cdot m\cdot\zeta}\cdot\delta^{ab}\cdot\left[\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|}\cdot dudv - \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)}\cdot dudv\right]$$

$$\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(u+v)}\cdot dudv = \int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\, du\cdot\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}v}\, dv =$$

$$= \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t'}\right) = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t'} - e^{-\frac{\zeta}{m}t} + e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')}\right)$$

תחום האינטגרציה הוא מלבן $\{\, (u,v)\mid 0\le u\le t \quad 0\le v\le t'\,\}$, לגבי האינטגרל האחר

פונקציית האינטגרד היא $e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|}$ זה מצביע על קיום סימטריה בין המקרה $t\le t'$ למקרה $t > t'$, ולכן נסתפק בחישוב האינטגרל עבור המקרה $t\le t'$ ונכלול את התוצאה לאחר מכן .

במקרה $t\le t'$ תחום האינטגרציה הוא פשוט ביחס לציר v :

$$\{\, (u,v)\mid 0\le u\le t \quad 0\le v\le u\,\}\cup\{\, (u,v)\mid 0\le u\le t \quad u< v\le t'\,\}$$

$$\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|}\cdot dudv = \int_{u=0}^{t}\left(\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\, dv + \int_{v=u}^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}(u-v)}\, dv\right)\cdot du =$$

$$= \frac{m}{\zeta}\cdot\int_{u=0}^{t}\left(e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\Big|_{v=0}^{u} - e^{\frac{\zeta}{m}(u-v)}\Big|_{v=u}^{t'}\right)du = \frac{m}{\zeta}\cdot\int_{u=0}^{t}\left(2-e^{-\frac{\zeta}{m}u} - e^{\frac{\zeta}{m}(u-t')}\right)du =$$

$$= \frac{2m}{\zeta}t + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(e^{-\frac{\zeta}{m}u} - e^{\frac{\zeta}{m}(u-t')}\right)\Big|_{u=0}^{t} = \frac{2m}{\zeta}t + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - e^{\frac{\zeta}{m}(t-t')} - 1 + e^{-\frac{\zeta}{m}t'}\right)$$

הכללה :

$$\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|}\cdot dudv = \frac{2m}{\zeta}\cdot Min\{\, t,t'\,\} + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t'} + e^{-\frac{\zeta}{m}t} - e^{-\frac{\zeta}{m}|t-t'|} - 1\right)$$

$$\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle = \frac{\Omega}{2\cdot m\cdot\zeta}\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{2m}{\zeta}\cdot Min\{t,t'\} +$$

$$+\frac{\Omega}{2\cdot m\cdot\zeta}\cdot\delta^{ab}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(2e^{-\frac{\zeta}{m}t'} + 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} - e^{-\frac{\zeta}{m}|t-t'|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')} - 2\right)$$

$$\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle =$$
$$= \frac{\Omega\cdot m}{\zeta^3}\cdot\delta^{ab}\cdot\left[\frac{\zeta}{m}\cdot Min\{t,t'\} + e^{-\frac{\zeta}{m}t'} + e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')} - \frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{m}|t-t'|} - 1\right]$$

פונקציית הקורלציה $\langle\, \boldsymbol{p^a(t)\cdot x^b(t')}\,\rangle$:

$$\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle = \langle\, p^a(t)\cdot\frac{1}{m}\int_0^{t'} p^b(v)\,dv\,\rangle = \frac{1}{m}\cdot\int_0^{t'}\langle\, p^a(t)\cdot p^b(v)\,\rangle\,dv =$$
$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{m}{2\zeta}\cdot\Omega\cdot\delta^{ab}\cdot\int_0^{t'}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\right]dv =$$
$$= \frac{\Omega}{2\zeta}\cdot\delta^{ab}\cdot\left[\int_0^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-v|}\,dv - \int_0^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\,dv\right] =$$
$$\int_0^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\,dv = -\frac{m}{\zeta}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\Big|_{v=0}^{t'} = \frac{m}{\zeta}\cdot\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')}\right)$$
$$\int_0^{t'} e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-v|}\,dv = \begin{cases} \int_0^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)}\,dv \;\;,\;\; t>t' \\ \int_0^{t} e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)}\,dv + \int_t^{t'} e^{\frac{\zeta}{m}(t-v)}\,dv \;\;,\;\; t\le t' \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{m}{\zeta}\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}(t'-t)} - e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right) \;\;,\;\; t>t' \\ \frac{m}{\zeta}\cdot\left(1 - e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 1 - e^{\frac{\zeta}{m}(t-t')}\right) \;\;,\;\; t\le t' \end{cases}$$
$$\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle =$$
$$= \frac{\Omega\cdot m}{2\cdot\zeta^2}\cdot\delta^{ab}\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')} - 2\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 2\cdot\begin{cases}0\;,\; t>t'\\ 1\;,\; t\le t'\end{cases} + e^{-\frac{\zeta}{m}|t'-t|}\cdot\begin{cases}1\;,\; t>t'\\ -1\;,\; t\le t'\end{cases}\right]$$

נזכיר בפונקציית הביסייד (מדרגה) : $H(t) = \begin{cases}1\;,\; t\ge 0\\ 0\;,\; t<0\end{cases}$

$$H(t'-t) = \begin{cases}0\;,\; t>t'\\ 1\;,\; t\le t'\end{cases} \quad;\quad 1-2\cdot H(t'-t) = \begin{cases}1\;,\; t>t'\\ -1\;,\; t\le t'\end{cases}$$
$$\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle =$$
$$= \frac{\Omega\cdot m}{2\cdot\zeta^2}\cdot\delta^{ab}\cdot\left\{2\cdot H(t'-t)\cdot\left[1 - e^{-\frac{\zeta}{m}|t'-t|}\right] + e^{-\frac{\zeta}{m}|t'-t|} + e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t')} - 2\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right\}$$

נגדיר **ממוצע תנע ריבועי (Mean Quadratic Momentum)** : $\langle\, \boldsymbol{p^a(t)\cdot p_a(t)} \,\rangle$

במערכת קרטזית $p^a(t) = p_a(t)$ ולכן במקרה הראשון :

$$\langle\, p^a(t)\cdot p_a(t) \,\rangle = d\cdot\langle\, p^a(t)\cdot p^a(t) \,\rangle = d\cdot\frac{m}{2\zeta}\cdot\Omega\cdot\delta^{aa}\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-t|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t)}\right] =$$

$$= \frac{m\cdot\Omega\cdot d}{2\zeta}\cdot\left[\,1 - e^{-2\frac{\zeta}{m}\cdot t}\,\right]$$

נגדיר **ממוצע תזוזה ריבועית (Mean Square Displacement)** : $\langle\, \boldsymbol{x^a(t)\cdot x_a(t)} \,\rangle$

נסמן $s^2(t) = x^a(t)\cdot x_a(t)$.

במקרה הראשון ($x^a(t) = x_a(t)$) :

$$\langle\, s^2(t) \,\rangle = \langle\, x^a(t)\cdot x_a(t) \,\rangle = d\cdot\langle\, x^a(t)\cdot x^a(t) \,\rangle =$$

$$= d\cdot\frac{\Omega\cdot m}{\zeta^3}\cdot\delta^{aa}\cdot\left[\frac{\zeta}{m}\cdot Min\{t,t\} + e^{-\frac{\zeta}{m}t} + e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{m}(t+t)} - \frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{m}|t-t|} - 1\right]$$

$$= \frac{\Omega\cdot m\cdot d}{\zeta^3}\cdot\left[\frac{\zeta}{m}\cdot t + 2\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - \frac{3}{2}\right]$$

חקירת פונקציות הקורלציה בזמן אחיד $\boldsymbol{t = t'}$:

זמן הדעיכה הוא $\tau_B = \frac{m}{\zeta}$.

עבור אינדקסים שונים $a \neq b$, פונקציות הקורלציה : $\langle\, p^a(t)\cdot p^b(t) \,\rangle$, $\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t) \,\rangle$ ו- $\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t) \,\rangle$ הם זהותית אפס . המשמעות היא אי תלות רכיבי טנסור המיקום אחד בשני , אותו דבר לגבי טנסור התנע .

לגבי אינדקסים שווים $a = b$, מספיק לחקור שלוש פונקציות הקורלציה המנורמלות הבאות :

$$\frac{2\cdot\zeta^2}{\Omega\cdot m}\cdot\langle\, p^a(t)\cdot x^a(t) \,\rangle = e^{-\frac{2}{\tau_B}t} - 2\cdot e^{-\frac{1}{\tau_B}t} + 1$$

$$\boldsymbol{MQM}\ :\ \frac{2\zeta}{m\cdot\Omega\cdot d}\cdot\langle\, p^a(t)\cdot p_a(t) \,\rangle = 1 - e^{-\frac{2}{\tau_B}t}$$

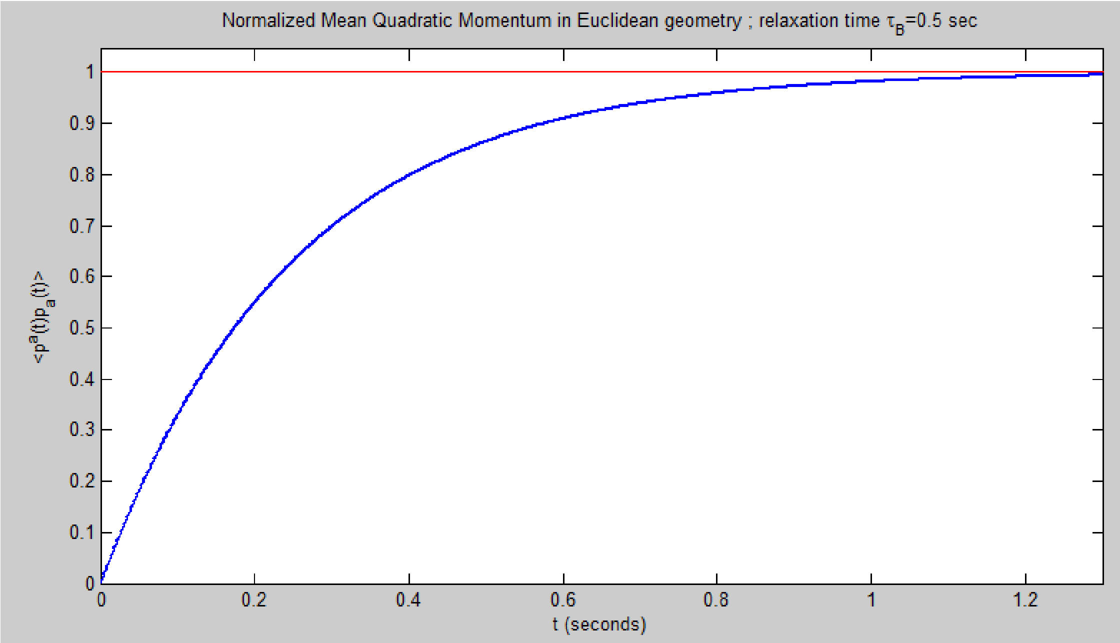
$$\boldsymbol{MSD}\ :\ \frac{\zeta^3}{m\cdot\Omega\cdot d}\cdot\langle\, x^a(t)\cdot x_a(t) \,\rangle = \frac{1}{\tau_B}\cdot t + 2\cdot e^{-\frac{1}{\tau_B}t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{2}{\tau_B}t} - \frac{3}{2}$$

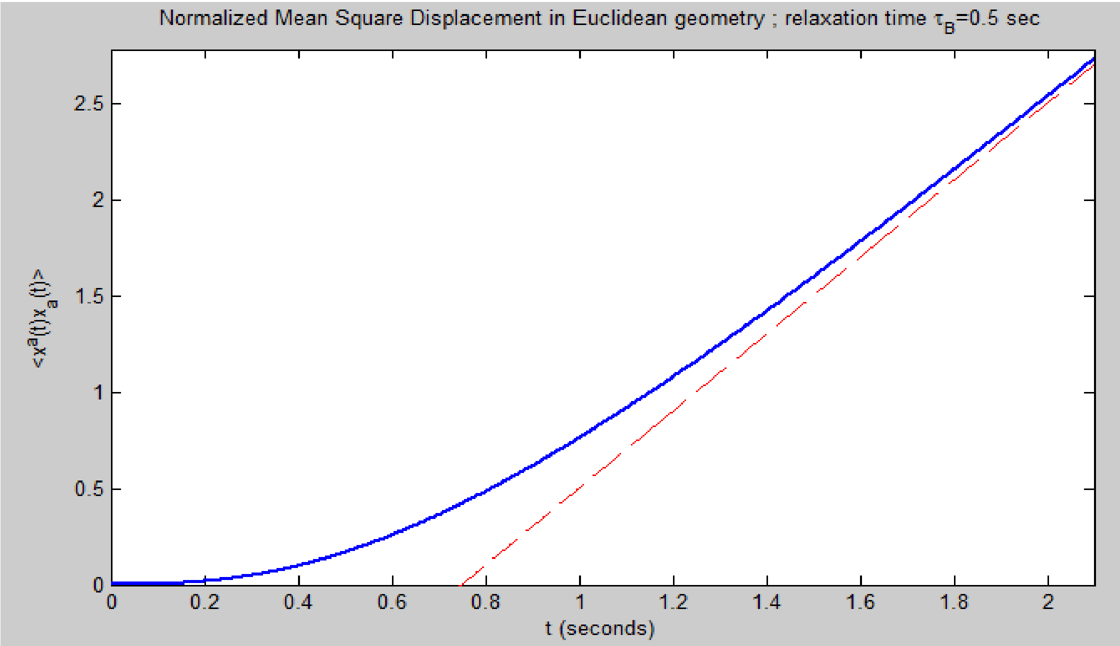
אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$: $\frac{2\zeta}{m\cdot\Omega\cdot d}\cdot\langle\, p^a(t)\cdot p_a(t) \,\rangle \approx 1$; $\frac{2\cdot\zeta^2}{\Omega\cdot m}\cdot\langle\, p^a(t)\cdot x^a(t) \,\rangle \approx 1$

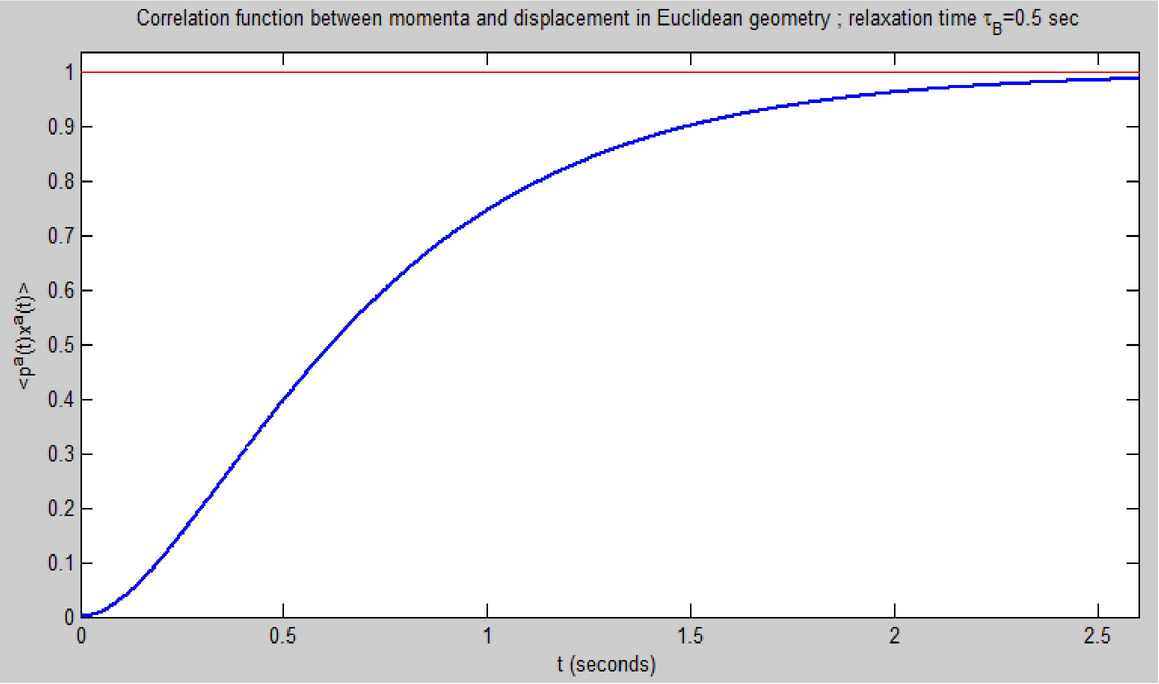
$$\frac{\zeta^3}{m\cdot\Omega\cdot d}\cdot\langle\, x^a(t)\cdot x_a(t) \,\rangle \approx \frac{1}{\tau_B}\cdot t - \frac{3}{2}$$

הסבר פיסיקאלי : בהתחלה כוח האקראי החיצוני הוא גורם לתנועת החלקיק האקראית ובכך MQM של החלקיק יגדל במהלך הזמן (וגם ממוצע גודל המהירות הריבועי) , אך עקב נוכחות כוח התנגדות התווך (כוח יחסי למהירות) הפועל לאיזון הכוח האקראי החיצוני , אחרי זמן רב הכוח השקול הפועל על החלקיק שואף לאפס ולכן גם התאוצה שלו ואז ממוצע גודל מהירותו הריבועי יהיה קבוע בזמן ולכן MSD של החלקיק תהיה קו ישר .

נצייר גרפי פונקציות הקורלציה של חלקיק מסוים עבור $\tau_B = 0.5\ sec$:






Correlation function between momenta and displacement in Euclidean geometry ; relaxation time τB=0.5 sec
<pa(t)xa(t)>
t (seconds)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5

מקרה שני : מצב של עקמומיות של המשטח M .

בהינתן קיום של עקמומיות של המשטח M **,** קשה לפתור משוואת לנז'בן בצורתה הלוקאלית בדרך אנליטית ולכן ננסה לפתור אותה בדרך נומרית (מקורבת) .

משוואת לנז'בן :
$$\begin{cases} \frac{dp^c}{dt} = -\frac{\zeta}{m}\cdot p^c - \frac{1}{m}\cdot \left\{ \begin{matrix} c \\ ba \end{matrix} \right\} \cdot p^b p^a + f^c \\ \frac{dx^a}{dt} = \frac{1}{m}\cdot p^a = \frac{1}{m}\cdot g^{ab} p_b \end{cases}$$

בהנחה : טנסור ה-covariant של התנע p_b אינו תלוי במטריקה g^{ab} .

נציג :
$$f^c = g^{cd}\cdot f_d \ ; \ p^a = g^{ah}\cdot p_h \ , \ p^b = g^{br}\cdot p_r \ , \ p^c = g^{cd}\cdot p_d$$

$$\frac{dg^{cr}}{dt} = \frac{\partial g^{cr}}{\partial x^a}\frac{dx^a}{dt} = \frac{1}{m}\frac{\partial g^{cr}}{\partial x^a} g^{ab} p_b \ , \ \frac{dp^c}{dt} = \frac{d\left(g^{cd}\cdot p_d\right)}{dt} = \frac{dg^{cr}}{dt} p_r + g^{cd}\frac{dp_d}{dt}$$

נציב במשוואה הדיפר' של התנע :

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial g^{cr}}{\partial x^a} g^{ab} p_b p_r + g^{cd}\cdot\frac{dp_d}{dt} = -\frac{\zeta}{m}\cdot g^{cd} p_d - \frac{1}{m}\cdot\left\{ \begin{matrix} c \\ ba \end{matrix} \right\}\cdot g^{br} g^{ch} p_r p_h + g^{cd} f_d$$

נכפול משוואה זו ב- g_{cd} משמאל , נזכיר : $g_{cd}\cdot g^{cd} = \delta^c_c = 1$, נקבל :

$$\frac{dp_d}{dt} = \dot{p_d} = -\frac{\zeta}{m} p_d - \frac{1}{m}\cdot g_{cd}\frac{\partial g^{cr}}{\partial x^a} g^{ab} p_b p_r - \frac{1}{m}\cdot\left\{ \begin{matrix} c \\ ba \end{matrix} \right\}\cdot g_{cd} g^{br} g^{ch} p_r p_h + f_d$$

בכדי לחקור השפעת עקמומיות המשטח על תנועת החלקיקים , נפתח טנסור המטריקה (והצמוד לו) וסמל כריסטופל לטור טיילור סביב פתרון המיקום האוקלידי שמצאנו במקרה הראשון עד סדר 2 , ניתנים ע"י (ללא הוכחת דרך הפיתוח) :

$$g^{ab} = \delta^{ab} - \frac{1}{3} R^a{}_{cd}{}^b \cdot x^c x^d + O(x^3) \ ; \ \left\{ \begin{matrix} c \\ ba \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3}\left(R^c{}_{bda} + R^c{}_{adb}\right)\cdot x^d + O(x^3)$$

הפיתוח נעשה ע"י קואורדינטות רימן המנורמלות .

נזכיר ש- $R^c{}_{bda}$ הוא טנסור העקמומיות של רימן , נציב במשוואה הדיפר' של התנע נקבל :

(ללא הוכחה)
$$\begin{cases} \dot{p_d} = -\frac{\zeta}{m} p_d - \frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot p^a p^b x^c + \cdots + f_d \\ \dot{x^a} = \frac{1}{m}\cdot g^{ab}\cdot p_b \end{cases}$$

שאר המחוברים שאינם בולטים במשוואה הדיפר' של התנע הם מוכפלים לפחות בשני מקדמים של טנסור העקמומיות אך טנסור העקמומיות נחשב כגודל זעיר לכן הם מסדר גודל קטן ולכן ניתן להזניח אותם .

לפתירת משוואת לנז'בן בסביבה קטנה לפתרון האוקלידי על פי הפיתוח לטור טיילור , מרחיבים את התנע והמיקום בדרך הבאה : $p_d = q_d + \delta q_d$; $x^a = z^a + \delta z^a$, כך ש- $q_d = q_d(t)$, $z^a = z^a(t)$ פתרונות משוואת לנז'בן בגאומטריה אוקלידית .

