אורט בראודה
המכללה האקדמית להנדסה
ORT Braude College

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

פולינומי בל

חיכמת מסרי

Bell Polynomials

Hekmat Masri

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

פולינומי בל

חיכמת מסרי

Bell Polynomials

Hekmat Masri

Advisor:	**מנחה:**
Prof. Mark Elin	פרופ' מרק ילין

Karmiel	**כרמיאל**

2021

תוכן עניינים

הקדמה

פולינומי בל - Bell Polynomials:

פולינומי בל קיבלו שם לכבוד המתמטיקאי האמריקאי אריק טמפל בל שהיה הראשון שהגדיר אותם ופירסם אותם במאמרו "Exponential Polynomials" בשנת 1934. הם נחקרו על ידיו ואחר כך ע"י מתמטיקאים רבים. פולינומי בל מופיעים כאחד מהכלים המתמטיים והם מופיעים גם ביישומים רבים כמו למשל בנוסחה של פא די ברונו. פולינומי בל נחשבים גם לכלים קומבינטוריים חשובים ומיושמים במסגרות רבות ושונות, כמו למשל: הערכה של אנטגרלים וסכומים משתנים, היחסים הפנימיים של שמורות (אינווריטים) אורתוגונליים של אופרטור קומפקטי חיובי, Blissard problem (בעית ביסר), כללי הסכום של ניוטון עבור האפסים של פולינומים, יחסי ההישנות לפולינום מסוג פרויד ונושאים אחרים רבים (Mihoubi, M. (2008) [1]).

פולינום בל מתחלק לשני סוגים, פולינום בל האקספוננציאלי ופולינום בל הרגיל. קיים קשר כלשהו בין שני הסוגים אך משום מה הפולינום האקספוננציאלי זכה ליותר התייחסות בספרות המדעית, ולכן, בעבודה זו בחרתי להתעמק יותר בפלינום בל הרגיל בהסתמך על פולינום בל האקספוננציאלי וכלים מתמטיים.

1. הגדרות ראשוניות:

פולינומי בל מחולקים לשני סוגים: אקספוננציאלי (exponential) ורגיל (ordinary). (Birmajer, D., Gil, J. B., & Weiner, M. D. (2012) [2]).

1. **פולינום בל אקספוננציאלי (Exponential):**

יהיו $n, k \in N$ כך ש- $n > k - 1$. נגדיר את:

I. **פולינום בל האקספוננציאלי <u>החלקי</u>**:

(1) $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \cdot \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$

הסכום הינו על j-ים המקיימים את התנאים הבאים:

(2) $$\begin{cases} j_i \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n \end{cases}$$

II. **פולינום בל האקספוננציאלי <u>השלם</u>:**

(3) $B_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$

2. **פולינום בל רגיל (Ordinary):**

באותו אופן נגדיר את **פולינום בל הרגיל <u>החלקי</u>**:

יהיו $n, k \in N$ כך ש- $n > k - 1$, אז:

(4) $B^{o}_{n,k}(x_1, x_2, \dots x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{k!}{j_1! j_2! \cdot \dots \cdot j_{n-k+1}!} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \dots \cdot x_{n-k+1}^{j_{n-k+1}}$

כנ"ל, הסכום הינו על j-ים המקיימים את (2):

(2) $$\begin{cases} j_i \geq 0 \\ j_1 + j_2 + \dots + j_{n-k+1} = k \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots + (n-k+1)j_{n-k+1} = n \end{cases}$$

טענה 1: אפשר לבטא את פולינום בל הרגיל בעזרת פולינום בל אקספוננציאלי על ידי הנוסחה הבאה:

(5) $B^{o}_{n,k}(x_1, x_2, \dots x_{n-k+1}) = \frac{k!}{n!} B_{n,k}(1!\, x_1, 2!\, x_2, \dots, (n-k+1)!\, x_{n-k+1})$

ניתן להוכיח זאת (ראה הוכחה **[1]** בנספח 1).

מזה נובע גם ההפך:

(6) $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \frac{n!}{k!} B^{o}_{n,k}\left(\frac{x_1}{1!}, \frac{x_2}{2!}, \dots, \frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right).$

דוגמא 1:

נחשב את פולינום בל האקספוננציאלי עבור : $n=3\,,k=2$ נקבל: $n-k+1=2$, זאת אומרת יש לנו פולינום בל עם שני משתנים x_1,x_2 :

$$B_{3,2}(x_1,x_2)=\sum_j \frac{3!}{j_1!\,j_2!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2}$$

כך שלפי מערכת (2) מתקיימים התנאים הבאים :

$$\begin{cases} j_1, j_2 \geq 0 \\ j_1+j_2=2 \\ j_1+2j_2=3 \end{cases}$$

נבדוק את כל האפשרויות של j_1,j_