שתי הפונקציות $\delta z^a = \delta z^a(t)$, $\delta q_d = \delta q_d(t)$ מצביעות על הסטייה הקטנה מהפתרון האוקלידי , לבניית שתי משוואת דיפר' ליניאריות לשתי פונקציות אלו (זה מה שרוצים)
נציב : $x^a = z^a + \delta z^a$; $p_d = q_d + \delta q_d$, $p^a = q^a + \delta q^a$ בשתי משוואות דיפר' הנ"ל .

$$\begin{aligned} p^a p^b x^c &= (q^a + \delta q^a)\cdot(q^b + \delta q^b)\cdot(z^c + \delta z^c) \\ &= (q^a + \delta q^a)\cdot(q^b z^c + z^c \delta q^b + q^b \delta z^c + \delta q^b \delta z^c) \\ &= q^a q^b z^c + (\, q^b z^c \delta q^a + q^a z^c \delta q^b + q^a q^b \delta z^c\,) + \\ &\qquad + [\, z^c \delta q^a \delta q^b + q^b \delta q^a \delta z^c + q^a \delta q^b \delta z^c\,] + \delta q^a \delta q^b \delta z^c \end{aligned}$$

האיבר $p^a p^b z^c$ הוא מחובר מסדר אפס ודומיננטי , הביטוי בסוגרים $(\cdots)$ הוא מחובר מסדר ראשון בהצבתו במשוואה יוכפל במקדם טנסור עקמומיות אחד ולכן יוזנח אחר כך , הביטוי בסוגריים $[\cdots]$ והאיבר $\delta q^a \delta q^b \delta z^c$ הם מחוברים מסדר שני ושלישי בהתאמה לכן הם זניחים .

$$\begin{cases} \dot{q_d} + \delta \dot{q}_d = -\frac{\zeta}{m}(q_d + \delta q_d) - \frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot q^a q^b z^c + \cdots + f_d \\ \dot{z^a} + \delta \dot{z}^a = \frac{1}{m}\cdot g^{ab}\cdot(q_b + \delta q_b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dot{q_d} + \frac{\zeta}{m} q_d - f_d\right] + \delta \dot{q}_d = -\frac{\zeta}{m}\delta q_d - \frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot q^a q^b z^c + \cdots \\ \left[\dot{z^a} - \frac{1}{m} q^a\right] + \delta \dot{z}^a = \frac{1}{m}\cdot \delta q^a \end{cases}$$

פתרון האוקלידי נותן : $\dot{z^a} - \frac{1}{m} q^a = 0$; $\dot{q_d} + \frac{\zeta}{m} q_d - f_d = 0$

משוואת לנז'בן בתנאי עקמומיות המשטח M בסביבה קטנה המקורבת למשטח אוקלידי היא :

$$z^c(t) = \frac{1}{m}\cdot\int_0^t q^c(u)\cdot du \;\; ; \quad \begin{cases} \delta \dot{q}_d = -\frac{\zeta}{m}\delta q_d - \frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot q^a q^b z^c & (1) \\ \delta \dot{z}^a = \frac{1}{m}\cdot \delta q^a & (2) \end{cases}$$

תנאי התחלה : $p_d(0) = q_d(0)$; $z^a(0) = x^a(0)$ $\Longleftarrow$ $\delta q_d(0) = 0$; $\delta z^a(0) = 0$

נפתור שתי המשוואות : נכפול משוואה (1) בפונקציה $e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}$, נקבל :

$$\left[e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot \delta q_d(t)\right]' = -\frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot q^a(t) q^b(t) z^c(t)$$

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u}\cdot \delta q_d(u)\Big|_{u=0}^{t} = -\frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot \int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u}\cdot q^a(u) q^b(u) z^c(u)\cdot du$$

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot \delta q_d(t) - \delta q_d(0) = -\frac{1}{3m} R_{dacb}\cdot \int_0^t e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u}\cdot q^a(u) q^b(u) z^c(u)\cdot du$$

נציב $z^c(u) = \frac{1}{m}\cdot\int_0^u q^c(v)\cdot dv$ במשוואה :

$$e^{\frac{\zeta}{m}\cdot t}\cdot \delta q_d(t) = -\frac{1}{3m^2} R_{dacb}\cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot u}\cdot q^a(u) q^b(u) q^c(v)\cdot du dv$$

נכפול את המשוואה בפונקציה $e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot t}$, נקבל :

$$\delta q_d(t) = -\frac{1}{3m^2} R_{dacb} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \cdot q^a(u) q^b(u) q^c(v) \cdot dudv$$

$$\begin{aligned} \delta q^d(t) &= g^{dr} \cdot \delta q_r(t) \\ &= -\frac{1}{3m^2} g^{dr} R_{racb} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \cdot q^a(u) q^b(u) q^c(v) \cdot dudv \\ &= -\frac{1}{3m^2} R^d{}_{acb} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \cdot q^a(u) q^b(u) q^c(v) \cdot dudv \end{aligned}$$

משוואה (2) : $\delta z^d(t) = \delta z^d(0) + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t \delta q^d(u) \cdot du = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t \delta q^d(u) \cdot du$

$$\delta z^d(t) = -\frac{1}{3m^3} R^d{}_{acb} \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)}\, q^a(v) q^b(v) q^c(w)\, dudvdw$$

$$\begin{aligned} \delta z_d(t) &= g_{dr} \cdot \delta z^d(t) \\ &= -\frac{1}{3m^3} g_{dr}\, R^r{}_{acb} \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} q^a(v) q^b(v) q^c(w) dudvdw \\ &= -\frac{1}{3m^3} R_{dacb} \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} q^a(v) q^b(v) q^c(w) dudvdw \end{aligned}$$

נציג משפט העסוק בחישוב פונקציות קורלציה מסדר גבוה , נקרא **Isserlis' theorem** :

יהיו $\{\, x_i(t)\,; t \geq 0 \,\}$ $i = 1, \dots, 2n$ תהליכים אקראיים עם אותה התפלגות גאוסית כך ש- $\langle\, x_i(t) \,\rangle = 0$, לפי המשפט מתקיים : $\langle\, x_1(t_1) \cdot x_2(t_2) \cdots x_{2n-1}(t_{2n-1}) \,\rangle = 0$

$$\langle\, x_1(t_1) \cdot x_2(t_2) \cdots x_{2n}(t_{2n}) \,\rangle = \sum_{\ell\ terms} \prod_{\substack{n\ pairs \\ i \neq k}} \langle\, x_i(t_i) \cdot x_k(t_k) \,\rangle \quad ; \quad \ell = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

לפעמים המשפט נקרא בפיסיקה ב- **Wick's theorem** .

$n = 2$: $\langle\, x_1(t_1) \cdot x_2(t_2) \cdot x_3(t_3) \,\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle\, x_1(t_1) \cdot x_2(t_2) \cdot x_3(t_3) \cdot x_4(t_4) \,\rangle &= \langle\, x_1(t_1) x_2(t_2) \,\rangle \cdot \langle\, x_3(t_3) x_4(t_4) \,\rangle + \\ &+ \langle\, x_1(t_1) x_3(t_3) \,\rangle \cdot \langle\, x_2(t_2) x_4(t_4) \,\rangle + \langle\, x_1(t_1) x_4(t_4) \,\rangle \cdot \langle\, x_2(t_2) x_3(t_3) \,\rangle \end{aligned}$$

נחשב ממוצע מיקום ותנע החלקיקים :

$$\langle\, p_d(t) \,\rangle = \langle\, q_d(t) + \delta q_d(t) \,\rangle = \langle\, q_d(t) \,\rangle + \langle\, \delta q_d(t) \,\rangle$$

$$\langle\, x^d(t) \,\rangle = \langle\, z^d(t) + \delta z^d(t) \,\rangle = \langle\, z^d(t) \,\rangle + \langle\, \delta z^d(t) \,\rangle$$

בגיאומטריה אוקלידית : $\langle\, q_d(t)\,\rangle = 0 \;\;,\;\; \langle\, z^d(t)\,\rangle = 0$

לפי משפט **'Isserlis** : $\langle\, q^a(t_1)q^b(t_1)q^c(t_2)\,\rangle = 0$ **לכן** $\langle\, \delta q_d(t)\,\rangle = 0 \;,\; \langle\, \delta z^d(t)\,\rangle = 0$

$$\langle\, p_d(t)\,\rangle = \langle\, p^d(t)\,\rangle = 0 \quad,\quad \langle\, x_d(t)\,\rangle = \langle\, x^d(t)\,\rangle = 0$$

פונקציית הקורלציה $\langle\, p^a(t)\cdot p^b(t')\,\rangle$:

$$\langle\, p^a(t)\cdot p^b(t')\,\rangle = \langle\, [\, q^a(t)+\delta q^a(t)\,]\cdot[\, q^b(t')+\delta q^b(t')\,]\,\rangle$$

$$= \langle\, q^a(t)q^b(t')\,\rangle + [\,\langle\, q^a(t)\delta q^b(t')\,\rangle + \langle\, \delta q^a(t)q^b(t')\,\rangle\,] + \langle\, \delta q^a(t)\delta q^b(t')\,\rangle$$

$$\langle\, q^a(t)\delta q^b(t')\,\rangle = -\frac{1}{3m^2}R^b{}_{ijk}\cdot\int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t')}\,\langle\, q^a(t)q^i(u)q^j(v)q^k(u)\,\rangle\, dudv$$

נסמן : $I_1{}^{abcd}(t,t') = \int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t')}\,\langle\, q^a(t)q^b(u)q^c(v)q^d(u)\,\rangle\, dudv$

נקבל : $\langle\, q^a(t)\delta q^b(t')\,\rangle = -\frac{1}{3m^2}\cdot R^b{}_{ijk}\cdot\; I_1{}^{aijk}(t,t')$

פונקציית הקורלציה $\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle$:

$$\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle = \langle\, [\, z^a(t)+\delta z^a(t)\,]\cdot[\, z^b(t')+\delta z^b(t')\,]\,\rangle$$

$$= \langle\, z^a(t)z^b(t')\,\rangle + [\,\langle\, z^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle + \langle\, \delta z^a(t)z^b(t')\,\rangle\,] + \langle\, \delta z^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle$$

$$\langle\, z^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle = \frac{-1}{3m^3}R^b{}_{ijk}\int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\,(v-u)}\langle\, z^a(t)q^i(v)q^j(w)q^k(v)\,\rangle\, dudvdw$$

$$= -\frac{1}{3m^4}R^b{}_{ijk}\int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\,(v-u)}\langle\, q^a(s)q^i(v)q^j(w)q^k(v)\,\rangle\, dsdudvdw$$

נסמן : $I_2{}^{abcd}(t,t') = \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\,(v-u)}\langle q^a(s)q^b(v)q^c(w)q^d(v)\rangle\, dsdudvdw$

נקבל : $\langle\, z^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle = -\frac{1}{3m^4}\cdot R^b{}_{ijk}\cdot\; I_2{}^{aijk}(t,t')$

פונקציית הקורלציה $\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle$:

$$\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t')\,\rangle = \langle\, [\, q^a(t)+\delta q^a(t)\,]\cdot[\, z^b(t')+\delta z^b(t')\,]\,\rangle$$

$$= \langle\, q^a(t)z^b(t')\,\rangle + [\,\langle\, q^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle + \langle\, \delta q^a(t)z^b(t')\,\rangle\,] + \langle\, \delta q^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle$$

$$\langle\, q^a(t)\delta z^b(t')\,\rangle = -\frac{1}{3m^3}R^b{}_{ijk}\int_{u=0}^{t'}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\langle q^a(t)q^i(v)q^j(w)q^k(v)\rangle\, dudvdw$$

$$I_3{}^{abcd}(t,t') = \int_{u=0}^{t'} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} \langle\, q^a(t) q^b(v) q^c(w) q^d(v) \,\rangle \, dudvdw$$

נקבל : $$\langle\, q^a(t)\delta z^b(t') \,\rangle = -\frac{1}{3m^3}\cdot R^b{}_{ijk} \cdot I_3{}^{aijk}(t,t')$$

$$\langle\, \delta q^a(t) z^b(t') \,\rangle = -\frac{1}{3m^2} R^a{}_{ijk} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(u-t)} \langle\, z^b(t') q^i(u) q^j(v) q^k(u) \,\rangle \, dudv$$

$$= -\frac{1}{3m^3} R^a{}_{ijk} \int_{s=0}^{t'} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^b(s) q^i(u) q^j(v) q^k(u) \,\rangle \, dsdudv$$

נסמן: $$I_4{}^{abcd}(t,t') = \int_{s=0}^{t'} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(s) q^b(u) q^c(v) q^d(u) \,\rangle \, dsdudv$$

נקבל : $$\langle\, \delta q^a(t) z^b(t') \,\rangle = -\frac{1}{3m^3}\cdot R^a{}_{ijk} \cdot I_4{}^{bijk}(t,t')$$

ממוצע תנע ריבועי , MQM $\langle\, \boldsymbol{p^a(t)\cdot p_a(t)} \,\rangle$:

$$\langle\, p^a(t)\cdot p_a(t) \,\rangle = \langle\, [\, q^a(t) + \delta q^a(t) \,]\cdot[\, q_a(t) + \delta q_a(t) \,] \,\rangle$$

$$= \langle\, q^a(t) q_a(t) \,\rangle + [\, \langle\, q^a(t)\delta q_a(t) \,\rangle + \langle\, \delta q^a(t) q_a(t) \,\rangle \,] + \langle\, \delta q^a(t)\delta q_a(t) \,\rangle$$

$$\langle\, q^a(t)\delta q_a(t) \,\rangle = -\frac{1}{3m^2} R_{aijk} \cdot \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(t) q^i(u) q^j(v) q^k(u) \,\rangle \, dudv$$

$$= -\frac{1}{3m^2}\cdot R_{aijk} \cdot I_1{}^{aijk}(t,t)$$

$$\langle\, \delta q^a(t) q_a(t) \,\rangle = -\frac{1}{3m^2} R^a{}_{ijk} \cdot \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q_a(t) q^i(u) q^j(v) q^k(u) \,\rangle \, dudv$$

$$= -\frac{1}{3m^2}\cdot R^a{}_{ijk} \cdot I_{1\,a}{}^{ijk}(t,t)$$

ממוצע תזוזה ריבועית , MSD $\langle\, \boldsymbol{s^2(t)} \,\rangle = \langle\, \boldsymbol{x^a(t)\cdot x_a(t)} \,\rangle$:

$$\langle\, x^a(t)\cdot x_a(t) \,\rangle = \langle\, [\, z^a(t) + \delta z^a(t) \,]\cdot[\, z_a(t) + \delta z_a(t) \,] \,\rangle$$

$$= \langle\, z^a(t) z_a(t) \,\rangle + [\, \langle\, z^a(t)\delta z_a(t) \,\rangle + \langle\, \delta z^a(t) z_a(t) \,\rangle \,] + \langle\, \delta z^a(t)\delta z_a(t) \,\rangle$$

$$\langle\, z^a(t)\delta z_a(t) \,\rangle =$$

$$= -\frac{1}{3m^3} R_{aijk} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} \langle\, z^a(t) q^i(v) q^j(w) q^k(v) \,\rangle \, dudvdw$$

$$= -\frac{1}{3m^4} R_{aijk} \int_{s=0}^{t} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} \langle\, q^a(s) q^i(v) q^j(w) q^k(v) \,\rangle \, dsdudvdw$$

$$= -\frac{1}{3m^4}\cdot R_{aijk} \cdot I_2{}^{aijk}(t,t)$$

$$\langle\ \delta z^a(t) z_a(t)\ \rangle =$$

$$= -\frac{1}{3m^3} R^a{}_{ijk} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} \langle\ z_a(t) q^i(v) q^j(w) q^k(v)\ \rangle\ dudvdw$$

$$= -\frac{1}{3m^4} R^a{}_{ijk} \int_{s=0}^{t} \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)} \langle\ q_a(s) q^i(v) q^j(w) q^k(v)\ \rangle\ dsdudvdw$$

$$= -\frac{1}{3m^4} \cdot R^a{}_{ijk} \cdot I_{2\ a}{}^{ijk}(t,t)$$

הערה : בחישוב MQM ו- MSD הסכימה מבוצעת גם על אינדקס a .

הסבר ונימוק :

פונקציות הקורלציות : $\langle\ p^a(t)\cdot p^b(t')\ \rangle$, $\langle\ x^a(t)\cdot x^b(t')\ \rangle$ ו- $\langle\ p^a(t)\cdot x^b(t')\ \rangle$ הן טנסורים contravariant מסדר 2 , מנגד MQM ו- MSD הן טנסורים מסדר אפס (סקלרים) . כמו כן גם בתנאי גיאומטריה האוקלידית .

חמשת פונקציות הקורלציה אלו הן סכום של 3 מחוברים .
המחובר הראשון הוא פונקציית קורלציה מסדר אפס בתנאי הגיאומטריה האוקלידית .
המחובר השני הוא סכום של שתי פונקציות קורלציה מסדר ראשון .
המחובר השלישי הוא פונקציית קורלציה מסדר שני, ערכה הכמותי אפסי ולכן ניתן להזניח אותה.

$$\langle\ \delta q^a(t)\delta q^b(t')\ \rangle \approx 0\ ;\ \langle\ \delta z^a(t)\delta z^b(t')\ \rangle \approx 0\ \ ;\ \ \langle\ \delta q^a(t)\delta z^b(t')\ \rangle \approx 0$$

$$\langle\ \delta q^a(t)\delta q_a(t)\ \rangle \approx 0\ \ ;\ \ \langle\ \delta z^a(t)\delta z_a(t)\ \rangle \approx 0$$

הפונקציות $I_n{}^{abcd}(t,t')$; $n = 1{,}2{,}3{,}4$ (n הוא אינדקס ספירה ולא אינדקס של טנסור) הן טנסורים contravariant מסדר 4 , קיימת סימטריה ביחס לשני אינדקסים b ו- d .

חישוב מפורש של $\langle\ q^a(t_1)q^b(t_2)q^c(t_3)q^d(t_4)\ \rangle$:

$$\langle\ q^a(t_1)q^b(t_2)q^c(t_3)q^d(t_4)\ \rangle = \langle\ q^a(t_1)q^b(t_2)\ \rangle\cdot\langle\ q^c(t_3)q^d(t_4)\ \rangle +$$

$$+ \langle\ q^a(t_1)q^c(t_3)\ \rangle\cdot\langle\ q^b(t_2)q^d(t_4)\ \rangle + \langle\ q^a(t_1)q^d(t_4)\ \rangle\cdot\langle\ q^b(t_2)q^c(t_3)\ \rangle$$

$$\langle\ q^a(t)\cdot q^b(t')\ \rangle = \frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\cdot\delta^{ab}\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-t'|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+t')}\right]$$

אם הופיע אינדקס מספר אי-זוגי של פעמים (1 או 3) ב- $I_n{}^{abcd}(t,t')$ אז בגלל δ^{ab} נקבל $I_n{}^{abcd}(t,t') = 0$.

נחשב במפורש : $\langle\ q^a(t_1)q^a(t_2)q^b(t_3)q^b(t_4)\ \rangle = \langle\ q^a(t_1)q^a(t_2)\ \rangle\cdot\langle\ q^b(t_3)q^b(t_4)\ \rangle =$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t_1-t_2|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t_1+t_2)}\right]\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t_3-t_4|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t_3+t_4)}\right]$$

נחקור את תנועת החלקיק **בזמן אחיד** $\boldsymbol{t = t'}$ בגאומטריה רימנית מתוך הסתמכות על ההפרש בין מצב העקמומיות של המשטח למצב שטוח בגאומטריה אוקלידית , כלומר נחקור סכום פונקציות קורלציה מסדר ראשון ויהיו מנורמלות :

לפשטות נסמן : $I_n{}^{abcd}(t,t) = I_n{}^{abcd}(t)$.

חישוב מפורש של $I_n{}^{abab}(t)$; $I_n{}^{abba}(t)$ (דרך החישוב והפיתוחים נמצאים בנספח) , וציור הגרפים שלהם עבור $\tau_B = \frac{m}{\zeta} = 0.5\ sec$:

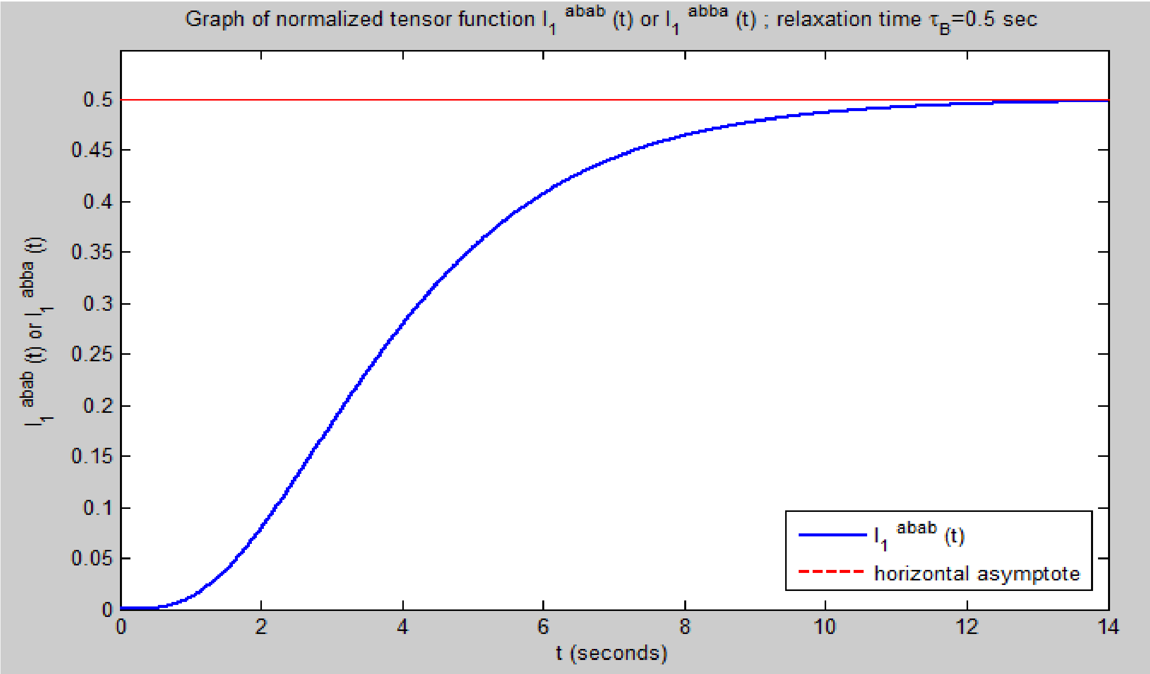
$$\boldsymbol{I_1{}^{abab}(t) = I_1{}^{abba}(t)} = \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[\frac{1}{2} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 3e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{1}{2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t} \right]$$

הפונקציה המנורמלת :

$$\hat{I}_1{}^{abab}(t) = \frac{4 \cdot \zeta^4}{\Omega^2 \cdot m^4} \cdot I_1{}^{abab}(t)$$

$$= \frac{1}{2} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 3e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{1}{2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$: $\hat{I}_1{}^{abab}(0) = \frac{1}{2} - 2 + 3 - 2 + \frac{1}{2} = 0$; $\hat{I}_1{}^{abab}(t) \approx \frac{1}{2}$



$$\boldsymbol{I_2{}^{abab}(t)} = \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[t^2 - \frac{4m}{\zeta}t + \frac{10m^2}{3\zeta^2} + \left(\frac{2m}{\zeta}t - \frac{14m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \left(\frac{5m^2}{2\zeta^2} - \frac{m}{\zeta}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \right.$$

$$\left. - \frac{4m^2}{3\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t} \right]$$

הפונקציה המנורמלת :

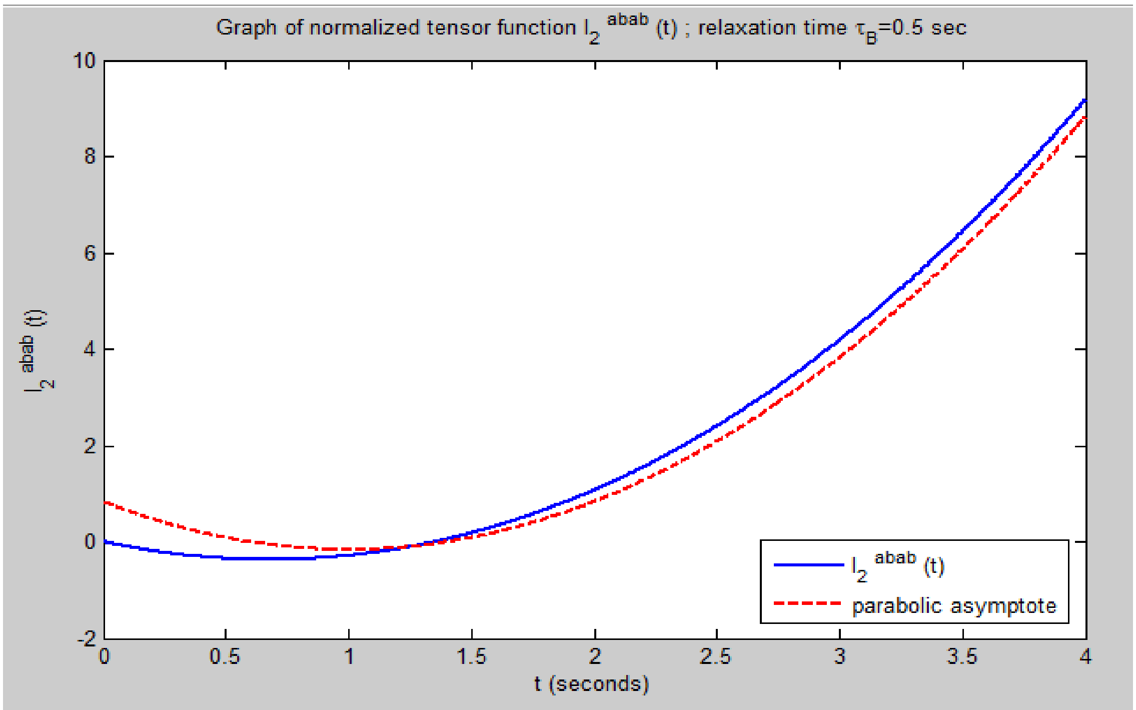
$$\hat{I}_2^{\,abab}(t) = \frac{4\cdot\zeta^4}{\Omega^2\cdot m^4}\cdot I_2^{\,abab}(t) = t^2 - \frac{4m}{\zeta}t + \frac{10m^2}{3\zeta^2} +$$

$$+\left(\frac{2m}{\zeta}t - \frac{14m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \left(\frac{5m^2}{2\zeta^2} - \frac{m}{\zeta}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - \frac{4m^2}{3\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\hat{I}_2^{\,abab}(0) = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[\frac{10}{3} - \frac{14}{3} + \frac{5}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right] = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[\frac{1+15-16}{6}\right] = 0$$

אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$:

$$\hat{I}_2^{\,abab}(t) \approx t^2 - 4\tau_B\cdot t + \frac{10}{3}{\tau_B}^2$$



$$\boldsymbol{I_2^{\,abba}(t)} =$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{2m}{\zeta}t - \frac{37m^2}{6\zeta^2} + \left(\frac{8m}{\zeta}t + \frac{4m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \frac{6m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - \frac{4m^2}{3\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

הפונקציה המנורמלת :

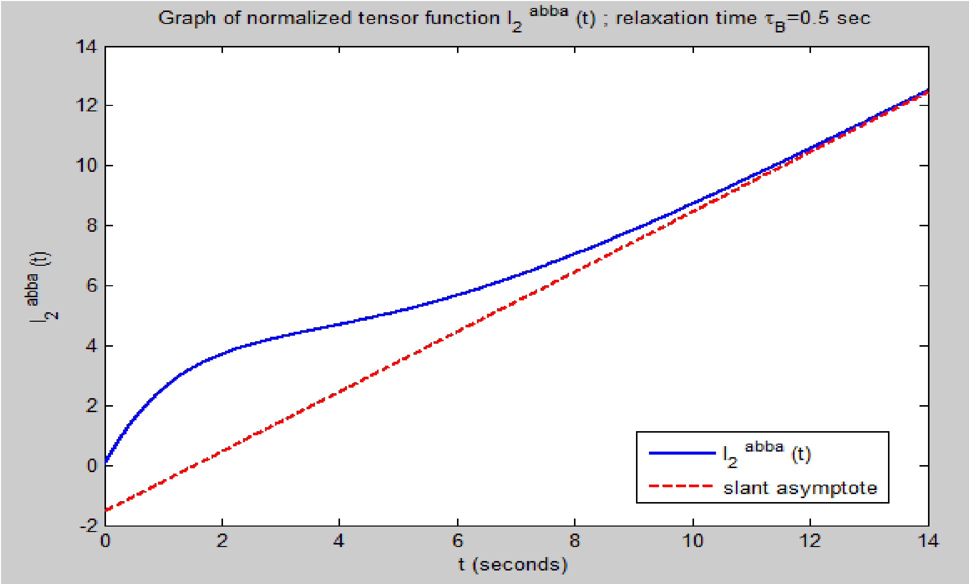
$$\hat{I}_2^{\,abba}(t) = \frac{4\cdot\zeta^4}{\Omega^2\cdot m^4}\cdot I_2^{\,abba}(t)$$

$$= \frac{2m}{\zeta}t - \frac{37m^2}{6\zeta^2} + \left(\frac{8m}{\zeta}t + \frac{4m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \frac{6m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - \frac{4m^2}{3\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\hat{I}_2^{\,abba}(0) = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[-\frac{37}{6} + \frac{4}{3} + 6 - \frac{4}{3} + \frac{1}{6}\right] = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot[-6+6] = 0$$

אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$:

$$\hat{I}_2^{\,abba}(t) \approx 2\tau_B\cdot t - \frac{37}{6}{\tau_B}^2$$



$$\boldsymbol{I_3}^{\boldsymbol{abab}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I_3}^{\boldsymbol{abba}}(\boldsymbol{t}) =$$

$$= \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[\frac{m}{2\zeta} + \left(\frac{5m}{3\zeta} - 2t\right) e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{3m}{\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{6\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t} \right]$$

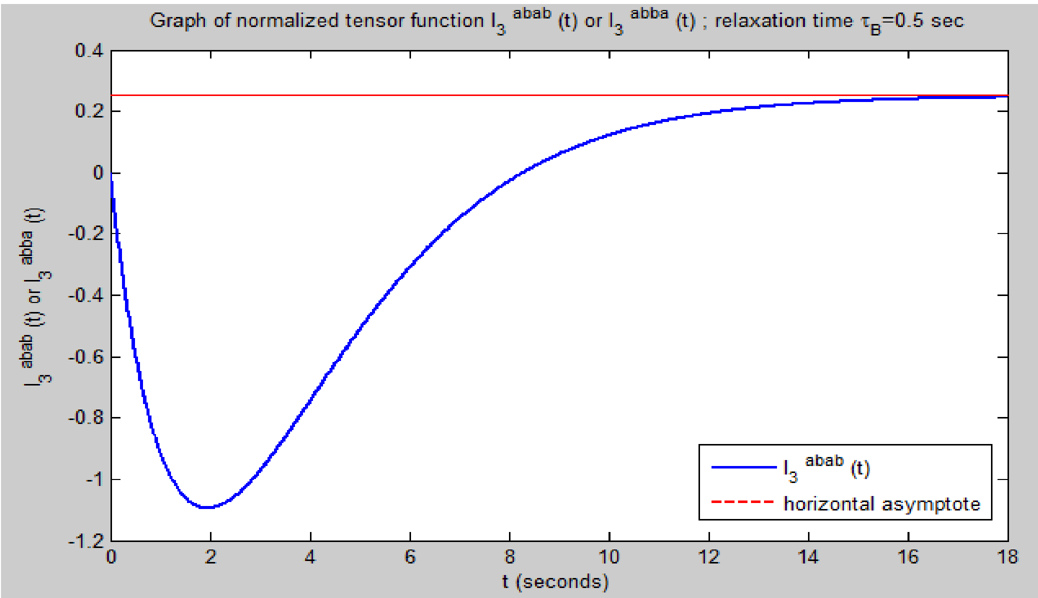
הפונקציה המנורמלת :

$$\hat{I}_3^{\ abab}(t) = \frac{4 \cdot \zeta^4}{\Omega^2 \cdot m^4} \cdot I_3^{\ abab}(t)$$

$$= \frac{m}{2\zeta} + \left(\frac{5m}{3\zeta} - 2t\right) e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{3m}{\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{6\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\hat{I}_3^{\ abab}(0) = \frac{m}{\zeta} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - 3 + 1 - \frac{1}{6}\right] = \frac{m}{\zeta} \cdot \left[\frac{3+10-1}{6} - 2\right] = 0$$

אחרי זמן רב $: t \gg \tau_B$ $\quad \hat{I}_3^{\ abab}(t) \approx \frac{1}{2}\tau_B$



$$\boldsymbol{I_4}^{\boldsymbol{abab}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[2t - \frac{4m}{\zeta} + \frac{5m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \left(2t - \frac{7m}{2\zeta}\right) e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

הפונקציה המנורמלת :

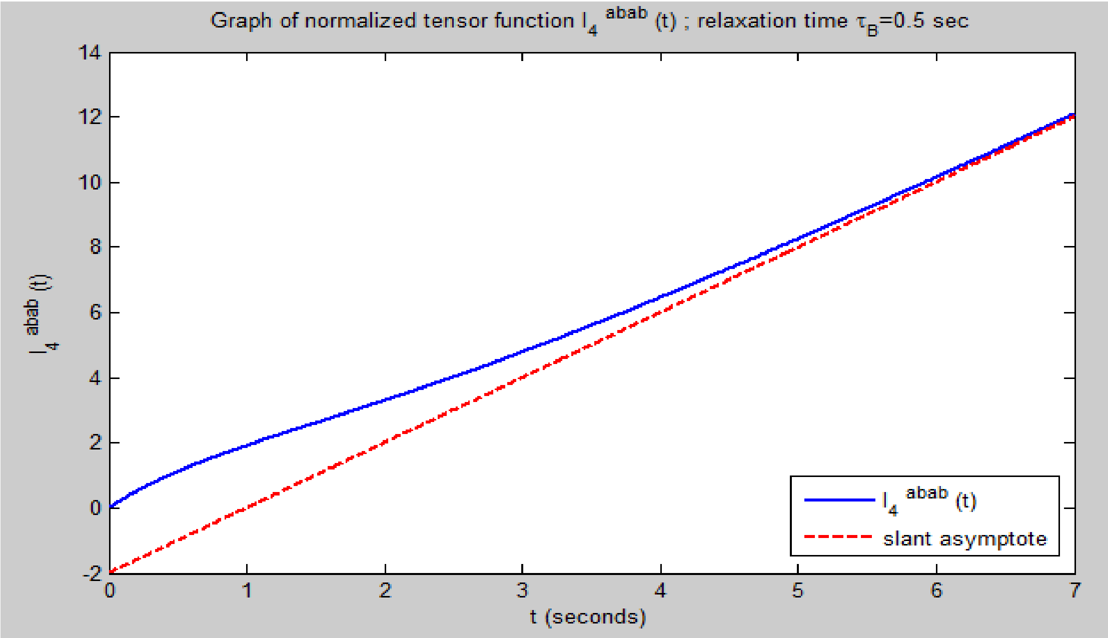
$$\hat{I}_4{}^{abab}(t) = \frac{4 \cdot \zeta^4}{\Omega^2 \cdot m^4} \cdot I_4{}^{abab}(t)$$

$$= 2t - \frac{4m}{\zeta} + \frac{5m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \left(2t - \frac{7m}{2\zeta}\right) e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\hat{I}_4{}^{abab}(0) = \frac{m}{\zeta} \cdot \left[0 - 4 + 5 - \frac{7}{2} + 3 - \frac{1}{2}\right] = \frac{m}{\zeta} \cdot [4 - 4] = 0$$

אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$:

$$\hat{I}_4{}^{abab}(t) \approx 2t - 4\tau_B$$



$$\boldsymbol{I_4}^{\boldsymbol{abba}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[\frac{3m}{2\zeta} + \left(\frac{5m}{\zeta} - 6t\right) e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{9m}{\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

הפונקציה המנורמלת :

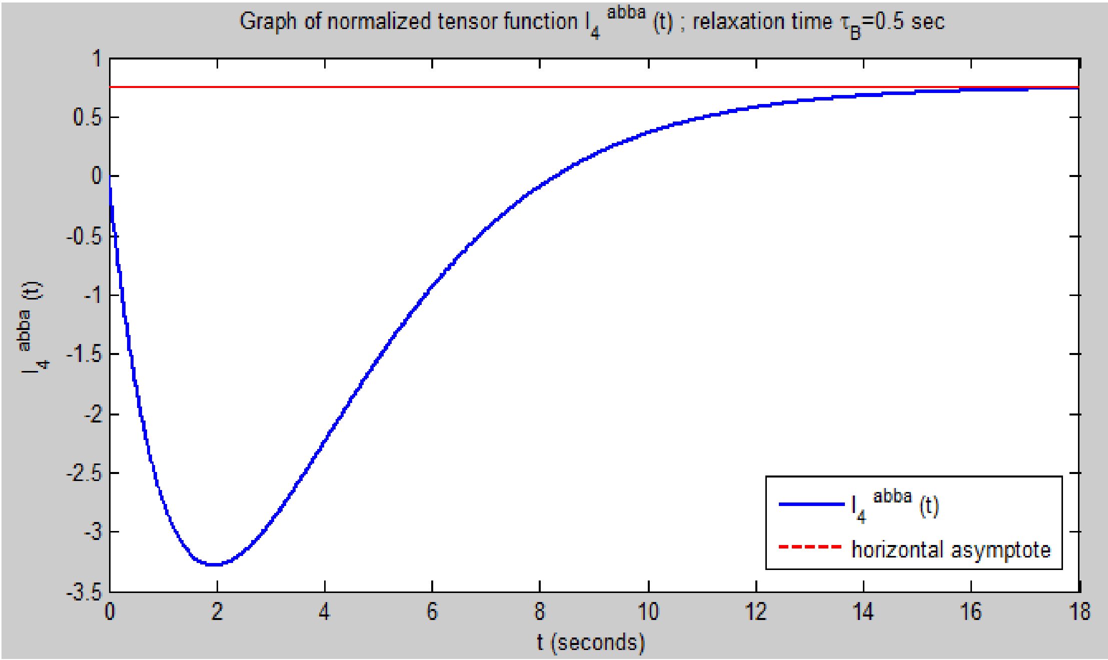
$$\hat{I}_4{}^{abba}(t) = \frac{4 \cdot \zeta^4}{\Omega^2 \cdot m^4} \cdot I_4{}^{abba}(t)$$

$$= \frac{3m}{2\zeta} + \left(\frac{5m}{\zeta} - 6t\right) e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{9m}{\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta} e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta} e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\hat{I}_4{}^{abba}(t) = \frac{m}{\zeta} \cdot \left[\frac{3}{2} + 5 - 9 + 3 - \frac{1}{2}\right] = \frac{m}{\zeta} \cdot [9 - 9] = 0$$

אחרי זמן רב $t \gg \tau_B$:

$$\hat{I}_4{}^{abba}(t) \approx \frac{3}{2}\tau_B$$



נציג סכום הפונקציות הקורלציה מסדר ראשון המנורמלות :

לגבי $\langle\, p^a(t)\cdot p^b(t)\,\rangle$:

$$h_1{}^{ab}(t) = 3m^2\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot[\,\langle\, q^a(t)\delta q^b(t)\,\rangle + \langle\, \delta q^a(t) q^b(t)\,\rangle\,]$$

$$= 3m^2\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot\left[-\frac{1}{3m^2}\cdot R^b{}_{ijk}\cdot\, I_1{}^{aijk}(t) - \frac{1}{3m^2}\cdot R^a{}_{ijk}\cdot\, I_1{}^{bijk}(t)\right]$$

$$= -R^b{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_1{}^{aijk}(t) - R^a{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_1{}^{bijk}(t)$$

לגבי $\langle\, x^a(t)\cdot x^b(t)\,\rangle$:

$$h_2{}^{ab}(t) = 3m^4\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot[\,\langle\, z^a(t)\delta z^b(t)\,\rangle + \langle\, \delta z^a(t) z^b(t)\,\rangle\,]$$

$$= 3m^4\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot\left[-\frac{1}{3m^4}\cdot R^b{}_{ijk}\cdot\, I_2{}^{aijk}(t) - \frac{1}{3m^4}\cdot R^a{}_{ijk}\cdot\, I_2{}^{bijk}(t)\right]$$

$$= -R^b{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_2{}^{aijk}(t) - R^a{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_2{}^{bijk}(t)$$

לגבי $\langle\, p^a(t)\cdot x^b(t)\,\rangle$:

$$h_3{}^{ab}(t) = 3m^3\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot[\,\langle\, q^a(t)\delta z^b(t)\,\rangle + \langle\, \delta q^a(t) z^b(t)\,\rangle\,]$$

$$= 3m^3\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot\left[-\frac{1}{3m^3}\cdot R^b{}_{ijk}\cdot\, I_3{}^{aijk}(t) - \frac{1}{3m^3}\cdot R^a{}_{ijk}\cdot\, I_4{}^{bijk}(t)\right]$$

$$= -\,R^b{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_3{}^{aijk}(t) - R^a{}_{ijk}\cdot\,\hat{I}_4{}^{bijk}(t)$$

לגבי MQM $\langle\, p^a(t)\cdot p_a(t)\,\rangle$:

$$h_4(t)=3m^2\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot[\,\langle\, q^a(t)\delta q_a(t)\,\rangle+\langle\,\delta q^a(t)q_a(t)\,\rangle\,]$$

$$=3m^2\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot\left[\,-\frac{1}{3m^2}\cdot R_{aijk}\cdot\ I_1{}^{aijk}(t)-\frac{1}{3m^2}\cdot R^a{}_{ijk}\cdot\ I_1{}_a{}^{ijk}(t)\,\right]$$

$$=-\,R_{aijk}\cdot\ \hat{I}_1{}^{aijk}(t)-R^a{}_{ijk}\cdot\ \hat{I}_1{}_a{}^{ijk}(t)$$

לגבי MSD $\langle\, x^a(t)\cdot x_a(t)\,\rangle$:

$$h_5(t)=3m^4\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot[\,\langle\, q^a(t)\delta q_a(t)\,\rangle+\langle\,\delta q^a(t)q_a(t)\,\rangle\,]$$

$$=3m^4\cdot\frac{4}{\Omega^2}\cdot\frac{\zeta^4}{m^4}\cdot\left[-\frac{1}{3m^4}\cdot R_{aijk}\cdot\ I_2{}^{aijk}(t)-\frac{1}{3m^4}\cdot R^a{}_{ijk}\cdot\ I_2{}_a{}^{ijk}(t)\right]$$

$$=-\,R_{aijk}\cdot\ \hat{I}_2{}^{aijk}(t)-R^a{}_{ijk}\cdot\ \hat{I}_2{}_a{}^{ijk}(t)$$

$h_1{}^{ab}(t)$ ו- $h_2{}^{ab}(t)$ שני טנסורים contravariant מסדר 2 סימטריים .

$h_3{}^{ab}(t)$ טנסור contravariant מסדר 2 .

$h_4(t)$ ו- $h_5(t)$ שני טנסורים מסדר אפס (סקלרים) .

נחקור את התנועה הבראונית של חלקיק מסוים במצב עקמומיות על ארבע יריעות :

(1) משטח כדורי דו-ממדי S^2 במרחב $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1}$

(2) משטח היפרבולואיד חד-יריעתי דו-ממדי H^2 במרחב $\boldsymbol{R}^3$: $\boldsymbol{x^2+y^2-z^2=1}$

(3) משטח כדורי 3-ממדי S^3 במרחב $\boldsymbol{R}^4$: $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+w^2=1}$

(4) משטח היפרבולואיד חד-יריעתי 3-ממדי H^3 במרחב $\boldsymbol{R}^4$: $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2-w^2=1}$

בחקירת התנועה הבראונית של החלקיק על יריעות בסביבה מקורבת למצב אוקלידי טנסור המטריקה של מיקום החלקיק על פי הפיתוח לטור טיילור הוא δ_{pq} .

חישוב טנסור העקומומיות של משטחים הנ"ל מופיע בנספח .

(1) משטח כדורי דו-ממדי $\boldsymbol{S^2=\{\,(\theta,\varphi)\mid 0\le\theta<2\pi\ \ 0\le\varphi\le\pi\,\}}$ **:**

טנסור המטריקה : $g_{pq}(\varphi)=\begin{pmatrix} sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad;\quad g_{pq}=\delta_{pq}$

ערכי קואורדינטות אפשריים : $0\le\theta<2\pi\ ,\ \varphi_0=\frac{\pi}{2}\,rad$

טנסור העקמומיות : $R^{\varphi}_{\theta\theta\varphi}(\varphi_0)=R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta}(\varphi_0)=-1\ ;\ R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta}(\varphi_0)=R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}(\varphi_0)=1$

(1) חישוב הטנסור $h_1{}^{pq}(t)$:

$$h_1{}^{\theta\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_1{}^{\theta fcd}(t) - R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_1{}^{\varphi fcd}(t) =$$

$$\hat{I}_1{}^{\theta\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_1{}^{\theta\theta\varphi\theta}(t) - \hat{I}_1{}^{\varphi\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_1{}^{\varphi\varphi\varphi\theta}(t) = 0-0-0+0 = 0 \;\; ; \;\; h_1{}^{\theta\varphi}(t) = 0$$

$$h_1{}^{\theta\theta}(t) = -2\cdot R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_1{}^{\theta fcd}(t) = 2\cdot \hat{I}_1{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_1{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) = 0$$

$$h_1{}^{\varphi\varphi}(t) = -2\cdot R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_1{}^{\varphi fcd}(t) = 2\cdot \hat{I}_1{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) - 2\cdot \hat{I}_1{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t) = 0$$

הטנסור $h_1{}^{pq}(t)$ הוא אפס לכל אינדקסים q ו- p .

(2) חישוב הטנסור $h_2{}^{pq}(t)$:

$$h_2{}^{\theta\varphi}(t) = \hat{I}_2{}^{\theta\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_2{}^{\theta\theta\varphi\theta}(t) - \hat{I}_2{}^{\varphi\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_2{}^{\varphi\varphi\varphi\theta}(t) = 0 \;\; ; \;\; h_2{}^{\varphi\theta}(t) = 0$$

$$h_2{}^{\theta\theta}(t) = -2\cdot R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_2{}^{\theta fcd}(t) = 2\cdot \hat{I}_2{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_2{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t)$$

$$h_2{}^{\varphi\varphi}(t) = -2\cdot R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_2{}^{\varphi fcd}(t) = 2\cdot \hat{I}_2{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) - 2\cdot \hat{I}_2{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t)$$

(3) חישוב הטנסור $h_3{}^{pq}(t)$:

$$h_3{}^{\theta\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_3{}^{\theta fcd}(t) - R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_4{}^{\varphi fcd}(t)$$

$$= \hat{I}_3{}^{\theta\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_3{}^{\theta\theta\varphi\theta}(t) - \hat{I}_4{}^{\varphi\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_4{}^{\varphi\varphi\varphi\theta}(t) = 0$$

$$h_3{}^{\varphi\theta}(t) = -R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_3{}^{\varphi fcd}(t) - R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_4{}^{\theta fcd}(t)$$

$$= -\hat{I}_3{}^{\varphi\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_3{}^{\varphi\varphi\varphi\theta}(t) + \hat{I}_4{}^{\theta\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_4{}^{\theta\theta\varphi\theta}(t) = 0$$

$$h_3{}^{\theta\theta}(t) = -R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_3{}^{\theta fcd}(t) - R^{\theta}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_4{}^{\theta fcd}(t)$$

$$= -\hat{I}_3{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_3{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) - \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t)$$

$$= \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) - \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t)$$

$$h_3{}^{\varphi\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_3{}^{\varphi fcd}(t) - R^{\varphi}{}_{fcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_4{}^{\varphi fcd}(t)$$

$$= \hat{I}_3{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_3{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t) + \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t)$$

$$= \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) - \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t)$$

(4) חישוב $\boldsymbol{MQM}$ ו- $\boldsymbol{MSD}$:

בסביבה המקורבת למצב שטוח מתקיים :

$$\hat{I}_{i\ a}^{\ \ bcd}(t) = g_{ar}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_i^{\ rbcd}(t) = g_{aa}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_i^{\ abcd}(t) = \hat{I}_i^{\ abcd}(t) \quad , \ i = 1,2$$

$$R_{abcd}(\varphi_0) = g_{af}(\varphi_0)\cdot R^f{}_{bcd}(\varphi_0) = g_{aa}(\varphi_0)\cdot R^a{}_{bcd}(\varphi_0) = R^a{}_{bcd}(\varphi_0)$$

כי טנסור המטריקה g_{pq} במצב זה הוא δ_{pq} .

$$h_4(t) = -R_{abcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_1^{\ abcd}(t) - R^a{}_{bcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_{1\ a}^{\ \ bcd}(t) = -2\cdot R^a{}_{bcd}(\varphi_0)\cdot \hat{I}_{1\ a}^{\ \ bcd}(t)$$

$$= -2\cdot \hat{I}_1^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t) + 2\cdot \hat{I}_1^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_1^{\ \varphi\theta\varphi\theta}(t) + 2\cdot \hat{I}_1^{\ \varphi\theta\theta\varphi}(t)$$

$$= h_1^{\ \theta\theta}(t) + h_1^{\ \varphi\varphi}(t) = 0$$

$$h_5(t) = -2\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t) + 2\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_2^{\ \varphi\theta\varphi\theta}(t) + 2\cdot \hat{I}_2^{\ \varphi\theta\theta\varphi}(t)$$

$$= h_2^{\ \theta\theta}(t) + h_2^{\ \varphi\varphi}(t) = tr\{\, h_2^{\ pq}(t)\,\} = 4\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t) - 4\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t)$$

(2) **משטח היפרבולויד חד-יריעתי דו-ממדי** $\boldsymbol{H^2 = \{\,(\theta,\varphi)\mid \theta\in R\,, 0\le \varphi < 2\pi\,\}}$ **:**

טנסור המטריקה : $g_{pq} = \delta_{pq} \ \ ; \ \ g_{pq}(\theta) = \begin{pmatrix} cosh(2\theta) & 0 \\ 0 & cosh^2(\theta) \end{pmatrix}$

ערכי קואורדינטות אפשריים : $\theta_0 = 0 \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$

טנסור העקמומיות : $R^{\theta}_{\ \varphi\theta\varphi}(\theta_0) = R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\theta}(\theta_0) = -1 \ \ ; \ \ R^{\theta}_{\ \varphi\varphi\theta}(\theta_0) = R^{\varphi}_{\ \theta\theta\varphi}(\theta_0) = 1$

כל החישובים הם כמו במקרה כדור דו-ממדי , ההבדל הוא בהחלפת סימני טנסור העקמומיות .

$h_1^{\ pq}(t) = 0$ לכל אינדקסים q ו- p

$$h_2^{\ ab}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t) - 2\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t) & 0 \\ 0 & 2\cdot \hat{I}_2^{\ \varphi\theta\varphi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_2^{\ \varphi\theta\theta\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$h_3^{\ ab}(t) = \begin{pmatrix} \hat{I}_4^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t) - \hat{I}_4^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t) & 0 \\ 0 & \hat{I}_4^{\ \varphi\theta\varphi\theta}(t) - \hat{I}_4^{\ \varphi\theta\theta\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{MQM} \ : \ \ h_4(t) = tr\left\{\, h_1^{\ ab}(t)\,\right\} = 0$$

$$\boldsymbol{MSD} : \ \ h_5(t) = tr\left\{\, h_2^{\ ab}(t)\,\right\} = 4\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\theta\varphi}(t) - 4\cdot \hat{I}_2^{\ \theta\varphi\varphi\theta}(t)$$

(3) **משטח כדורי 3-ממדי** $\boldsymbol{S^3 = \{ (\chi,\theta,\varphi) \mid 0 \le \chi \le \pi \ , \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le \varphi < 2\pi \}}$ **:**

טנסור המטריקה : $g_{pq} = \delta_{pq} \quad ; \quad g_{pq}(\chi,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & sin^2(\chi)\, sin^2(\theta) \end{pmatrix}$

ערכי קואורדינטות אפשריים : $\chi_0 = \frac{\pi}{2}\ rad \quad , \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}\ rad \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$

טנסור העקמומיות :

$$R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta}(\chi_0,\theta_0) = R^{\chi}{}_{\varphi\chi\varphi}(\chi_0,\theta_0) = 1 \quad ; \quad R^{\chi}{}_{\theta\theta\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\chi}{}_{\varphi\varphi\chi}(\chi_0,\theta_0) = -1$$
$$R^{\theta}{}_{\chi\theta\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}(\chi_0,\theta_0) = 1 \quad ; \quad R^{\theta}{}_{\chi\chi\theta}(\chi_0,\theta_0) = R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta}(\chi_0,\theta_0) = -1$$
$$R^{\varphi}{}_{\chi\varphi\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta}(\chi_0,\theta_0) = 1 \quad ; \quad R^{\varphi}{}_{\chi\chi\varphi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi}(\chi_0,\theta_0) = -1$$

(1) חישוב הטנסורים $h_1{}^{pq}(t)$ ו- $h_2{}^{pq}(t)$:

$$i = 1,2 \quad ; \quad h_i{}^{\chi\theta}(t) = -R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\chi fcd}(t) - R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\theta fcd}(t) = 0$$
$$h_i{}^{\chi\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\chi fcd}(t) - R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi fcd}(t) = 0$$
$$h_i{}^{\theta\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\theta fcd}(t) - R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi fcd}(t) = 0$$
$$h_i{}^{\theta\chi}(t) = h_i{}^{\varphi\chi}(t) = h_i{}^{\varphi\theta}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} h_i{}^{\chi\chi}(t) &= -2\cdot R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\chi fcd}(t) \\ &= -2\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - 2\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\varphi\chi\varphi}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\varphi\varphi\chi}(t) \\ &= 4\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - 4\cdot \hat{I}_i{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i{}^{\theta\theta}(t) &= -2\cdot R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\theta fcd}(t) \\ &= -2\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) \\ &= 4\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) - 4\cdot \hat{I}_i{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_i{}^{\varphi\varphi}(t) &= -2\cdot R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0)\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi fcd}(t) = \\ &= -2\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) - 2\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t) + 2\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) \\ &= 4\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) - 4\cdot \hat{I}_i{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) \end{aligned}$$

מסקנה : $h_1{}^{pq}(t) = 0$ לכל שני אינדקסים q ו- p

$$h_2{}^{\theta\chi}(t) = h_2{}^{\varphi\chi}(t) = h_2{}^{\varphi\theta}(t) = 0$$

$$h_2{}^{\chi\chi}(t) = h_2{}^{\theta\theta}(t) = h_2{}^{\varphi\varphi}(t) = 4 \cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - 4 \cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\chi\theta}(t)$$

(2) חישוב הטנסור $h_3{}^{pq}(t)$:

$$h_3{}^{\chi\theta}(t) = -R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\chi fcd}(t) - \tau_B \cdot R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\theta fcd}(t) = 0$$
$$h_3{}^{\chi\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\chi fcd}(t) - \tau_B \cdot R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\varphi fcd}(t) = 0$$
$$h_3{}^{\theta\varphi}(t) = -R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\theta fcd}(t) - \tau_B \cdot R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\varphi fcd}(t) = 0$$
$$h_3{}^{\theta\chi}(t) = h_3{}^{\varphi\chi}(t) = h_3{}^{\varphi\theta}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} h_3{}^{\chi\chi}(t) &= -R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\chi fcd}(t) - R^{\chi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\chi fcd}(t) \\ &= -\hat{I}_3{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) + \hat{I}_3{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - \hat{I}_3{}^{\chi\varphi\chi\varphi}(t) + \hat{I}_3{}^{\chi\varphi\varphi\chi}(t) + \\ &\quad -\hat{I}_4{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) + \hat{I}_4{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - \hat{I}_4{}^{\chi\varphi\chi\varphi}(t) + \hat{I}_4{}^{\chi\varphi\varphi\chi}(t) \\ &= 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3{}^{\theta\theta}(t) &= -R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\theta fcd}(t) - \tau_B \cdot R^{\theta}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\theta fcd}(t) = \\ &= -\hat{I}_3{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) + \hat{I}_3{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) - \hat{I}_3{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_3{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) + \\ &\quad -\hat{I}_4{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) + \hat{I}_4{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) - \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\theta\varphi}(t) + \hat{I}_4{}^{\theta\varphi\varphi\theta}(t) \\ &= 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) - 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3{}^{\varphi\varphi}(t) &= -R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_3{}^{\varphi fcd}(t) - \tau_B \cdot R^{\varphi}{}_{fcd}(\chi_0,\theta_0) \cdot \hat{I}_4{}^{\varphi fcd}(t) = \\ &= -\hat{I}_3{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) + \hat{I}_3{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) - \hat{I}_3{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t) + \hat{I}_3{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) + \\ &\quad -\hat{I}_4{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) + \hat{I}_4{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) - \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\varphi\theta}(t) + \hat{I}_4{}^{\varphi\theta\theta\varphi}(t) \\ &= 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) - 2 \cdot \hat{I}_4{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) \end{aligned}$$

מסקנה : $h_3{}^{\chi\chi}(t) = h_3{}^{\theta\theta}(t) = h_3{}^{\varphi\varphi}(t)$

$$\boldsymbol{MQM} \;:\; h_4(t) = -2 \cdot R^{a}{}_{bcd}(\varphi_0) \cdot \hat{I}_1{}_{a}{}^{bcd}(t) = h_1{}^{\chi\chi}(t) + h_1{}^{\theta\theta}(t) + h_1{}^{\varphi\varphi}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{MSD} \;:\; h_5(t) &= -2 \cdot R^{a}{}_{bcd}(\varphi_0) \cdot \hat{I}_2{}_{a}{}^{bcd}(t) = h_2{}^{\chi\chi}(t) + h_2{}^{\theta\theta}(t) + h_2{}^{\varphi\varphi}(t) \\ &= 12 \cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) - 12 \cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) \end{aligned}$$

(4) **משטח היפרבולויד חד-יריעתי 3-ממדי H^3 ,**

$$\boldsymbol{H^3 = \{ \,(\chi, \theta, \varphi)\mid \chi \in R \;,\; 0 \le \theta \le \pi \;,\; 0 \le \varphi < 2\pi \}} \quad :$$

טנסור המטריקה :
$$g_{pq} = \begin{pmatrix} cosh(2\chi) & 0 & 0 \\ 0 & cosh^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & cosh^2(\chi)\, sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$g_{pq} = \delta_{pq}$ ערכי קואורדינטות אפשריים : $0 \le \varphi < 2\pi \;,\; \theta_0 = \frac{\pi}{2}\, rad \;,\; \chi_0 = 0$

טנסור העקמומיות :

$$R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta}(\chi_0,\theta_0) = R^{\chi}{}_{\varphi\chi\varphi}(\chi_0,\theta_0) = -1 \;\;;\;\; R^{\chi}{}_{\theta\theta\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\chi}{}_{\varphi\varphi\chi}(\chi_0,\theta_0) = 1$$
$$R^{\theta}{}_{\chi\theta\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}(\chi_0,\theta_0) = -1 \;\;;\;\; R^{\theta}{}_{\chi\chi\theta}(\chi_0,\theta_0) = R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta}(\chi_0,\theta_0) = 1$$
$$R^{\varphi}{}_{\chi\varphi\chi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta}(\chi_0,\theta_0) = -1 \;\;;\;\; R^{\varphi}{}_{\chi\chi\varphi}(\chi_0,\theta_0) = R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi}(\chi_0,\theta_0) = 1$$

כל החישובים הם כמו במקרה כדור 3-ממדי , ההבדל הוא בהחלפת סימני טנסור העקמומיות .

$h_1{}^{pq}(t) = 0$ לכל אינדקסים q ו- p

$$h_2{}^{ab}(t) =$$
$$\begin{pmatrix} 4\cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) - 4\cdot \hat{I}_2{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 4\cdot \hat{I}_2{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) - 4\cdot \hat{I}_2{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot \hat{I}_2{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) - 4\cdot \hat{I}_2{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$h_3{}^{ab}(t) =$$
$$\begin{pmatrix} 2\cdot \hat{I}_4{}^{\chi\theta\chi\theta}(t) - 2\cdot \hat{I}_4{}^{\chi\theta\theta\chi}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot \hat{I}_4{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) - 2\cdot \hat{I}_4{}^{\theta\chi\chi\theta}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot \hat{I}_4{}^{\varphi\chi\varphi\chi}(t) - 2\cdot \hat{I}_4{}^{\varphi\chi\chi\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{MQM} \;:\; h_4(t) = tr\{\, h_1{}^{ab}(t) \,\} = 0$$
$$\boldsymbol{MSD} \;:\; h_5(t) = tr\{\, h_2{}^{ab}(t) \,\} = 12\cdot I_2{}^{\theta\chi\theta\chi}(t) - 12\cdot I_2{}^{\theta\chi\chi\theta}(t)$$

ניתוח התוצאות :

(1) התנהגות התנועה הבראונית בסביבה מקורבת למשטח שטוח על יריעה כדורית דו-ממדית דומה על יריעה כדורית 3-ממדית וגם התנהגות התנועה הבראונית בסביבה מקורבת למשטח שטוח על משטח היפרבולויד חד-יריעתי דו-ממדים דומה על משטח היפרבולויד חד-יריעתי 3-ממדים .

(2) פונקציות הקורלציות הטנסוריות של התנע והמיקום מקיימות : $h_i^{pq}(t) = 0 \quad i = 1,2,3$ עבור $p \neq q$, זאת אומרת אין השפעה של כיוון אחד על כיוון שני אחר במרחב .

(3) פונקציות הקורלציה של התנע והמיקום בכיוון יחיד : $h_3^{pp}(t)$, $h_2^{pp}(t)$, $h_1^{pp}(t)$. גם $\boldsymbol{MQM}$: $h_4(t)$ וגם $\boldsymbol{MSD}$: $h_5(t)$ תלויות בהפרש שתי הפונקציות הטנסוריות $\hat{I}_i{}^{abab}(t)$ ו- $\hat{I}_i{}^{abba}(t)$ עד כדי כפל בקבוע בגלל מקדמי טנסור העקמומיות של המשטחים הנדונים בסביבה מקורבת למצב שטוח הם $\mathbf{1}$ או $\mathbf{1}$– .

(4)לחקירת התנועה הבראונית על משטח כדורי מספיק לחקור את ההפרש :

$$i = 1,2,3,4 \quad ; \quad \hat{I}_i{}^{abba}(t) - \hat{I}_i{}^{abab}(t)$$

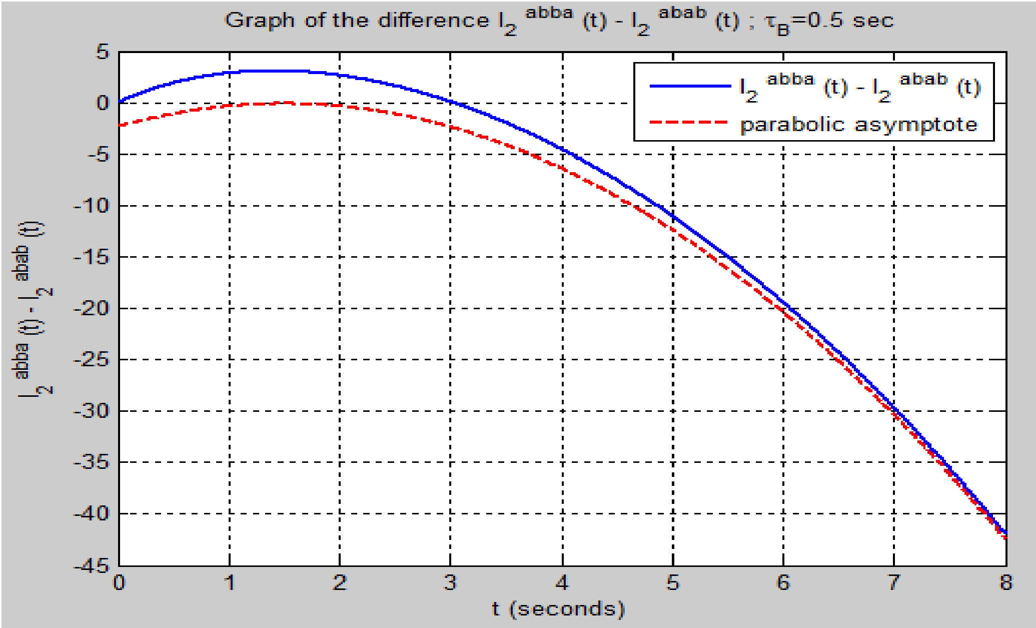
לחקירת התנועה הבראונית על משטח היפרבולויד חד-יריעתי מספיק לחקור את ההפרש :

$$i = 1,2,3,4 \quad ; \quad \hat{I}_i{}^{abab}(t) - \hat{I}_i{}^{abba}(t)$$

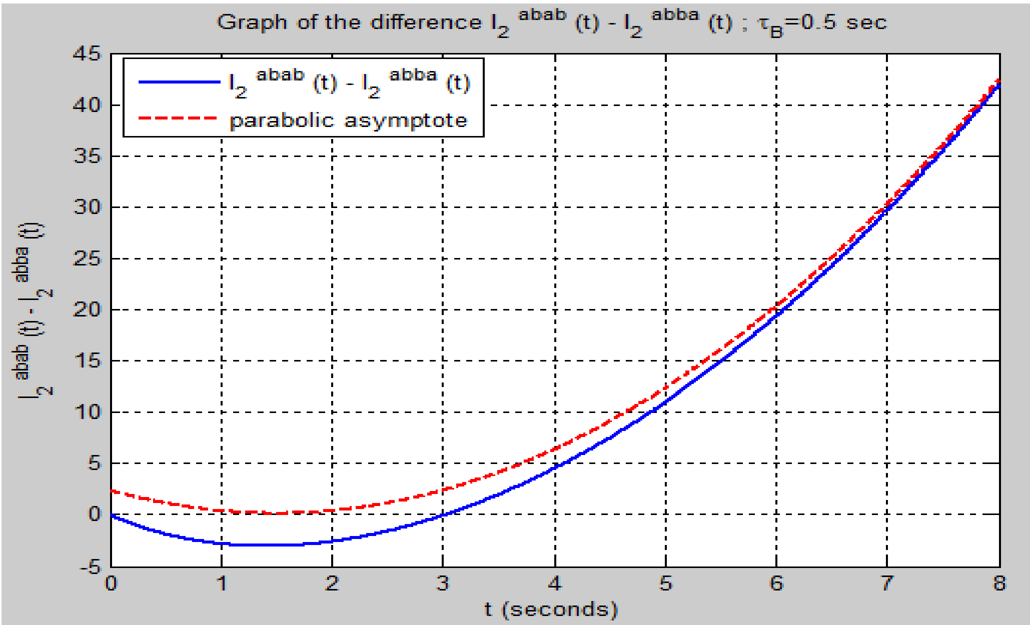
החקירה :

$h_1^{pp}(t)$ המחובר המנורמל התורם לפונקציית הקורלציה בכיוון יחיד של התנע ו- $h_4(t)$ המחובר המנורמל התורם ל- $\boldsymbol{MQM}$ הנובעים מהעקמומיות של המשטחים שווים לאפס כי $\hat{I}_1{}^{abba}(t) = \hat{I}_1{}^{abab}(t)$. התוצאה מסמלת כי כוח אילוץ המשטח אינו משפיע על גודל ויקטור המהירות של החלקיקים אלא רק על כיוונו (כיוון התנועה) .

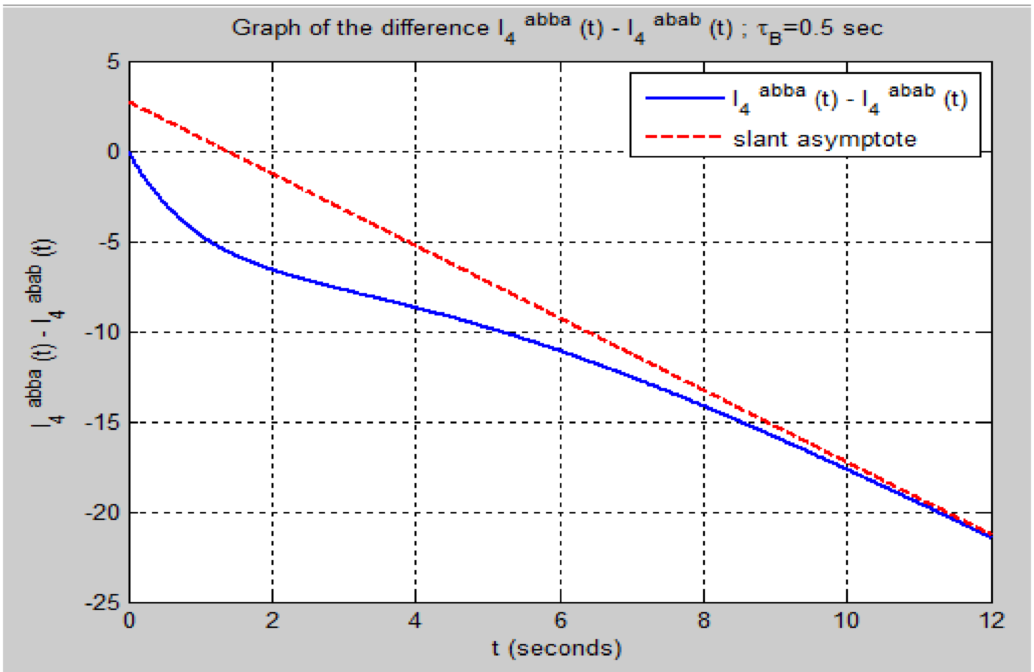
לחקירת $h_2^{pp}(t)$ המחובר המנורמל התורם לפונקציית הקורלציה בכיוון יחיד של המיקום ו- $h_5(t)$ המחובר המנורמל התורם ל- $\boldsymbol{MSD}$ הנובעים מהעקמומיות של המשטח הכדורי נחקור את ההפרש $\hat{I}_2{}^{abba}(t) - \hat{I}_2{}^{abab}(t)$, לפי הגרף (נמצא בדף הבא) פונקציית ההפרש מתחילה בעליה מ- $t = 0$ עד $t = 1.5\ sec$ בקרוב טוב , ולאחר מכן מתחילה לרדת ממש עם שנוי סימן ב $t = 3\ sec$ וקצב הירידה עולה לאורך הזמן והופכת אסימפטומטית לפרבולה . המשמעות הפיסיקאלית של הגרף היא עד נקודת הזמן $t = 1.5\ sec$ הכוח הבולט הפועל על החלקיק הוא כוח אילוץ המשטח המאלץ את החלקיק לנוע על המסלול הגאודזי לפי עקרון הפעולה המינימלית אך עכב נוכחות הכוח האקראי וכוח חיכוך התווך היותר חזקים החלקיק יתחיל לסטות מהמסלולים הגאודזיים .
נזכיר כי במצב שטוח לאחר תקופת זמן ה- $\boldsymbol{MSD}$: $\langle\, x^a(t) x_a(t) \,\rangle$ הוא אסימפטוטית קו ישר אך עכב עקמומיות המשטח יהיה אסימפטוטית פרבולה באופן כללי .



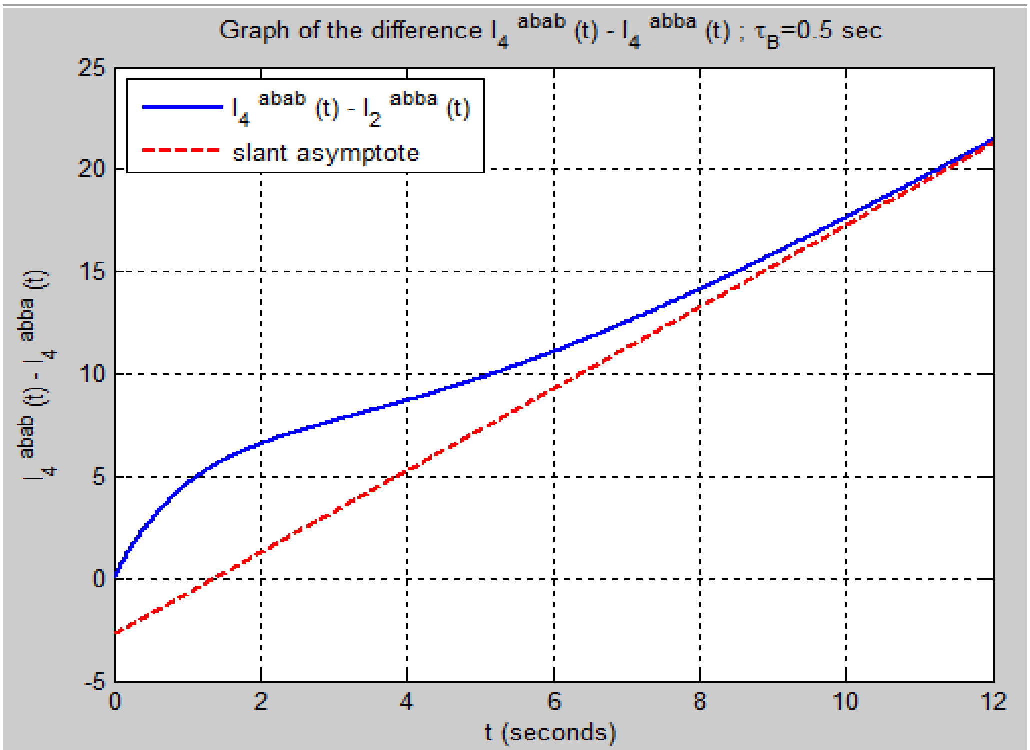
לגבי התנועה על משטח היפרבולויד חד-יריעתי התוצאות הן הפיכות כי כיווני הכוחות הפוכים.



לגבי $h_3{}^{pp}(t)$ המחובר המנורמל התורם לפונקציית הקורלציה בין התנע למיקום הנובעים מהעקמומיות של היריעה הכדורית נחקור את ההפרש $\hat{I}_4{}^{abab}(t) - \hat{I}_4{}^{abba}(t)$ (נזכיר כי $\hat{I}_3{}^{abab}(t) = \hat{I}_3{}^{abba}(t)$).



לגבי משטח היפרבולויד חד-יריעתי :



נספח :

(1) שימוש בטענת עזר למציאת צורת פונקציית צפיפות ההסתברות של איברי מטריצה אקראית .

טענת העזר : יהיו $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ שלוש פונקציות גזירות ברציפות , אם שלושתן מקיימות את המשוואה $f_1(x\cdot y)=f_2(x)+f_3(y)$ אז הן מהצורה :

$$f_1(x)=a\cdot ln(|x|)+b_1\ \ ;\ \ f_2(x)=a\cdot ln(|x|)+b_2\ \ ;\ \ f_3(x)=a\cdot ln(|x|)+b_3$$

כאשר : a,b_1,b_2,b_3 מספרים ממשיים קבועים כך ש- $b_1=b_2+b_3$.

הוכחה : נגזור את המשוואה $f_1(x\cdot y)=f_2(x)+f_3(y)$ **לפי** x $\Leftarrow$ $y\cdot {f_1}'(x\cdot y)={f_2}'(x)$

נחלק ב- y ; $y\neq 0$ $\Leftarrow$ ${f_1}'(x\cdot y)={f_2}'(x)\cdot\frac{1}{y}$, נבצע אינטגרציה לפי y $\Leftarrow$

$\frac{1}{x}\cdot f_1(x\cdot y)={f_2}'(x)\cdot ln(|y|)+\frac{1}{x}\cdot g(x)$; $x\neq 0$ נכפול ב- x $\Leftarrow$

$$f_1(x\cdot y)=x\cdot {f_2}'(x)\cdot ln(|y|)+g(x)\ \Longrightarrow\ f_2(x)+f_3(y)=x\cdot {f_2}'(x)\cdot ln(|y|)+g(x)$$

$$\Longrightarrow\ f_3(y)=x\cdot {f_2}'(x)\cdot ln(|y|)+f_2(x)-g(x)$$

אגף שמאלי של המשוואה האחרונה בלתי תלוי ב- x , לכן בהכרח הפונקציות $x\cdot {f_2}'(x)$ ו- $f_2(x)-g(x)$ הן פונקציות קבועות $\Leftarrow$ $f_2(x)-g(x)=b_3$; $x\cdot {f_2}'(x)=a$

$$\Longrightarrow\ \boxed{f_3(x)=a\cdot ln(|x|)+b_3}$$

$$x\cdot {f_2}'(x)=a\ \Longrightarrow\ {f_2}'(x)=a\cdot\frac{1}{x}\ \Longrightarrow\ \boxed{f_2(x)=a\cdot ln(|x|)+b_2}$$

$$f_1(x\cdot y)=f_2(x)+f_3(y)=a\cdot ln(|x|)+b_2+a\cdot ln(|y|)+b_3=a\cdot ln(|x\cdot y|)+b_1$$

$$\boxed{f_1(x)=a\cdot ln(|x|)+b_1}$$

(2) אלגוריתם בתוכנות MATLAB לבניית גרף דו-ממדי של מעריך ליאפונוב כפונקציה לסטיית התקן ולרמת אנרגיה וגם גרפים חד-ממדים כפונקציה לסטיית התקן של פוטנציאל סטטי בהינתן רמת אנרגיה מסוימת בחקירת מערכות חד-ממדיות במודל הלוקליזציה של אנדרסון .

```
 % Anderson localization in one dimension
% calculation and drawing graphs of upper Lyapunov exponent
% sigma : vector of Standard deviations of zero mean gaussian random
static potential
% E : vector of Energy levels (eigenvalues of schrodinger's equation)
function Upper_Lyapunov_exp = Anderson_Localization_D1(E,sigma)

theta=linspace(0,pi,1000);

j=1;
while (j<=length(E))
i=1;
while (i<=length(sigma))
Gauss=@(u)inv(sqrt(2*pi)*sigma(i))*exp(-0.5*((u+E(j))/sigma(i)).^2)...
          .*log(sqrt((cos(theta)*u).^2+u*sin(2*theta)+1));

Expectation_U1=integral(Gauss,-Inf,Inf,'ArrayValued',true);

Lambda1(i)=max(Expectation_U1);

Upper_Lyapunov_exp(i,j)=round(Lambda1(i)*1.e4)/1.e4;
i=i+1;
end
figure(j)
plot(sigma,Lambda1,'*')
axis([0 max(sigma)+0.5 0 max(Lambda1)+0.5])
xlabel('\sigma')
ylabel('\lambda_1')
title(['upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean
gaussian random static potential at energy level E = ',num2str(E(j))])
j=j+1;
end
[X,Y]=meshgrid(E,sigma);
surf(X,Y,Upper_Lyapunov_exp)
xlabel('E - energy')
ylabel('\sigma - standard deviation')
zlabel('\lambda_1 - upper Lyapunov exponent')
title(['upper Lyapunov exponent vs. standard deviation of zero mean
gaussian random static potential & energy level E'])
```

(3) אלגוריתם בתוכנות MATLAB לבניית גרפים של פונקציות הקורלציה בגיאומטריה אוקלידית בחקירת תנועה בראונית .

```
% Euclidean geometry
% drawing graphs of normalized correlation functions  ; same coordinates
% tau_B : the relaxation time
% t : vector dividing timeline from the begining to a final second tf
% n : number of points in timeline
% E_PP : Normalized Mean Quadratic Momentum
% S2 : Normalized Mean Square Displacement
% E_PX : Normalized correlation function between momenta and position
function Eucgeo_corrfun(tau_B,tf,n)

t=linspace(0,tf,n);
E_PP=1-exp(-2*t/tau_B);
S2=t/tau_B+2*exp(-t/tau_B)-0.5*exp(-2*t/tau_B)-1.5;
E_PX=1-2*exp(-t/tau_B)+exp(-2*t/tau_B);

figure(1)
plot(t,E_PP,'linewidth',2)
axis([0 tf min(E_PP) max(E_PP)+0.05])
xlabel('t (seconds)')
ylabel('<p^a(t)p_a(t)>');
title(['Normalized Mean Quadratic Momentum in Euclidean geometry ;
relaxation time \tau_B=',num2str(tau_B),' sec'])
hold on
plot(t,1,'--r')
hold off

figure(2)
plot(t,S2,'linewidth',2)
axis([0 tf min(S2) max(S2)+0.05])
xlabel('t (seconds)')
ylabel('<x^a(t)x_a(t)>')
title(['Normalized Mean Square Displacement in Euclidean geometry ;
relaxation time \tau_B=',num2str(tau_B),' sec'])
hold on
plot(t,t/tau_B-1.5,'--r')
hold off

figure(3)
plot(t,E_PX,'linewidth',2)
axis([0 tf min(E_PX) max(E_PX)+0.05])
xlabel('t (seconds)')
ylabel('<p^a(t)x^a(t)>')
title(['Correlation function between momenta and displacement in Euclidean
geometry ; relaxation time \tau_B=',num2str(tau_B),' sec'])
hold on
plot(t,1,'--r')
hold off
```

(4) חישוב מפורש של הפונקציות $I_n{}^{abba}(t)$, $I_n{}^{abab}(t)$; $n = 1,2,3,4$ בחקירת תנועה בראונית משטחים עקומים . (n הוא אינדקס ספירה ולא אינדקס של טנסור)

חישוב $I_1{}^{abab}(t)$:

$$I_1{}^{abab}(t) = \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(t)q^b(u)q^a(v)q^b(u) \,\rangle\, dudv =$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m}|t-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\right]\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|u-u|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(u+u)}\right] dudv$$

תחום האינטגרציה הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים : $\{\, (u,v) \mid 0 \le u \le t \quad 0 \le v \le u \,\}$
בתחום זה מתקיים : $0 \le v \le t$.

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(u-t)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m}(t-v)} - e^{-\frac{\zeta}{m}(t+v)}\right]\left[1 - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot 2u}\right] dudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 e^{-2\frac{\zeta}{m}t} \cdot \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} \left[e^{\frac{\zeta}{m}u} - e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right]\left[e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right] dudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 e^{-2\frac{\zeta}{m}t} \cdot \int_{u=0}^{t}\left(e^{\frac{\zeta}{m}u} - e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)\left[\int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv\right] du$$

$$\int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv = \frac{m}{\zeta}\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} + e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)\Big|_{v=0}^{u} = \frac{m}{\zeta}\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}u} + e^{-\frac{\zeta}{m}u} - 2\right)$$

$$I_1{}^{abab}(t) = \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \frac{m}{\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} \int_{u=0}^{t}\left(e^{2\frac{\zeta}{m}u} - e^{-2\frac{\zeta}{m}u} - 2e^{\frac{\zeta}{m}u} + 2e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)du$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \frac{m^2}{\zeta^2} e^{-2\frac{\zeta}{m}t} \left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\zeta}{m}u} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{\zeta}{m}u} - 2e^{\frac{\zeta}{m}u} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)\Big|_{u=0}^{t}$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\left(\frac{m}{\zeta}\right)^4 e^{-2\frac{\zeta}{m}t} \left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 3\right)$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{1}{2} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 3e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{1}{2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

חישוב $I_1{}^{abba}(t)$:

$$I_1{}^{abba}(t) = \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(t)q^b(u)q^b(v)q^a(u) \,\rangle\, dudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(u-t)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m}|t-u|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(t+u)}\right]\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|u-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(u+v)}\right] dudv$$

לפי תחום האינטגרציה : $e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-u|} = e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \quad ; \quad e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|u-v|} = e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)}$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)}\left[e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+u)}\right]\left[e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)} - e^{-\frac{\zeta}{m}(u+v)}\right]dudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\cdot\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left[e^{\frac{\zeta}{m}u} - e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right]\left[e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right]dudv$$

$$I_1{}^{abba}(t) = \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{1}{2} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} + 3e^{-2\frac{\zeta}{m}t} - 2e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{1}{2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

מסקנה : $I_1{}^{abba}(t) = I_1{}^{abab}(t)$

חישוב $I_2{}^{abab}(t)$:

$$I_2{}^{abab}(t) = \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(v-u)}\langle\, q^a(s)q^b(v)q^a(w)q^b(v)\,\rangle\, dsdudvdw$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|s-w|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(s+w)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|v-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(v+v)}\right] dsdudvdw$$

תחום האינטגרציה ה-4 ממדי הוא :

$$\{\,(s,u,v,w)\mid 0\le s\le t\ ,\ 0\le u\le t\ ,\ 0\le v\le u\ ,\ 0\le w\le v\}$$

אם נסתכל על תת-תחום דו-ממדי $\{\,(s,u,v,w)\mid 0\le s\le t\ ,0\le w\le v\}$ בהנחה : u ו- v קבועים ו- $v\le u\le t$, התחום הוא בפשוט ביחס לציר s , נוכל לפרק את התחום לשני חלקים :

$$\{\,(s,u,v,w)\mid 0\le s\le w\ ,0\le w\le v\}\cup\{\,(s,u,v,w)\mid w< s\le t\ ,0\le w\le v\}$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\left(1-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}\right)\left\{\int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|s-w|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(s+w)}\right]dsdw\right\}dudv$$

נחשב את האינטגרל : $I(t,v) = \int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|s-w|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(s+w)}\right]dsdw =$

$$= \int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}|s-w|}\,dsdw - \int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}(s+w)}\,dsdw$$

$$\int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}(s+w)}\,dsdw = \int_{s=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}s}\,ds\cdot\int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}w}\,dw =$$

$$= \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right) = \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[1-e^{-\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}t} + e^{-\frac{\zeta}{m}(v+t)}\right]$$

$$\int_{s=0}^{t}\int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}|s-w|}\,dsdw = \int_{w=0}^{v}\left(\int_{s=0}^{w} e^{\frac{\zeta}{m}(s-w)}\,ds + \int_{s=w}^{t} e^{\frac{\zeta}{m}(w-s)}\,ds\right)dw =$$

$$= \frac{m}{\zeta}\int_{w=0}^{v}\left(e^{\frac{\zeta}{m}(s-w)}\Big|_{s=0}^{w} - e^{\frac{\zeta}{m}(w-s)}\Big|_{s=w}^{t}\right)dw = \frac{m}{\zeta}\int_{w=0}^{v}\left(2 - e^{-\frac{\zeta}{m}w} - e^{\frac{\zeta}{m}(w-t)}\right)dw$$

$$= \frac{2m}{\zeta}v + \frac{m^2}{\zeta^2}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}w} - e^{\frac{\zeta}{m}(w-t)}\right)\Big|_{w=0}^{v} = \frac{2m}{\zeta}v + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}v} - 1 - e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)} + e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

$$I(t,v) = \frac{2m}{\zeta}v + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[2e^{-\frac{\zeta}{m}v} + 2e^{-\frac{\zeta}{m}t} - e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)} - e^{-\frac{\zeta}{m}(v+t)} - 2\right]$$

$$= \frac{2m}{\zeta}v + \frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[2e^{-\frac{\zeta}{m}v} + e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\left(2 - e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right) - 2\right]$$

$$e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\left(1 - e^{-2\frac{\zeta}{m}v}\right) = e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)$$

$$I_2{}^{abab}(t) = \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)\cdot I(t,v)\,dudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left[\int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)\cdot I(t,v)\,dv\right]\cdot du$$

$$\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)I(t,v) = \frac{2m}{\zeta}ve^{\frac{\zeta}{m}v} - \frac{2m}{\zeta}ve^{-\frac{\zeta}{m}v} + \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(1 - e^{-2\frac{\zeta}{m}v} - e^{\frac{\zeta}{m}v} + e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)$$

$$+\frac{m^2}{\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\left(2e^{\frac{\zeta}{m}v} - 2e^{-\frac{\zeta}{m}v} - e^{2\frac{\zeta}{m}v} + e^{-2\frac{\zeta}{m}v}\right)$$

$$= \frac{2m}{\zeta}\left(v - \frac{m}{\zeta} + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{\frac{\zeta}{m}v} - \frac{2m}{\zeta}\left(v - \frac{m}{\zeta} + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}v} - \frac{m^2}{\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot e^{2\frac{\zeta}{m}v}$$
$$+\frac{m^2}{\zeta^2}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 2\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}v}$$

$\frac{1}{a}\cdot\left(x - \frac{1}{a} + b\right)e^{ax} + const$: היא $(x+b)e^{ax}$ פונקציה קדומה של

נחשב את האינטגרל : $\tilde{I}(t,u) = \int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)I(t,v)\,dv =$

$$= \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(v - \frac{2m}{\zeta} + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{\frac{\zeta}{m}v}\Big|_{v=0}^{u} + \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(v + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}v}\Big|_{v=0}^{u} +$$

$$-\frac{m^3}{2\zeta^3}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot e^{2\frac{\zeta}{m}v}\Big|_{v=0}^{u} - \frac{m^3}{2\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 2\right)\cdot e^{-2\frac{\zeta}{m}v}\Big|_{v=0}^{u} =$$

$$= \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(u - \frac{2m}{\zeta} + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{\frac{\zeta}{m}u} + \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(u + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}u} - \frac{m^3}{2\zeta^3}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot e^{2\frac{\zeta}{m}u} +$$

$$-\frac{m^3}{2\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 2\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}u} - \frac{4m^3}{\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 1\right) + \frac{m^3}{\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 1\right)$$

$$e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\tilde{I}(t,u)=-\frac{m^3}{2\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-2\right)e^{-3\frac{\zeta}{m}u}+\frac{2m^2}{\zeta^2}\left(u+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}u}+$$

$$-\frac{3m^3}{\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-1\right)e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{2m^2}{\zeta^2}\left(u-\frac{2m}{\zeta}+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)-\frac{m^3}{2\zeta^3}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot e^{\frac{\zeta}{m}u}$$

נחשב את האינטגרל : $\int_{u=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\tilde{I}(t,u)\,du=$

$$=\frac{m^4}{6\zeta^4}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-2\right)\cdot e^{-3\frac{\zeta}{m}u}\Big|_{u=0}^{t}-\frac{m^3}{\zeta^3}\left(u+\frac{m}{2\zeta}+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}u}\Big|_{u=0}^{t}+$$

$$\frac{3m^4}{\zeta^4}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-1\right)e^{-\frac{\zeta}{m}u}\Big|_{u=0}^{t}+\frac{2m^2}{\zeta^2}\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{2m}{\zeta}u+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\,u\right)\Big|_{u=0}^{t}-\frac{m^4}{2\zeta^4}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\,e^{\frac{\zeta}{m}u}\Big|_{u=0}^{t}$$

$$=\frac{m^4}{6\zeta^4}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-2\right)\left(e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-1\right)-\frac{m^3}{\zeta^3}\left(t+\frac{m}{2\zeta}+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^4}{\zeta^4}\left(\frac{1}{2}+e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)+$$

$$+\frac{3m^4}{\zeta^4}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-1\right)^2+\frac{2m^2}{\zeta^2}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{2m}{\zeta}t+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot t\right)-\frac{m^4}{2\zeta^4}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\left(e^{\frac{\zeta}{m}t}-1\right)$$

$$=\frac{m^4}{6\zeta^4}\left(e^{-4\frac{\zeta}{m}t}-e^{-\frac{\zeta}{m}t}-2e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+2\right)-\frac{m^3}{\zeta^3}\left(t+\frac{m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^4}{\zeta^4}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+$$

$$\frac{m^4}{\zeta^4}\left(\frac{1}{2}+e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)+\frac{3m^4}{\zeta^4}\left(e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-2e^{-\frac{\zeta}{m}t}+1\right)+\frac{2m^2}{\zeta^2}\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{2m}{\zeta}t+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot t\right)+$$

$$-\frac{m^4}{2\zeta^4}\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)=$$

$$=\frac{m^2}{\zeta^2}t^2-\frac{4m^3}{\zeta^3}t+\frac{m^4}{\zeta^4}\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{2}+3-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{m^4}{\zeta^4}-\frac{m^4}{6\zeta^4}-\frac{6m^4}{\zeta^4}+\frac{m^4}{2\zeta^4}+\frac{2m^3}{\zeta^3}t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+$$

$$+\left(\frac{3m^4}{\zeta^4}-\frac{m^4}{2\zeta^4}-\frac{m^3}{\zeta^3}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\left(\frac{2m^4}{6\zeta^4}+\frac{m^4}{\zeta^4}\right)e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^4}{6\zeta^4}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$=\frac{m^2}{\zeta^2}t^2-\frac{4m^3}{\zeta^3}t+\frac{10m^4}{3\zeta^4}+\frac{m^3}{\zeta^3}\left(2t-\frac{14m}{3\zeta}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^3}{\zeta^3}\left(t-\frac{5m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}$$

$$-\frac{4m^4}{3\zeta^4}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^4}{6\zeta^4}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$I_2{}^{abab}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[t^2-\frac{4m}{\zeta}t+\frac{10m^2}{3\zeta^2}+\left(\frac{2m}{\zeta}t-\frac{14m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\left(\frac{5m^2}{2\zeta^2}-\frac{m}{\zeta}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\right.$$

$$\left.-\frac{4m^2}{3\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

חישוב $I_2{}^{abba}(t)$:

$$I_2{}^{abba}(t)=\int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v}e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\langle\, q^a(s)q^b(v)q^b(w)q^a(v)\,\rangle\, dsdudvdw$$

$$=\left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v}e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|s-v|}-e^{-\frac{\zeta}{m}(s+v)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|v-w|}-e^{-\frac{\zeta}{m}(v+w)}\right]dsdudvdw$$

בתחום האינטגרציה : $e^{-\frac{\zeta}{m}|v-w|}=e^{-\frac{\zeta}{m}(v-w)}=e^{\frac{\zeta}{m}(w-v)}$

$$e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\cdot\left[e^{\frac{\zeta}{m}(w-v)}-e^{-\frac{\zeta}{m}(v+w)}\right]=e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}v}\cdot\left[e^{\frac{\zeta}{m}w}-e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right]$$

$$=e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left[e^{\frac{\zeta}{m}w}-e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right]$$

$$I_2{}^{abba}(t)=\left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{u=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left\{\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|s-v|}-e^{-\frac{\zeta}{m}(s+v)}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\int_{w=0}^{v}\left(e^{\frac{\zeta}{m}w}-e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right)dw\right]dsdv\right\}du$$

נחשב את האינטגרל :

$$\int_{w=0}^{v}\left(e^{\frac{\zeta}{m}w}-e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right)dw=\frac{m}{\zeta}\left(e^{\frac{\zeta}{m}w}+e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right)\Big|_{w=0}^{v}=\frac{m}{\zeta}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v}+e^{-\frac{\zeta}{m}v}-2\right)$$

$$I_2{}^{abba}(t)=\left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\cdot\frac{m}{\zeta}\cdot\int_{u=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left\{\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}|s-v|}-e^{-\frac{\zeta}{m}(s+v)}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}v}+e^{-\frac{\zeta}{m}v}-2\right)dsdv\right\}du$$

נחשב את האינטגרל :

$$\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}|s-v|}-e^{-\frac{\zeta}{m}(s+v)}\right)\left(e^{\frac{\zeta}{m}v}+e^{-\frac{\zeta}{m}v}-2\right)dsdv=$$

$$\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}e^{-\frac{\zeta}{m}s}\left(2e^{-\frac{\zeta}{m}v}-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-1\right)dsdv+\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}e^{-\frac{\zeta}{m}|s-v|}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v}+e^{-\frac{\zeta}{m}v}-2\right)dsdv$$

$$\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}e^{-\frac{\zeta}{m}s}\left(2e^{-\frac{\zeta}{m}v}-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-1\right)dsdv=$$

$$\int_{s=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}s}ds\cdot\int_{v=0}^{u}\left(2e^{-\frac{\zeta}{m}v}-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-1\right)dv=$$

$$= -\frac{m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} s} \Big|_{s=0}^{t} \cdot \left(\frac{m}{2\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m} v} - v - \frac{2m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} v} \right) \Big|_{v=0}^{u}$$

$$= \frac{m}{\zeta} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{m} t} \right) \cdot \left(\frac{m}{2\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m} u} - u - \frac{2m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} u} + \frac{3m}{2\zeta} \right)$$

נסמן : $$= \frac{m}{\zeta} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{m} t} \right) \cdot \boldsymbol{A}(u)$$

$$\int_{s=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{-\frac{\zeta}{m} |s-v|} \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right) ds dv =$$

האינטגרציה היא במישור הדו-ממדי (s, v) בתחום : $\{ (s, v) \mid 0 \leq s \leq t \quad 0 \leq v \leq u \}$ כאשר u הוא קבוע , $u \leq t$, תחום זה פשוט ביחס לציר s :

$$\{ (s, v) \mid 0 \leq s \leq v \quad 0 \leq v \leq u \} \cup \{ (s, v) \mid v < s \leq t \quad 0 \leq v \leq u \}$$

$$= \int_{v=0}^{u} \left[\int_{s=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}(s-v)} ds + \int_{s=v}^{t} e^{\frac{\zeta}{m}(v-s)} ds \right] \cdot \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right) dv$$

$$= \frac{m}{\zeta} \int_{v=0}^{u} \left[e^{\frac{\zeta}{m}(s-v)} \Big|_{s=0}^{v} - e^{\frac{\zeta}{m}(v-s)} \Big|_{s=v}^{t} \right] \cdot \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right) dv$$

$$= \frac{m}{\zeta} \int_{v=0}^{u} \left[1 - e^{-\frac{\zeta}{m} v} - e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)} + 1 \right] \cdot \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right) dv$$

$$= \frac{m}{\zeta} \int_{v=0}^{u} \left[2 - e^{-\frac{\zeta}{m} v} - e^{-\frac{\zeta}{m} t} e^{\frac{\zeta}{m} v} \right] \cdot \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right) dv$$

$$= \frac{m}{\zeta} \int_{v=0}^{u} \left[2e^{\frac{\zeta}{m} v} - 5 + 4e^{-\frac{\zeta}{m} v} - e^{-2\frac{\zeta}{m} v} \right] dv + \frac{m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} t} \int_{v=0}^{u} \left(2e^{\frac{\zeta}{m} v} - e^{2\frac{\zeta}{m} v} - 1 \right) dv$$

$$= \frac{m}{\zeta} \left(\frac{2m}{\zeta} e^{\frac{\zeta}{m} v} - 5v - \frac{4m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} v} + \frac{m}{2\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m} v} \right) \Big|_{v=0}^{u} +$$

$$+ \frac{m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} t} \left(\frac{2m}{\zeta} e^{\frac{\zeta}{m} v} - \frac{m}{2\zeta} e^{2\frac{\zeta}{m} v} - v \right) \Big|_{v=0}^{u} =$$

$$= \frac{m}{\zeta} \left(\frac{2m}{\zeta} e^{\frac{\zeta}{m} u} - 5u - \frac{4m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} u} + \frac{m}{2\zeta} e^{-2\frac{\zeta}{m} u} + \frac{3m}{2\zeta} \right)$$

$$+ \frac{m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} t} \cdot \left(\frac{2m}{\zeta} e^{\frac{\zeta}{m} u} - \frac{m}{2\zeta} e^{2\frac{\zeta}{m} u} - u - \frac{3m}{2\zeta} \right)$$

נסמן : $$= \frac{m}{\zeta} \cdot \boldsymbol{B}(u) + \frac{m}{\zeta} e^{-\frac{\zeta}{m} t} \cdot \boldsymbol{C}(u)$$

$$I_2{}^{abba}(t) = \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \frac{m}{\zeta}\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\left[\frac{m}{\zeta}\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\boldsymbol{A}(u)+\frac{m}{\zeta}\boldsymbol{B}(u)+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\,\boldsymbol{C}(u)\right]du$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{A}(u)\,du+\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{B}(u)\,du+\right.$$

$$\left.+\,e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{C}(u)\,du\right]$$

$$\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{A}(u)du = \int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left(\frac{m}{2\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-u-\frac{2m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{3m}{2\zeta}\right)du$$

$$= \int_{u=0}^{t}\left(\frac{m}{2\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}-ue^{-\frac{\zeta}{m}u}-\frac{2m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{3m}{2\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)du$$

$$= \left(-\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m}{\zeta}ue^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m^2}{\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-\frac{3m^2}{2\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)\Bigg|_{u=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{\zeta}te^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^2}{2\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^2}{3\zeta^2}$$

$$\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{A}(u)\,du = -\frac{m^2}{3\zeta^2}+\left(\frac{m}{\zeta}t-\frac{m^2}{2\zeta^2}+\frac{m^2}{3\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+$$

$$+\left(\frac{m^2}{\zeta^2}+\frac{m^2}{2\zeta^2}-\frac{m}{\zeta}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\left(-\frac{m^2}{6\zeta^2}-\frac{m^2}{\zeta^2}\right)e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$= -\frac{m^2}{3\zeta^2}+\left(\frac{m}{\zeta}t-\frac{m^2}{6\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\left(\frac{3m^2}{2\zeta^2}-\frac{m}{\zeta}t\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{7m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{B}(u)\,du = \int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left(\frac{2m}{\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}u}-5u-\frac{4m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m}{2\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{3m}{2\zeta}\right)du$$

$$= \int_{u=0}^{t}\left(\frac{2m}{\zeta}-5ue^{-\frac{\zeta}{m}u}-\frac{4m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m}{2\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}+\frac{3m}{2\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)du$$

$$= \left(\frac{2m}{\zeta}u+\frac{5m}{\zeta}ue^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{5m^2}{\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{2m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}-\frac{3m^2}{2\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)\Bigg|_{u=0}^{t}$$

$$= \frac{2m}{\zeta}t+\frac{5m}{\zeta}te^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{7m^2}{2\zeta^2}e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{2m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{16m^2}{3\zeta^2}$$

$$= \frac{2m}{\zeta}t-\frac{16m^2}{3\zeta^2}+\left(\frac{5m}{\zeta}t+\frac{7m^2}{2\zeta^2}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{2m^2}{\zeta^2}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m^2}{6\zeta^2}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}$$

$$\int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\boldsymbol{C}(u)\,du = \int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left(\frac{2m}{\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}u}-\frac{m}{2\zeta}e^{2\frac{\zeta}{m}u}-u-\frac{3m}{2\zeta}\right)du$$

$$= \int_{u=0}^{t}\left(\frac{2m}{\zeta}-\frac{m}{2\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}u}-ue^{-\frac{\zeta}{m}u}-\frac{3m}{2\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)du$$

$$= \left(\frac{2m}{\zeta} u - \frac{m^2}{2\zeta^2} e^{\frac{\zeta}{m} u} + \frac{m}{\zeta} u e^{-\frac{\zeta}{m} u} + \frac{m^2}{\zeta^2} e^{-\frac{\zeta}{m} u} + \frac{3m^2}{2\zeta^2} e^{-\frac{\zeta}{m} u} \right) \Big|_{u=0}^{t}$$

$$= \frac{2m}{\zeta} t - \frac{m^2}{2\zeta^2} e^{\frac{\zeta}{m} t} + \frac{m}{\zeta} t e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \frac{5m^2}{2\zeta^2} e^{-\frac{\zeta}{m} t} - \frac{2m^2}{\zeta^2}$$

$$e^{-\frac{\zeta}{m} t} \int_{u=0}^{t} e^{-\frac{\zeta}{m} u} \boldsymbol{C}(u)\, du = \left(\frac{2m}{\zeta} t - \frac{2m^2}{\zeta^2} \right) e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \left(\frac{5m^2}{2\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} t \right) e^{-2\frac{\zeta}{m} t} - \frac{m^2}{2\zeta^2}$$

$\boldsymbol{I_2}^{\boldsymbol{abba}}(\boldsymbol{t}) =$

$$= \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \Bigg[-\frac{m^2}{3\zeta^2} + \left(\frac{m}{\zeta} t - \frac{m^2}{6\zeta^2} \right) e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \left(\frac{3m^2}{2\zeta^2} - \frac{m}{\zeta} t \right) e^{-2\frac{\zeta}{m} t} - \frac{7m^2}{6\zeta^2} e^{-3\frac{\zeta}{m} t} + \frac{m^2}{6\zeta^2} e^{-4\frac{\zeta}{m} t}$$

$$+ \frac{2m}{\zeta} t - \frac{16m^2}{3\zeta^2} + \left(\frac{5m}{\zeta} t + \frac{7m^2}{2\zeta^2} \right) e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \frac{2m^2}{\zeta^2} e^{-2\frac{\zeta}{m} t} - \frac{m^2}{6\zeta^2} e^{-3\frac{\zeta}{m} t}$$

$$+ \left(\frac{2m}{\zeta} t - \frac{2m^2}{\zeta^2} \right) e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \left(\frac{5m^2}{2\zeta^2} + \frac{m}{\zeta} t \right) e^{-2\frac{\zeta}{m} t} - \frac{m^2}{2\zeta^2} \Bigg]$$

$$= \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^4}{\zeta^4} \cdot \left[\frac{2m}{\zeta} t - \frac{37m^2}{6\zeta^2} + \left(\frac{8m}{\zeta} t + \frac{4m^2}{3\zeta^2} \right) e^{-\frac{\zeta}{m} t} + \frac{6m^2}{\zeta^2} e^{-2\frac{\zeta}{m} t} - \frac{4m^2}{3\zeta^2} e^{-3\frac{\zeta}{m} t} + \frac{m^2}{6\zeta^2} e^{-4\frac{\zeta}{m} t} \right]$$

חישוב $\boldsymbol{I_3}^{\boldsymbol{abab}}(\boldsymbol{t})$:

$$I_3{}^{abab}(t) = \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)} \langle\, q^a(t) q^b(v) q^a(w) q^b(v) \,\rangle\, du dv dw$$

$$= \left(\frac{m \cdot \Omega}{2\zeta} \right)^2 \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m} \cdot |t-w|} - e^{-\frac{\zeta}{m} \cdot (t+w)} \right] \cdot$$

$$\cdot \left[e^{-\frac{\zeta}{m} \cdot |v-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m} \cdot (v+v)} \right] du dv dw =$$

לפי תחום האינטגרציה : $e^{-\frac{\zeta}{m} \cdot |t-w|} = e^{-\frac{\zeta}{m}(t-w)} = e^{\frac{\zeta}{m}(w-t)} \;\; ; \;\; 0 \le w \le t$

$$= \left(\frac{m \cdot \Omega}{2\zeta} \right)^2 \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} \int_{w=0}^{v} e^{-\frac{\zeta}{m}(t+u)} \left[e^{\frac{\zeta}{m} v} - e^{-\frac{\zeta}{m} v} \right] \left[e^{\frac{\zeta}{m} w} - e^{-\frac{\zeta}{m} w} \right] du dv dw$$

$$= \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^2}{\zeta^2} \cdot \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{-\frac{\zeta}{m}(t+u)} \left[e^{\frac{\zeta}{m} v} - e^{-\frac{\zeta}{m} v} \right] \left\{ \int_{w=0}^{v} \left(e^{\frac{\zeta}{m} w} - e^{-\frac{\zeta}{m} w} \right) dw \right\} du dv$$

$$\int_{w=0}^{v} \left(e^{\frac{\zeta}{m} w} - e^{-\frac{\zeta}{m} w} \right) dw = \frac{m}{\zeta} \left(e^{\frac{\zeta}{m} w} + e^{-\frac{\zeta}{m} w} \right) \Big|_{w=0}^{v} = \frac{m}{\zeta} \left(e^{\frac{\zeta}{m} v} + e^{-\frac{\zeta}{m} v} - 2 \right)$$

$$= \frac{\Omega^2}{4} \cdot \frac{m^3}{\zeta^3} \cdot \int_{u=0}^{t} \int_{v=0}^{u} e^{-\frac{\zeta}{m}(t+u)} \left[e^{2\frac{\zeta}{m} v} - e^{-2\frac{\zeta}{m} v} - 2e^{\frac{\zeta}{m} v} + 2e^{-\frac{\zeta}{m} v} \right] du dv$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^3}{\zeta^3}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{u=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\cdot\left[\int_{v=0}^{u}\left(e^{2\frac{\zeta}{m}v}-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-2e^{\frac{\zeta}{m}v}+2e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv\right]du$$

$$\int_{v=0}^{u}\left(e^{2\frac{\zeta}{m}v}-e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-2e^{\frac{\zeta}{m}v}+2e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv=$$

$$=\frac{m}{\zeta}\left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\zeta}{m}v}+\frac{1}{2}e^{-2\frac{\zeta}{m}v}-2e^{\frac{\zeta}{m}v}-2e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)\Big|_{v=0}^{u}$$

$$=\frac{m}{\zeta}\left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{1}{2}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-2e^{\frac{\zeta}{m}u}-2e^{-\frac{\zeta}{m}u}+3\right)$$

$$I_3{}^{abab}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{u=0}^{t}e^{-\frac{\zeta}{m}u}\left(\frac{1}{2}e^{2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{1}{2}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-2e^{\frac{\zeta}{m}u}-2e^{-\frac{\zeta}{m}u}+3\right)du$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{u=0}^{t}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\zeta}{m}u}-2+3e^{-\frac{\zeta}{m}u}-2e^{-2\frac{\zeta}{m}u}+\frac{1}{2}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}\right)du$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\left(\frac{m}{2\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}u}-2u-\frac{3m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}u}+\frac{m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}u}-\frac{m}{6\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}u}\right)\Big|_{u=0}^{t}$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\left(\frac{m}{2\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}t}-2t-\frac{3m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{6\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\frac{5m}{3\zeta}\right)$$

$$I_3{}^{abab}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{m}{2\zeta}+\left(\frac{5m}{3\zeta}-2t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{3m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{6\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

חישוב $I_3{}^{abba}(t)$:

$$I_3{}^{abba}(t)=\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v}e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\langle\, q^a(t)q^b(v)q^b(w)q^a(v)\,\rangle\,dudvdw$$

$$=\left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v}e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-v|}-e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(t+v)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|v-w|}-e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(v+w)}\right]dudvdw=$$

לפי תחום האינטגרציה : $0\le v\le t$, $0\le w\le v$

$$e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|t-v|}=e^{\frac{\zeta}{m}(v-t)}\quad;\quad e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|v-w|}=e^{\frac{\zeta}{m}(w-v)}$$

$$=\left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\int_{w=0}^{v}e^{-\frac{\zeta}{m}(t+u)}\left[e^{\frac{\zeta}{m}v}-e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right]\left[e^{\frac{\zeta}{m}w}-e^{-\frac{\zeta}{m}w}\right]dudvdw$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{m}{2\zeta}+\left(\frac{5m}{3\zeta}-2t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{3m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{6\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

מסקנה : $I_3{}^{abba}(t)=I_3{}^{abab}(t)$

חישוב $I_4{}^{abab}(t)$:

$$I_4{}^{abab}(t) = \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(s)q^b(u)q^a(v)q^b(u)\,\rangle\, dsdudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(u-t)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+v)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|u-u|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(u+u)}\right] dsdudv =$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{u=0}^{t}\left(e^{\frac{\zeta}{m}u} - e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right)\left\{\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+v)}\right] dsdv\right\} du$$

$$\int_{s=0}^{t}\int_{v=0}^{u}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+v)}\right] dsdv = I(t,u)$$

$$I_4{}^{abab}(t) = \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\int_{u=0}^{t}\left(e^{\frac{\zeta}{m}u} - e^{-\frac{\zeta}{m}u}\right) I(t,u)du = \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\tilde{I}(t,t)$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot\left[-\frac{m^3}{2\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 2\right)e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(t + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \right.$$

$$\left. -\frac{3m^3}{\zeta^3}\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t} - 1\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \frac{2m^2}{\zeta^2}\left(t - \frac{2m}{\zeta} + \frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right) - \frac{m^3}{2\zeta^3}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot e^{\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[-\frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t} + \frac{m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} + 2te^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{2m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{3m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right.$$

$$\left. + 2t - \frac{4m}{\zeta} + \frac{2m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

$$I_4{}^{abab}(t) = \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[2t - \frac{4m}{\zeta} + \frac{5m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t} + \left(2t - \frac{7m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t} + \frac{3m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t} - \frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

חישוב $I_4{}^{abba}(t)$:

$$I_4{}^{abba}(t) = \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}\cdot(u-t)} \langle\, q^a(s)q^b(u)q^b(v)q^a(u)\,\rangle\, dsdudv$$

$$= \left(\frac{m\cdot\Omega}{2\zeta}\right)^2 \int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\int_{v=0}^{u} e^{\frac{\zeta}{m}(u-t)} \left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-u|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+u)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-\frac{\zeta}{m}|u-v|} - e^{-\frac{\zeta}{m}(u+v)}\right] dsdudv =$$

לפי תחום האינטגרציה : $0 \le v \le u$, $e^{-\frac{\zeta}{m}|u-v|} = e^{\frac{\zeta}{m}(v-u)}$

$$= \frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^2}{\zeta^2}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-u|} - e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+u)}\right]\left\{\int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v} - e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv\right\} dsdu$$

$$\int_{v=0}^{u}\left(e^{\frac{\zeta}{m}v}-e^{-\frac{\zeta}{m}v}\right)dv=\frac{m}{\zeta}\left(e^{\frac{\zeta}{m}u}+e^{-\frac{\zeta}{m}u}-2\right)$$

$$I_4{}^{abba}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^3}{\zeta^3}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\int_{s=0}^{t}\int_{u=0}^{t}\left[e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot|s-u|}-e^{-\frac{\zeta}{m}\cdot(s+u)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\frac{\zeta}{m}u}+e^{-\frac{\zeta}{m}u}-2\right)dsdu$$

אינטגרל דו –ממדי זה כבר חישבנו אותו כאשר חישבנו $\boldsymbol{I_2{}^{abba}(t)}$.

$$I_4{}^{abba}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^3}{\zeta^3}\cdot e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\left[\frac{m}{\zeta}\left(1-e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right)\boldsymbol{A}(t)+\frac{m}{\zeta}\boldsymbol{B}(t)+\frac{m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}\,\boldsymbol{C}(t)\right]$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\right)\cdot\boldsymbol{A}(t)+e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\boldsymbol{B}(t)+e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\cdot\boldsymbol{C}(t)\right]$$

$$\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\right)\cdot\boldsymbol{A}(t)=\left(e^{-\frac{\zeta}{m}t}-e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\right)\cdot\left(\frac{m}{2\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-t-\frac{2m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{3m}{2\zeta}\right)$$

$$=\frac{m}{2\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}+\left(\frac{3m}{2\zeta}-t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{2m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}+\left(t-\frac{3m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{2m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}$$

$$=\left(\frac{3m}{2\zeta}-t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\left(t-\frac{7m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{5m}{2\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}$$

$$e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\boldsymbol{B}(t)=e^{-\frac{\zeta}{m}t}\cdot\left(\frac{2m}{\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}t}-5t-\frac{4m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m}{2\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{3m}{2\zeta}\right)$$

$$=\frac{2m}{\zeta}+\left(\frac{3m}{2\zeta}-5t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{4m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{m}{2\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}$$

$$e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\cdot\boldsymbol{C}(t)=e^{-2\frac{\zeta}{m}t}\cdot\left(\frac{2m}{\zeta}e^{\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{2\zeta}e^{2\frac{\zeta}{m}t}-t-\frac{3m}{2\zeta}\right)$$

$$=-\frac{m}{2\zeta}+\frac{2m}{\zeta}e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\left(t+\frac{3m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}$$

$$I_4{}^{abba}(t)=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{2m}{\zeta}-\frac{m}{2\zeta}+\left(\frac{3m}{2\zeta}-t+\frac{3m}{2\zeta}-5t+\frac{2m}{\zeta}\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}\right.$$

$$\left.+\left(t-\frac{7m}{2\zeta}-\frac{4m}{\zeta}-t-\frac{3m}{2\zeta}\right)e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\left(\frac{5m}{2\zeta}+\frac{m}{2\zeta}\right)e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

$$=\frac{\Omega^2}{4}\cdot\frac{m^4}{\zeta^4}\cdot\left[\frac{3m}{2\zeta}+\left(\frac{5m}{\zeta}-6t\right)e^{-\frac{\zeta}{m}t}-\frac{9m}{\zeta}e^{-2\frac{\zeta}{m}t}+\frac{3m}{\zeta}e^{-3\frac{\zeta}{m}t}-\frac{m}{2\zeta}e^{-4\frac{\zeta}{m}t}\right]$$

(5) חישוב סמלי כריסטופל של מערכות קואורדינטות עקומות וחישוב טנסור העקמומיות של יריעות (משטחים) .

סמלי כריסטופל , Christoffel symbols :

$$(\mathbf{1}) \qquad [pq,r] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial u_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial u_r}\right)$$

$$(\mathbf{2}) \qquad \left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{sr}\cdot[pq,r] = \frac{1}{2}\cdot g^{sr}\cdot\left(\frac{\partial g_{pr}}{\partial u_q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial u_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial u_r}\right)$$

טנסור העקמומיות : $R^i{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {i \atop jh} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {i \atop jk} \right\} + \left\{ {i \atop rk} \right\}\cdot\left\{ {r \atop jh} \right\} - \left\{ {i \atop rh} \right\}\cdot\left\{ {r \atop jk} \right\}$

תזכורת : טנסור העקמומיות הוא טנסור אנטי סימטרי ביחס לשני אינדקסים covariant והם k ו- h : $R^i{}_{jhk} = -R^i{}_{jkh}$.

מערכת גלילית ב-R^3 :

$$x = \rho\cdot\cos\theta \ \ , \ \ y = \rho\cdot\sin\theta \ \ , \ \ z = z$$
$$\rho \geq 0 \ \ , \ \ 0 \leq \theta < 2\pi \ \ , \ \ -\infty < z < +\infty$$

אלמנט אורך : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\cdot d\theta^2 + dz^2$

טנסור המטריקה : $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\theta\theta} = \rho^2$, $g_{zz} = 1$, $g_{pq} = 0$ $p \neq q$

טנסור המטריקה הצמוד : $g^{\rho\rho} = 1$, $g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}$, $g^{zz} = 1$, $g^{pq} = 0$ $p \neq q$

נשים לב שהמקדם $g_{\theta\theta} = \rho^2$ בטנסור המטריקה הוא היחיד שאינו קבוע והוא פונקציה של קואורדינטה ρ בלבד ולכן כל סמלי כריסטופל שאינם מכילים זוג קואורדינטות של θ עם קואורדינטה אחת של ρ שווים לאפס . נשאר לנו לחשב $\binom{3}{1} = 3$ מתוך $3^3 = 27$ סמלי כריסטופל מסוג 1 וגם לסמלי כריסטופל מסוג 2 .

$$[\theta\theta,\rho] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\cdot 2\rho = -\rho \quad ; \quad [\rho\theta,\theta] = [\theta\rho,\theta] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\rho} = \rho$$

סמלי כריסטופל מסוג 2 הם : $\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{ss}\cdot[pq,s]$ בגלל : $g^{pq} = 0$ $p \neq q$

$$\left\{ {\rho \atop \theta\theta} \right\} = g^{\rho\rho}\cdot[\theta\theta,\rho] = -\rho \quad ; \quad \left\{ {\theta \atop \rho\theta} \right\} = g^{\theta\theta}\cdot[\rho\theta,\theta] = \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho = \frac{1}{\rho}$$

$$\left\{ {\theta \atop \theta\rho} \right\} = g^{\theta\theta}\cdot[\theta\rho,\theta] = \frac{1}{\rho^2}\cdot\rho = \frac{1}{\rho}$$

יריעה גלילית : קוֹאורדינטת הרדיוס ρ קבועה , $\rho = a \equiv constant \;\Leftarrow\; d\rho = 0$, **ולכן** המערכת מועברת מקבוצה (מרחב) R^3 לתת-קבוצה והיא משטח דו-ממדי גלילי בעל רדיוס a ומרכזו בראשית . אלמנט אורך על היריעה הגלילית : $ds^2 = a^2 \cdot d\theta^2 + dz^2$

מטריצת (טנסור) המטריקה : $g_{pq} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; מטריצה הצמודה : $g^{pq} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

סמלי כריסטופל המתאימים שווים לאפס כי טנסור המטריקה קבוע , ומכאן טנסור העקמומיות של יריעה גלילית הוא אפס כלומר יריעה גלילית היא חסרת עקמומיות .

מערכת כדורית ב-R^3 :

$$x = \rho \cdot cos\,\theta \cdot sin\,\varphi \quad , \quad y = \rho \cdot sin\,\theta \cdot sin\,\varphi \quad , \quad z = \rho \cdot cos\,\varphi$$
$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

אלמנט אורך : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \cdot sin^2\varphi \cdot d\theta^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2$

טנסור המטריקה : $g_{\rho\rho} = 1$, $g_{\theta\theta} = \rho^2 \cdot sin^2\varphi$, $g_{\varphi\varphi} = \rho^2$, $g_{pq} = 0 \quad p \neq q$

טנסור המטריקה הצמוד : $g^{\rho\rho} = 1$, $g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2 \cdot sin^2\varphi}$, $g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho^2}$, $g^{pq} = 0 \quad p \neq q$

שני המקדמים $g_{\theta\theta}$ ו- $g_{\varphi\varphi}$ היחידים שאינם קבועים , $g_{\theta\theta}$ הוא פונקציה של שתי קוֹאורדינטות ρ ו- φ , $g_{\varphi\varphi}$ של קוֹאורדינטה ρ בלבד , לכן כל סמלי כריסטופל בוודאות שווים לאפס חוץ מסמלי כריסטופל המכילים זוג קוֹאורדינטות θ עם קוֹאורדינטה אחת ρ **או** עם קוֹאורדינטה אחת φ ומסמלי כריסטופל המכילים זוג קוֹאורדינטות φ עם קוֹאורדינטה אחת ρ .

נחשב $9 = 3 + 3 + 3$ מתוך 27 סמלי כריסטופל מסוג 1 וגם סמלי כריסטופל מסוג 2 .

סמלי כריסטופל מסוג 2 הם : $\left\{ {s \atop pq} \right\} = g^{ss} \cdot [pq,s]$ בגלל : $g^{pq} = 0 \quad p \neq q$

$$[\theta\theta,\rho] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \cdot 2\rho \cdot sin^2(\varphi) = -\rho \cdot sin^2(\varphi)$$

$$[\rho\theta,\theta] = [\theta\rho,\theta] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \rho} = \rho \cdot sin^2(\varphi)$$

$$[\theta\theta,\varphi] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot 2 \cdot cos(\varphi) \cdot sin(\varphi) = -\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot sin(2\varphi)$$

$$[\theta\varphi,\theta] = [\varphi\theta,\theta] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot sin(2\varphi)$$

$$[\varphi\varphi,\rho] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \rho} = -\frac{1}{2} \cdot 2\rho = -\rho \;\; ; \;\; [\rho\varphi,\varphi] = [\varphi\rho,\varphi] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \rho} = \rho$$

$$\left\{ {\rho \atop \theta\theta} \right\} = g^{\rho\rho} \cdot [\theta\theta,\rho] = -\rho \cdot sin^2(\varphi)$$

$$\left\{ {\theta \atop \rho\theta} \right\} = \left\{ {\theta \atop \theta\rho} \right\} = g^{\theta\theta} \cdot [\theta\rho,\theta] = \frac{1}{\rho^2 \cdot sin^2\varphi} \cdot \rho \cdot sin^2(\varphi) = \frac{1}{\rho}$$

$$\left\{ {\varphi \atop \theta\theta} \right\} = g^{\varphi\varphi} \cdot [\theta\theta,\varphi] = \frac{1}{\rho^2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot sin(2\varphi) = -\frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi)$$

$$\left\{ {\theta \atop \theta\varphi} \right\} = \left\{ {\theta \atop \varphi\theta} \right\} = g^{\theta\theta} \cdot [\varphi\theta, \theta] = \frac{1}{\rho^2 \cdot sin^2\varphi} \cdot \rho^2 \cdot cos(\varphi) \cdot sin(\varphi) = cot(\varphi)$$

$$\left\{ {\rho \atop \varphi\varphi} \right\} = g^{\rho\rho} \cdot [\varphi\varphi, \rho] = -\rho \;\; ; \;\; \left\{ {\varphi \atop \rho\varphi} \right\} = \left\{ {\varphi \atop \varphi\rho} \right\} = g^{\varphi\varphi} \cdot [\varphi\rho, \varphi] = \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho = \frac{1}{\rho}$$

יריעה כדורית : קואורדינטת הרדיוס ρ קבועה , $\rho = a \equiv constant$ $\Leftarrow$ $d\rho = 0$, ולכן המערכת מועברת מקבוצה (מרחב) R^3 לתת-קבוצה והיא משטח דו-ממדי כדורי בעל רדיוס a ומרכזו בראשית . אלמנט אורך על היריעה הכדורית : $ds^2 = a^2 \cdot sin^2\varphi \cdot d\theta^2 + a^2 \cdot d\varphi^2$ מטריצת (טנסור) המטריקה ומטריצה הצמודה לה הן :

$$g^{pq} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 \cdot sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad g_{pq} = \begin{pmatrix} a^2 \cdot sin^2\varphi & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

סמלי כריסטופל המתאימים הם המכילים זוג קואורדינטות θ עם קואורדינטה אחת φ :

$$\left\{ {\varphi \atop \theta\theta} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi) = -cos(\varphi) \cdot sin(\varphi) \;\; ; \;\; \left\{ {\theta \atop \theta\varphi} \right\} = \left\{ {\theta \atop \varphi\theta} \right\} = \frac{cos(\varphi)}{sin(\varphi)} = cot(\varphi)$$

נחשב טנסור העקמומיות של יריעה כדורית :

$$R^i{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {i \atop jh} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {i \atop jk} \right\} + \left\{ {i \atop \theta k} \right\} \cdot \left\{ {\theta \atop jh} \right\} + \left\{ {i \atop \varphi k} \right\} \cdot \left\{ {\varphi \atop jh} \right\} - \left\{ {i \atop \theta h} \right\} \cdot \left\{ {\theta \atop jk} \right\} - \left\{ {i \atop \varphi h} \right\} \cdot \left\{ {\varphi \atop jk} \right\}$$

- $i = \theta \;,\; j = \theta$:

$$R^\theta{}_{\theta kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {\theta \atop \theta h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\theta \atop \theta k} \right\} + \left\{ {\theta \atop \theta k} \right\}\left\{ {\theta \atop \theta h} \right\} + \left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\}\left\{ {\varphi \atop \theta h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \theta k} \right\} - \left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\}\left\{ {\varphi \atop \theta k} \right\}$$

$$R^\theta{}_{\theta\theta\theta} = 0 - 0 + 0 \cdot 0 + cot(\varphi) \cdot 0 - 0 \cdot 0 - cot(\varphi) \cdot 0 = 0$$

$$R^\theta{}_{\theta\theta\varphi} = 0 - 0 + 0 \cdot cot(\varphi) + cot(\varphi) \cdot 0 - cot(\varphi) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi) = 0 \;\; ; \;\; R^\theta{}_{\theta\varphi\theta} = 0$$

$$R^\theta{}_{\theta\varphi\varphi} = 0 - 0 + cot^2(\varphi) - cos^2(\varphi) - cot^2(\varphi) + cos^2(\varphi) = 0$$

- $i = \theta \;,\; j = \varphi$:

$$R^\theta{}_{\varphi kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\} + \left\{ {\theta \atop \theta k} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} + \left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\} - \left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi k} \right\}$$

$$R^\theta{}_{\varphi kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\} + \left\{ {\theta \atop \theta k} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\}$$

$$R^\theta{}_{\varphi\theta\theta} = 0 - 0 + 0 \cdot cot(\varphi) - 0 \cdot cot(\varphi) = 0$$

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = 0 - \frac{\partial}{\partial\varphi}[\, cot(\varphi)\,] + 0 \cdot 0 - cot^2(\varphi) = \frac{1}{sin^2(\varphi)} - \frac{cos^2(\varphi)}{sin^2(\varphi)} = 1 \quad ; \ R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta} = -1$$

$$R^{\theta}_{\varphi\varphi\varphi} = 0 - 0 + cot(\varphi) \cdot 0 - cot(\varphi) \cdot 0 = 0$$

- $i = \varphi$:

$$R^{\varphi}{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jh \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ jh \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jh \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ jk \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jk \end{matrix} \right\}$$

$$R^{\varphi}{}_{jkh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jh \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ jk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ jh \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ jk \end{matrix} \right\}$$

- $i = \varphi \ , \ j = \theta$:

$$R^{\varphi}{}_{\theta kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta k \end{matrix} \right\}$$

$$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\theta} = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi) \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi) \cdot 0 = 0$$

$$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = 0 - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[-\frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi)\right] - cos^2(\varphi) - 0 \cdot 0 = cos(2\varphi) - cos^2(\varphi) = -sin^2(\varphi)$$

$$R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = sin^2(\varphi)$$

$$R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\varphi} = 0 - 0 + 0 \cdot cot(\varphi) - 0 \cdot cot(\varphi) = 0$$

- $i = \varphi \ , \ j = \varphi$:

$$R^{\varphi}{}_{\varphi kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi h \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi k \end{matrix} \right\}$$

$$R^{\varphi}{}_{\varphi kh} = \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta k \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi h \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta h \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi k \end{matrix} \right\}$$

$$R^{\varphi}_{\varphi\theta\theta} = -cos^2(\varphi) + cos^2(\varphi) = 0 \quad ; \quad R^{\varphi}_{\varphi\theta\varphi} = -\frac{1}{2} \cdot sin(2\varphi) \cdot 0 - 0 \cdot cot(\varphi) = 0$$

$$R^{\varphi}_{\varphi\varphi\theta} = 0 \quad ; \quad R^{\varphi}_{\varphi\varphi\varphi} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

לסיכום , טנסור העקמומיות של יריעה כדורית הוא :

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = 1 \ ; \ R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta} = -1 \ ; \ R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = -sin^2(\varphi) \ ; \ R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = sin^2(\varphi)$$

שאר מקדמי הטנסור שווים לאפס .

משטח כדורי שלושה ממדים במרחב R^4 : $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2}$

$$x = a \cdot \sin\chi \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \quad , \quad y = a \cdot \sin\chi \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

$$z = a \cdot \sin\chi \cdot \cos\theta \quad , \quad w = a \cdot \cos\chi$$

$$0 \le \chi \le \pi \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

נגדיר העתקה מקבוצה ב- R^3 : $\{ (\chi,\theta,\varphi) \mid 0 \le \chi \le \pi \ , \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le \varphi < 2\pi \}$
לקבוצה ב- R^4 : $\{ (x,y,z,w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2 \}$ ע"י הפרמטרזציה הנ"ל העתקה היא חח"ע והפיכה.

וקטור מיקום של נקודה על משטח כדור 3-ממדי :

$$\vec{r}(\chi,\theta,\varphi) = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} + \\ + a\sin\chi\cos\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + a\cos\chi \cdot \hat{\boldsymbol{w}}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\chi} = a\cos\chi\sin\theta\cos\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\cos\chi\sin\theta\sin\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} + a\cos\chi\cos\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}} - a\sin\chi \cdot \hat{\boldsymbol{w}}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = a\sin\chi\cos\theta\cos\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\chi\cos\theta\sin\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} - a\sin\chi\sin\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}}$$

מערכת זו היא אורתוגונלית : $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\chi} * \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\chi} * \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} * \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = 0$

$$h_\chi = a \quad ; \quad h_\theta = a \cdot \sin\chi \quad ; \quad h_\varphi = a \cdot \sin\chi \cdot \sin\theta$$

אלמנט אורך בריבוע על המשטח :

$$ds^2 = a^2 \cdot d\chi^2 + a^2\sin^2\chi \cdot d\theta^2 + a^2\sin^2\chi\sin^2\theta \cdot d\varphi^2$$

טנסור המטריקה הוא :

$$g_{\chi\theta} = g_{\chi\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0 \ ; \ g_{\chi\chi} = a^2 \ ; \ g_{\theta\theta} = a^2\sin^2\chi \ ; \ g_{\varphi\varphi} = a^2\sin^2\chi\sin^2\theta$$

טנסור המטריקה הצמוד :

$$g^{\chi\theta} = g^{\chi\varphi} = g^{\theta\varphi} = 0 \ ; \ g^{\chi\chi} = \frac{1}{a^2} \ ; \ g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2\sin^2\chi} \ ; \ g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2\sin^2\chi\sin^2\theta}$$

סמלי כריסטופל שאינם שווים לאפס הם המכילים זוג קואורדינטות θ עם קואורדינטה אחת χ וגם המכילים זוג קואורדינטות φ עם קואורדינטה אחת χ או קואורדינטה אחת θ .

$$[\theta\theta,\chi] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\chi} = -\frac{1}{2}a^2\sin(2\chi) \ ; \ [\theta\chi,\theta] = [\chi\theta,\theta] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\chi} = \frac{1}{2}a^2\sin(2\chi)$$

$$[\varphi\varphi,\chi] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi} \quad ; \quad [\varphi\chi,\varphi] = [\chi\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi}$$

$$[\varphi\varphi,\theta] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} \quad ; \quad [\varphi\theta,\varphi] = [\theta\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi} = a^2\cdot sin(2\chi)\cdot sin^2(\theta) \quad ; \quad \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} = a^2\cdot sin^2(\chi)\cdot sin(2\theta)$$

$$\left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta\theta\end{matrix}\right\} = g^{\chi\chi}\cdot[\theta\theta,\chi] = \frac{1}{a^2}\cdot -\frac{1}{2}a^2 sin(2\chi) = -\frac{1}{2}sin(2\chi)$$

$$\left\{\begin{matrix}\theta\\ \theta\chi\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\theta\\ \chi\theta\end{matrix}\right\} = g^{\theta\theta}\cdot[\chi\theta,\theta] = \frac{1}{a^2\,sin^2\chi}\cdot\frac{1}{2}a^2 sin(2\chi) = cot(\chi)$$

$$\left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi\varphi\end{matrix}\right\} = g^{\chi\chi}\cdot[\varphi\varphi,\chi] = \frac{1}{a^2}\cdot -\frac{1}{2}a^2 sin(2\chi)\,sin^2(\theta) = -\frac{1}{2}sin(2\chi)\,sin^2(\theta)$$

$$\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \varphi\chi\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\varphi\\ \chi\varphi\end{matrix}\right\} = g^{\varphi\varphi}\cdot[\chi\varphi,\varphi] = \frac{1}{a^2\,sin^2\chi\,sin^2\theta}\cdot\frac{1}{2}a^2 sin(2\chi)\,sin^2(\theta) = cot(\chi)$$

$$\left\{\begin{matrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{matrix}\right\} = g^{\theta\theta}\cdot[\varphi\varphi,\theta] = \frac{1}{a^2\,sin^2\chi}\cdot -\frac{1}{2}a^2\,sin^2(\chi)\,sin(2\theta) = -\frac{1}{2}sin(2\theta)$$

$$\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \varphi\theta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\varphi\\ \theta\varphi\end{matrix}\right\} = g^{\varphi\varphi}\cdot[\theta\varphi,\varphi] = \frac{1}{a^2\,sin^2\chi\,sin^2\theta}\cdot\frac{1}{2}a^2\,sin^2(\chi)\,sin(2\theta) = cot(\theta)$$

טנסור העקמומיות :

$$R^i{}_{jkh} = \left[\frac{\partial}{\partial u_k}\left\{\begin{matrix}i\\ jh\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{\begin{matrix}i\\ jk\end{matrix}\right\}\right] + \left[\left\{\begin{matrix}i\\ \chi k\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\chi\\ jh\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}i\\ \chi h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\chi\\ jk\end{matrix}\right\}\right] +$$
$$+\left[\left\{\begin{matrix}i\\ \theta k\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\theta\\ jh\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}i\\ \theta h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\theta\\ jk\end{matrix}\right\}\right] + \left[\left\{\begin{matrix}i\\ \varphi k\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\varphi\\ jh\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}i\\ \varphi h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\varphi\\ jk\end{matrix}\right\}\right]$$

- : $i = \chi \ , \ j = \chi$

$$R^{\chi}_{\chi kh} = \left[\left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta k\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\theta\\ \chi h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\theta\\ \chi k\end{matrix}\right\}\right] + \left[\left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi k\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \chi h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \chi k\end{matrix}\right\}\right]$$

$$R^{\chi}_{\chi\chi h} = 0 \ ; \ R^{\chi}_{\chi\chi\chi} = R^{\chi}_{\chi\chi\theta} = R^{\chi}_{\chi\chi\varphi} = 0$$

$$R^{\chi}_{\chi\theta h} = \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta\theta\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\theta\\ \chi h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\theta\\ \chi\theta\end{matrix}\right\} \quad ; \quad R^{\chi}_{\chi\theta\chi} = R^{\chi}_{\chi\theta\theta} = R^{\chi}_{\chi\theta\varphi} = 0$$

$$R^{\chi}_{\chi\varphi h} = \left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi\varphi\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \chi h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi h\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \chi\varphi\end{matrix}\right\} \quad ; \quad R^{\chi}_{\chi\varphi\chi} = R^{\chi}_{\chi\varphi\theta} = R^{\chi}_{\chi\varphi\varphi} = 0$$

- : $i = \chi \ , \ j = \theta$

$$R^{\chi}_{\theta kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta k\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta k\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\theta\\ \theta h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\theta\\ \theta k\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi k\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \theta h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \varphi h\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \theta k\end{matrix}\right\}$$

$$R^{\chi}_{\theta\chi h} = \frac{\partial}{\partial\chi}\left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\chi\\ \theta h\end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix}\theta\\ \theta\chi\end{matrix}\right\} \quad ; \quad R^{\chi}_{\theta\chi\chi} = R^{\chi}_{\theta\chi\varphi} = 0$$

$$R^{\chi}_{\theta\chi\theta} = -cos(2\chi) + \frac{1}{2}\sin(2\chi)\cot(\chi) = -cos(2\chi) + cos^2(\chi) = sin^2(\chi)$$

$$R^{\chi}_{\theta\theta h} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ {\chi \atop \theta h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\chi \atop \theta\theta} \right\} + \left\{ {\chi \atop \theta\theta} \right\}\cdot\left\{ {\theta \atop \theta h} \right\} \;\; ; \;\; R^{\chi}_{\theta\theta\theta} = R^{\chi}_{\theta\theta\varphi} = 0 \;\; ;$$

$$R^{\chi}_{\theta\theta\chi} = \cos(2\chi) - cos^2(\chi) = -\,sin^2(\chi)$$

$$R^{\chi}_{\theta\varphi h} = \left\{ {\chi \atop \varphi\varphi} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \theta h} \right\} - \left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \theta\varphi} \right\} \;\; ; \;\; R^{\chi}_{\theta\varphi\chi} = R^{\chi}_{\theta\varphi\theta} = R^{\chi}_{\theta\varphi\varphi} = 0$$

- $i = \chi \;\; , \; j = \varphi$:

$$R^{\chi}_{\varphi kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\chi \atop \varphi k} \right\} + \left\{ {\chi \atop \theta k} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\chi \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\} + \left\{ {\chi \atop \varphi k} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi k} \right\}$$

$$R^{\chi}_{\varphi\chi h} = \frac{\partial}{\partial\chi}\left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \varphi\chi} \right\} \;\; ; \;\; R^{\chi}_{\varphi\chi\chi} = R^{\chi}_{\varphi\chi\theta} = 0$$

$$R^{\chi}_{\varphi\chi\varphi} = -\cos(2\chi)\, sin^2(\theta) + cos^2(\chi)\, sin^2(\theta) = sin^2(\chi)\, sin^2(\theta)$$

$$R^{\chi}_{\varphi\theta h} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\} + \left\{ {\chi \atop \theta\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\} - \left\{ {\chi \atop \varphi h} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi\theta} \right\} \;\; ; \;\; R^{\chi}_{\varphi\theta\chi} = R^{\chi}_{\varphi\theta\theta} = 0$$

$$R^{\chi}_{\varphi\theta\varphi} = -\frac{1}{2}sin(2\chi)\, sin(2\theta) + \frac{1}{4}sin(2\chi)sin(2\theta) + \frac{1}{2}sin(2\chi)\, sin^2(\theta)\, cot(\theta)$$
$$= -\frac{1}{4}sin(2\chi)sin(2\theta) + \frac{1}{4}sin(2\chi)sin(2\theta) = 0$$

$$R^{\chi}_{\varphi\varphi h} = -\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\chi \atop \varphi\varphi} \right\} - \left\{ {\chi \atop \theta h} \right\}\cdot\left\{ {\theta \atop \varphi\varphi} \right\} + \left\{ {\chi \atop \varphi\varphi} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \varphi h} \right\} \;\; ; \;\; R^{\chi}_{\varphi\varphi\varphi} = 0$$

$$R^{\chi}_{\varphi\varphi\chi} = \cos(2\chi)\, sin^2(\theta) - cos^2(\chi)\, sin^2(\theta) = -\,sin^2(\chi)\, sin^2(\theta)$$

$$R^{\chi}_{\varphi\varphi\theta} = \frac{1}{2}sin(2\chi)\, sin(2\theta) - \frac{1}{4}sin(2\chi)sin(2\theta) - \frac{1}{4}sin(2\chi)sin(2\theta) = 0$$

- $i = \theta \;\; , \; j = \chi$:

$$R^{\theta}_{\chi kh} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{ {\theta \atop \chi h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\theta \atop \chi k} \right\} + \left\{ {\theta \atop \theta k} \right\}\left\{ {\theta \atop \chi h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \chi k} \right\} + \left\{ {\theta \atop \varphi k} \right\}\left\{ {\varphi \atop \chi h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\}\left\{ {\varphi \atop \chi k} \right\}$$

$$R^{\theta}_{\chi\chi h} = \frac{\partial}{\partial\chi}\left\{ {\theta \atop \chi h} \right\} + \left\{ {\theta \atop \theta\chi} \right\}\left\{ {\theta \atop \chi h} \right\} \;\; ; \;\; R^{\theta}_{\chi\chi\chi} = R^{\theta}_{\chi\chi\varphi} = 0 \;\; ; \;\; R^{\theta}_{\chi\chi\theta} = \frac{-1}{sin^2(\chi)} + cot^2(\chi) = -1$$

$$R^{\theta}_{\chi\theta h} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ {\theta \atop \chi h} \right\} - \frac{\partial}{\partial u_h}\left\{ {\theta \atop \chi\theta} \right\} - \left\{ {\theta \atop \theta h} \right\}\left\{ {\theta \atop \chi\theta} \right\} \;\; ; \;\; R^{\theta}_{\chi\theta\theta} = R^{\theta}_{\chi\theta\varphi} = 0 \;\; ;$$

$$R^{\theta}_{\chi\theta\chi} = \frac{1}{sin^2(\chi)} - cot^2(\chi) = 1$$

$$R^{\theta}_{\chi\varphi h} = \left\{ {\theta \atop \varphi\varphi} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \chi h} \right\} - \left\{ {\theta \atop \varphi h} \right\}\cdot\left\{ {\varphi \atop \chi\varphi} \right\} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; R^{\theta}_{\chi\varphi\chi} = R^{\theta}_{\chi\varphi\theta} = R^{\theta}_{\chi\varphi\varphi} = 0$$

- $i=\theta\ ,\ j=\theta$:

$$R^{\theta}{}_{\theta kh}=\frac{\partial}{\partial u_k}\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta h\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u_h}\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \theta h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \theta k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta k\end{Bmatrix}$$

$$R^{\theta}{}_{\theta\chi h}=\frac{\partial}{\partial\chi}\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta h\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u_h}\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\chi\end{Bmatrix}\ \ ;\ \ R^{\theta}{}_{\theta\chi\chi}=R^{\theta}{}_{\theta\chi\theta}=R^{\theta}{}_{\theta\chi\varphi}=0$$

$$R^{\theta}{}_{\theta\theta h}=\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta h\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi\theta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \theta h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \theta\theta\end{Bmatrix}\ ;\ R^{\theta}{}_{\theta\theta\chi}=R^{\theta}{}_{\theta\theta\theta}=R^{\theta}{}_{\theta\theta\varphi}=0$$

$$R^{\theta}{}_{\theta\varphi h}=\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta\varphi\end{Bmatrix}\ ;\ R^{\theta}{}_{\theta\varphi\chi}=R^{\theta}{}_{\theta\varphi\theta}=R^{\theta}{}_{\theta\varphi\varphi}=0$$

- $i=\theta\ ,\ j=\varphi$:

$$R^{\theta}{}_{\varphi kh}=\frac{\partial}{\partial u_k}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u_h}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \varphi k\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi k\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi k\end{Bmatrix}$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\chi h}=\frac{\partial}{\partial\chi}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\chi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\chi\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial\chi}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\chi\chi}=R^{\theta}{}_{\varphi\chi\theta}=R^{\theta}{}_{\varphi\chi\varphi}=0$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta h}=\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi\theta\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\chi\\ \varphi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi h\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\theta\end{Bmatrix}\ ;\ R^{\theta}{}_{\varphi\theta\chi}=R^{\theta}{}_{\varphi\theta\theta}=0\ \ ;$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}=-cos(2\theta)-cos^2(\chi)sin^2(\theta)+cos^2(\theta)=sin^2(\chi)sin^2(\theta)$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\varphi h}=-\frac{\partial}{\partial u_h}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi h\end{Bmatrix}$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\chi}=-\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\chi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\chi\end{Bmatrix}=0\quad,\quad R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\varphi}=0\quad,$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta}=-\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\theta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi\theta\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\chi\\ \varphi\varphi\end{Bmatrix}=$$

$$=cos(2\theta)-\frac{1}{2}sin(2\theta)cot(\theta)+\frac{1}{2}sin(2\chi)\,sin^2(\theta)\,cot(\chi)=cos(2\theta)-cos^2(\theta)+$$

$$+cos^2(\chi)\cdot sin^2(\theta)=-sin^2(\chi)sin^2(\theta)$$

- $i=\varphi\ ,\ j=\chi$:

$$R^{\varphi}{}_{\chi kh}=\frac{\partial}{\partial u_k}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi h\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial u_h}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta k\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varphi\\ \theta h\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\theta\\ \chi k\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi k\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi h\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi h\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi k\end{Bmatrix}$$

$$R^{\varphi}{}_{\chi\chi h}=\frac{\partial}{\partial\chi}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi h\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\varphi\\ \varphi\chi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \chi h\end{Bmatrix}\ ;\ R^{\varphi}{}_{\chi\chi\chi}=R^{\varphi}{}_{\chi\chi\theta}=0\ ;\ R^{\varphi}{}_{\chi\chi\varphi}=\frac{-1}{sin^2(\chi)}+cot^2(\chi)=-1$$

$$R^{\varphi}_{\ \chi\theta h}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}\left\{{\theta \atop \chi\theta}\right\}+\left\{{\varphi \atop \varphi\theta}\right\}\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\} \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \chi\theta\chi}=R^{\varphi}_{\ \chi\theta\theta}=R^{\varphi}_{\ \chi\theta\varphi}=0$$

$$R^{\varphi}_{\ \chi\varphi h}=-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \chi\varphi}\right\}+\left\{{\varphi \atop \theta\varphi}\right\}\left\{{\theta \atop \chi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}\left\{{\varphi \atop \chi\varphi}\right\} \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \chi\varphi\theta}=R^{\varphi}_{\ \chi\varphi\varphi}=0 \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \chi\varphi\chi}=1$$

- $: \ i=\varphi \ \ , \ j=\theta$

$$R^{\varphi}_{\ \theta kh}=\frac{\partial}{\partial u_k}\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \theta k}\right\}+\left\{{\varphi \atop \chi k}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \theta h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \theta k}\right\}+\left\{{\varphi \atop \theta k}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \theta h}\right\}-$$

$$-\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \theta k}\right\}+\left\{{\varphi \atop \varphi k}\right\}\cdot\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}\cdot\left\{{\varphi \atop \theta k}\right\}$$

$$R^{\varphi}_{\ \theta\chi h}=\frac{\partial}{\partial\chi}\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \theta\chi}\right\}+\left\{{\varphi \atop \varphi\chi}\right\}\cdot\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}=\frac{\partial}{\partial\chi}\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\} \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \theta\chi\chi}=R^{\varphi}_{\ \theta\chi\theta}=R^{\varphi}_{\ \theta\chi\varphi}=0$$

$$R^{\varphi}_{\ \theta\theta h}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}+\left\{{\varphi \atop \varphi\theta}\right\}\cdot\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \theta\theta}\right\} \ ; \ R^{\varphi}_{\ \theta\theta\chi}=R^{\varphi}_{\ \theta\theta\theta}=0$$

$$R^{\varphi}_{\ \theta\theta\varphi}=\frac{-1}{sin^2(\theta)}+cot^2(\theta)+\frac{1}{2}sin(2\chi)cot(\chi)=-1+cos^2(\chi)=-sin^2(\chi)$$

$$R^{\varphi}_{\ \theta\varphi h}=-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \theta\varphi}\right\}+\left\{{\varphi \atop \chi\varphi}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \theta h}\right\}+\left\{{\varphi \atop \theta\varphi}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \theta h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}\cdot\left\{{\varphi \atop \theta\varphi}\right\}$$

$$R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\chi}=R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\varphi}=0 \ \ , \ \ R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\theta}=\frac{1}{sin^2(\theta)}-cos^2(\chi)-cot^2(\theta)=sin^2(\chi)$$

- $: \ i=\varphi \ \ , \ j=\varphi$

$$R^{\varphi}_{\ \varphi kh}=\frac{\partial}{\partial u_k}\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \varphi k}\right\}+\left\{{\varphi \atop \chi k}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \varphi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\}\cdot\left\{{\chi \atop \varphi k}\right\}+$$

$$+\left\{{\varphi \atop \theta k}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \varphi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}\cdot\left\{{\theta \atop \varphi k}\right\}$$

$$R^{\varphi}_{\ \varphi\chi h}=\frac{\partial}{\partial\chi}\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \varphi\chi}\right\} \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \varphi\chi\chi}=R^{\varphi}_{\ \varphi\chi\theta}=R^{\varphi}_{\ \varphi\chi\varphi}=0$$

$$R^{\varphi}_{\ \varphi\theta h}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{{\varphi \atop \varphi h}\right\}-\frac{\partial}{\partial u_h}\left\{{\varphi \atop \varphi\theta}\right\} \ \ ; \ \ R^{\varphi}_{\ \varphi\theta\chi}=R^{\varphi}_{\ \varphi\theta\theta}=R^{\varphi}_{\ \varphi\theta\varphi}=0$$

$$R^{\varphi}_{\ \varphi\varphi h}=\left\{{\varphi \atop \chi\varphi}\right\}\left\{{\chi \atop \varphi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \chi h}\right\}\left\{{\chi \atop \varphi\varphi}\right\}+\left\{{\varphi \atop \theta\varphi}\right\}\left\{{\theta \atop \varphi h}\right\}-\left\{{\varphi \atop \theta h}\right\}\left\{{\theta \atop \varphi\varphi}\right\}$$

$$R^{\varphi}_{\ \varphi\varphi\chi}=R^{\varphi}_{\ \varphi\varphi\theta}=R^{\varphi}_{\ \varphi\varphi\varphi}=0$$

לסיכום , טנסור העקמומיות של משטח כדורי 3-ממדי הוא :

$$R^{\chi}_{\ \theta\chi\theta}=R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\theta}=sin^2(\chi) \qquad R^{\chi}_{\ \theta\theta\chi}=R^{\varphi}_{\ \theta\theta\varphi}=-sin^2(\chi)$$

$$R^{\chi}_{\ \varphi\chi\varphi}=R^{\theta}_{\ \varphi\theta\varphi}=sin^2(\chi)\,sin^2(\theta) \qquad R^{\chi}_{\ \varphi\varphi\chi}=R^{\theta}_{\ \varphi\varphi\theta}=-sin^2(\chi)\,sin^2(\theta)$$

$$R^{\theta}_{\ \chi\chi\theta}=R^{\varphi}_{\ \chi\chi\varphi}=-1 \qquad R^{\theta}_{\ \chi\theta\chi}=R^{\varphi}_{\ \chi\varphi\chi}=1$$

שאר מקדמי הטנסור שווים לאפס .

משטח דו-ממדי היפרבולויד חד-יריעתי במרחב R^3 : $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

a הוא רדיוס המעגל הנמצא על המשטח במישור $z = 0$.

פרמטרזציה של המשטח :

$$x = a \cdot cosh(\theta) \cdot cos(\varphi) \;\; ; \;\; y = a \cdot cosh(\theta) \cdot sin(\varphi) \;\; ; \;\; z = a \cdot sinh(\theta)$$

$$\theta \in R \;\; ; \;\; 0 \le \varphi < 2\pi$$

נגדיר העתקה מקבוצה ב- R^2 : $\{(\theta,\varphi) |\; \theta \in R \,, 0 \le \varphi < 2\pi \;\}$, לקבוצה ב- R^3 :
$\{\,(x,y,z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = a^2\,\}$ ע"י הפרמטרזציה הנ"ל , העתקה היא חח"ע והפיכה .

ווקטור מיקום של נקודה על המשטח :

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = a \cdot cos(\varphi) \cdot cosh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + a \cdot sin(\varphi) \cdot cosh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + a \cdot sinh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\Longrightarrow \;\; \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = a \cdot cos(\varphi) \cdot sinh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + a \cdot sin(\varphi) \cdot sinh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} + a \cdot cosh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\Longrightarrow \;\; \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -a \cdot sin(\varphi) \cdot cosh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} + a \cdot cos(\varphi) \cdot cosh(\theta) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

מתקיים : $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} * \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot sin(2\varphi) \cdot sinh(2\theta) + \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot sin(2\varphi) \cdot sinh(2\theta) = 0$

$\Leftarrow$ המערכת הקואורדינטות (θ,φ) המגודרת ע"י הפרמטרזציה של המשטח הנ"ל היא מערכת אורתוגונלית .

$$h_\theta = a \cdot \sqrt{\,sinh^2(\theta) + cosh^2(\theta)\,} = a \cdot \sqrt{cosh(2\theta)} \quad ; \quad h_\varphi = a \cdot cosh(\theta)$$

אלמנט אורך בריבוע על המשטח : $ds^2 = a^2 \cdot cosh(2\theta) \cdot d\theta^2 + a^2 \cdot cosh^2(\theta) \cdot d\varphi^2$

טנסור המטריקה של משטח היפרבולויד חד-יריעתי :

$$g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0 \;\; ; \;\; g_{\theta\theta} = a^2 \cdot cosh(2\theta) \;\; ; \;\; g_{\varphi\varphi} = a^2 \cdot cosh^2(\theta)$$

טנסור המטריקה הצמוד :

$$g^{\theta\varphi} = g^{\varphi\theta} = 0 \;\; ; \;\; g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 \cdot cosh(2\theta)} \;\; ; \;\; g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 \cdot cosh^2(\theta)}$$

סמלי כריסטופל המתאימים למערכת קואורדינטות (θ,φ) שאינם שווים לאפס הם המכילים שלוש קואורדינטות θ והמכילים זוג קואורדינטות φ עם קואורדינטה אחת θ

$$[\theta\theta,\theta] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot 2 \cdot sinh(2\theta) = a^2 \cdot sinh(2\theta)$$

$$[\varphi\varphi,\theta] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot 2 \cdot sinh(\theta) \cdot cosh(\theta) = -\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot sinh(2\theta)$$

$$[\varphi\theta,\varphi] = [\theta\varphi,\varphi] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot sinh(2\theta)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta\theta \end{matrix} \right\} = g^{\theta\theta} \cdot [\theta\theta,\theta] = \frac{1}{a^2 \cdot cosh(2\theta)} \cdot a^2 \cdot sinh(2\theta) = tanh(2\theta)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \theta \\ \varphi\varphi \end{matrix} \right\} = g^{\theta\theta} \cdot\ [\varphi\varphi, \theta] = \frac{1}{a^2 \cdot cosh(2\theta)} \cdot -\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot sinh(2\theta) = -\frac{1}{2} \cdot tanh(2\theta)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \varphi \\ \theta\varphi \end{matrix} \right\} = g^{\varphi\varphi} \cdot [\theta\varphi, \varphi] = \frac{1}{a^2 \cdot cosh^2(\theta)} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot sinh(2\theta) = tanh(\theta)$$

נכתוב טנסור העקמומיות של משטח היפרבולויד דו-ממדי חד-יריעתי ללא חישוב :

$$R^{\theta}_{\ \varphi\theta\varphi} = -cosh^2(\theta)\ ;\ R^{\theta}_{\ \varphi\varphi\theta} = cosh^2(\theta)\ ;\ R^{\varphi}_{\ \theta\theta\varphi} = cosh(2\theta)\ \ ;\ R^{\varphi}_{\ \theta\varphi\theta} = -cosh(2\theta)$$

שאר מקדמי הטנסור שווים לאפס .

משטח היפרבולויד חד-יריעתי שלושה ממדים במרחב R^4 : $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = a^2}$

$$x = a \cdot cosh\,\chi \cdot sin\,\theta \cdot cos\,\varphi \quad , \quad y = a \cdot cosh\,\chi \cdot sin\,\theta \cdot sin\,\varphi$$

$$z = a \cdot cosh\,\chi \cdot cos\,\theta \quad , \quad w = a \cdot sinh\,\chi$$

$$\chi \in R \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

נגדיר העתקה מקבוצה ב- R^3 : $\{\, (\chi, \theta, \varphi)\ |\ \chi \in R\ ,\ 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \varphi < 2\pi \,\}$
לקבוצה ב- R^4 : $\{\, (x, y, z, w)\ |\ x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = a^2 \,\}$ ע"י הפרמטרזציה הנ"ל ,
העתקה היא חח"ע והפיכה .

ווקטור מיקום של נקודה על משטח היפרבולויד חד-יריעתי 3-ממדי :

$$\vec{r}(\chi, \theta, \varphi) = a\,cosh\,\chi\,sin\,\theta\,cos\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\,cosh\,\chi\,sin\,\theta\,sin\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} + \\ + a\,cosh\,\chi\,cos\,\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + a\,sinh\,\chi \cdot \hat{\boldsymbol{w}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} = a\,sinh\,\chi\,sin\,\theta\,cos\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\,sinh\,\chi\,sin\,\theta\,sin\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} + \\ + a\,sinh\,\chi\,cos\,\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + a\,cosh\,\chi \cdot \hat{\boldsymbol{w}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = a\,cosh\,\chi\,cos\,\theta\,cos\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\,cosh\,\chi\,cos\,\theta\,sin\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}} - a\,cosh\,\chi\,sin\,\theta \cdot \hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -a\,cosh\,\chi\,sin\,\theta\,sin\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + a\,cosh\,\chi\,sin\,\theta\,cos\,\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{y}}$$

מערכת זו היא אורתוגונלית : $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} * \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \chi} * \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} * \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0$

$$h_\chi = a \cdot \sqrt{cosh(2\chi)} \quad ; \quad h_\theta = a \cdot cosh\,\chi \quad ; \quad h_\varphi = a \cdot cosh\,\chi \cdot sin\,\theta$$

אלמנט אורך בריבוע על המשטח :

$$ds^2 = a^2\cosh(2\chi)\cdot d\chi^2 + a^2\cosh^2\chi\cdot d\theta^2 + a^2\cosh^2\chi\sin^2\theta\cdot d\varphi^2$$

טנסור המטריקה הוא :

$$g_{\chi\chi} = a^2\cosh(2\chi) \quad ; \quad g_{\theta\theta} = a^2\cosh^2\chi \quad ; \quad g_{\varphi\varphi} = a^2\cosh^2\chi\sin^2\theta$$

$$g_{\chi\theta} = g_{\chi\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0$$

טנסור המטריקה הצמוד :

$$g^{\chi\chi} = \frac{1}{a^2\cosh(2\chi)} \quad ; \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2\cosh^2\chi} \quad ; \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2\cosh^2\chi\sin^2\theta}$$

$$g_{\chi\theta} = g_{\chi\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0$$

סמלי כריסטופל שאינם שווים לאפס הם המכילים שלוש קואורדינטות χ , המכילים זוג קואורדינטות θ עם קואורדינטה אחת χ והמכילים זוג קואורדינטות φ עם קואורדינטה אחת χ או קואורדינטה אחת θ .

$$[\chi\chi,\chi] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial\chi} = a^2\sinh(2\chi)$$

$$[\theta\theta,\chi] = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\chi} = -\frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi) \quad ; \quad [\theta\chi,\theta] = [\chi\theta,\theta] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial\chi} = \frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi)$$

$$[\varphi\varphi,\chi] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi} \quad ; \quad [\varphi\chi,\varphi] = [\chi\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi}$$

$$[\varphi\varphi,\theta] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} \quad ; \quad [\varphi\theta,\varphi] = [\theta\varphi,\varphi] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\chi} = a^2\sinh(2\chi)\sin^2(\theta) \quad ; \quad \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} = a^2\cosh^2(\chi)\sin(2\theta)$$

$$\left\{{\chi \atop \chi\chi}\right\} = g^{\chi\chi}\cdot[\chi\chi,\chi] = \frac{1}{a^2\cosh(2\chi)}\cdot a^2\sinh(2\chi) = \tanh(2\chi)$$

$$\left\{{\chi \atop \theta\theta}\right\} = g^{\chi\chi}\cdot[\theta\theta,\chi] = \frac{1}{a^2\cosh(2\chi)}\cdot -\frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi) = -\frac{1}{2}\tanh(2\chi)$$

$$\left\{{\theta \atop \theta\chi}\right\} = \left\{{\theta \atop \chi\theta}\right\} = g^{\theta\theta}\cdot[\chi\theta,\theta] = \frac{1}{a^2\cosh^2\chi}\cdot\frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi) = \tanh(\chi)$$

$$\left\{{\chi \atop \varphi\varphi}\right\} = g^{\chi\chi}\cdot[\varphi\varphi,\chi] = \frac{1}{a^2\cosh(2\chi)}\cdot -\frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi)\sin^2(\theta) = -\frac{1}{2}\tanh(2\chi)\sin^2(\theta)$$

$$\left\{{\varphi \atop \varphi\chi}\right\} = \left\{{\varphi \atop \chi\varphi}\right\} = g^{\varphi\varphi}\cdot[\chi\varphi,\varphi] = \frac{1}{a^2\cosh^2\chi\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{2}a^2\sinh(2\chi)\sin^2(\theta) = \tanh(\chi)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi\varphi \end{Bmatrix} = g^{\theta\theta} \cdot [\varphi\varphi, \theta] = \frac{1}{a^2 \cosh^2 \chi} \cdot -\frac{1}{2} a^2 \cosh^2(\chi) \sin(2\theta) = -\frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \varphi\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \theta\varphi \end{Bmatrix} = g^{\varphi\varphi} \cdot [\theta\varphi, \varphi] = \frac{1}{a^2 \cosh^2 \chi \sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cosh^2(\chi) \sin(2\theta) = \cot(\theta)$$

נכתוב טנסור העקמומיות של משטח **היפרבולויד** 3-ממדי חד-יריעתי ללא חישוב :

$$R^{\chi}{}_{\theta\chi\theta} = -\sinh^2(\chi) \quad ; \quad R^{\chi}{}_{\theta\theta\chi} = \sinh^2(\chi)$$

$$R^{\chi}{}_{\varphi\chi\varphi} = -\sinh^2(\chi) \cdot \sin^2(\theta) \quad ; \quad R^{\chi}{}_{\varphi\varphi\chi} = \sinh^2(\chi) \cdot \sin^2(\theta)$$

$$R^{\theta}{}_{\chi\chi\theta} = 1 \quad ; \quad R^{\theta}{}_{\chi\theta\chi} = -1$$

$$R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = -\sinh^2(\chi) \cdot \sin^2(\theta) \quad ; \quad R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta} = \sinh^2(\chi) \cdot \sin^2(\theta)$$

$$R^{\varphi}{}_{\chi\chi\varphi} = 1 \quad ; \quad R^{\varphi}{}_{\chi\varphi\chi} = -1$$

$$R^{\varphi}{}_{\theta\theta\varphi} = \sinh^2(\chi) \quad ; \quad R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} = -\sinh^2(\chi)$$

שאר מקדמי הטנסור שווים לאפס .

(6) אלגוריתם בתוכנות MATLAB לבניית גרפים של הטנסורים

: $n = 1,2,3,4$; $I_n{}^{abab}(t)$, $I_n{}^{abba}(t)$

```
function I_Tensors(tauB,tf)

% drawing the normalized functions :
% I1_abab = I1_abba ; I2_abab ; I2_abba
% I3_abab = I3_abba ; I4_abab ; I4_abba

t=linspace(0,tf,1000);

I1_abab=0.5-2*exp(-tauB*t)+3*exp(-2*tauB*t)-2*exp(-3*tauB*t)...
  +0.5*exp(-4*tauB*t);
Asy_I1_abab=0.5;

I2_abab=t.^2-4*tauB*t+10/3*tauB^2+(2*tauB*t-14/3*tauB^2).*exp(-tauB*t)...
    -(tauB*t-2.5*tauB^2).*exp(-2*tauB*t)-4/3*tauB^2*exp(-3*tauB*t)...
    +1/6*tauB^2*exp(-4*tauB*t);
Asy_I2_abab=t.^2-4*tauB*t+10/3*tauB^2;

I2_abba=2*tauB*t-37/6*tauB^2+(8*tauB*t+4/3*tauB^2).*exp(-tauB*t)...
    +6*tauB^2*exp(-2*tauB*t)-4/3*tauB^2*exp(-3*tauB*t)...
    +1/6*tauB^2*exp(-4*tauB*t);
Asy_I2_abba=2*tauB*t-37/6*tauB^2;

I3_abab=0.5*tauB+(5/3*tauB-2*t).*exp(-tauB*t)-3*tauB*exp(-2*tauB*t)...
    +tauB*exp(-3*tauB*t)-1/6*tauB*exp(-4*tauB*t);
Asy_I3_abab=0.5*tauB;

I4_abab=2*t-4*tauB+5*tauB*exp(-tauB*t)...
    +(2*t-3.5*tauB).*exp(-2*tauB*t)+3*tauB*exp(-3*tauB*t)...
    -0.5*tauB*exp(-4*tauB*t);
Asy_I4_abab=2*t-4*tauB;

I4_abba=1.5*tauB+(5*tauB-6*t).*exp(-tauB*t)...
    -9*tauB*exp(-2*tauB*t)+3*tauB*exp(-3*tauB*t)...
    -0.5*tauB*exp(-4*tauB*t);
Asy_I4_abba=1.5*tauB;

figure(1)
plot(t,I1_abab,'linewidth',2)
axis([0 tf min(I1_abab) max(I1_abab)+0.05])
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_1 ^a^b^a^b (t) or I_1 ^a^b^b^a (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_1 ^a^b^a^b (t) or I_1 ^a^b^b^a
(t) ; relaxation time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I1_abab,'--r','linewidth',2)
hold off
legend('I_1 ^a^b^a^b (t)','horizontal asymptote')
```

```
figure(2)
plot(t,I2_abab,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_2 ^a^b^a^b (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_2 ^a^b^a^b (t) ; relaxation
time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I2_abab,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_2 ^a^b^a^b (t)','parabolic asymptote')

figure(3)
plot(t,I2_abba,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_2 ^a^b^b^a (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_2 ^a^b^b^a (t) ; relaxation
time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I2_abba,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_2 ^a^b^b^a (t)','slant asymptote')

figure(4)
plot(t,I3_abab,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_3 ^a^b^a^b (t) or I_3 ^a^b^b^a (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_3 ^a^b^a^b (t) or I_3 ^a^b^b^a
(t) ; relaxation time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I3_abab,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_3 ^a^b^a^b (t)','horizontal asymptote')

figure(5)
plot(t,I4_abab,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_4 ^a^b^a^b (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_4 ^a^b^a^b (t) ; relaxation
time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I4_abab,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_4 ^a^b^a^b (t)','slant asymptote')
```

```
figure(6)
plot(t,I4_abba,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_4 ^a^b^b^a (t)')
title(['Graph of normalized tensor function I_4 ^a^b^b^a (t) ; relaxation
time \tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I4_abba,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_4 ^a^b^b^a (t)','horizontal asymptote')

figure(7)
plot(t,I2_abba-I2_abab,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_2 ^a^b^b^a (t) - I_2 ^a^b^a^b (t)')
title(['Graph of the difference I_2 ^a^b^b^a (t) - I_2 ^a^b^a^b (t) ;
\tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I2_abba-Asy_I2_abab,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_2 ^a^b^b^a (t) - I_2 ^a^b^a^b (t)','parabolic asymptote')

figure(8)
plot(t,I4_abba-I4_abab,'linewidth',2)
xlabel('t (seconds)')
ylabel('I_4 ^a^b^b^a (t) - I_4 ^a^b^a^b (t)')
title(['Graph of the difference I_4 ^a^b^b^a (t) - I_4 ^a^b^a^b (t) ;
\tau_B='...
    ,num2str(tauB),' sec'])
hold on
plot(t,Asy_I4_abba-Asy_I4_abab,'--r','linewidth',2);
hold off
legend('I_4 ^a^b^b^a (t) - I_4 ^a^b^a^b (t)','slant asymptote')
```

מקורות :

[1] ***RANDOM MATRICES,*** ***Third Edition***, ***Madan Lal Mehta.***
Saclay, Gif-sur-Yvette, France . Chapters: 2 & 3

[2] ***Matrix Theory over the Complex Quaternion Algebra ,***
Yongge Tian , Department of Mathematics and Statistics , Queen's University, Ontario, Canada .

[3] ***Products of Random Matrices in Statistical Physics,***
A. Crisanti G. Paladin A. Vulpiani. Chapter 5 : 5.1 , 5.1.1

[4] ***Products of Random Matrices with Applications to Schrodinger Operators.*** ***Philippe Bougerol, Jean Lacroix.***
Chapter I ***:*** $I.1$, $I.2$

[5] ***Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis ,***
Murray R.Spiegel , Schaum's Out-Lines . Chapters : 7 & 8

[6] ***Mathematical Handbook for Scientists and Engineers ,***
Granino A.Korn and Theresa M.Korn , Chapters : 6 & 16

[7] ***An article about Brownian Motion:*** ***http://arxiv.org/pdf/1211.5799.pdf***
"Brownian motion of free particles on curved surfaces"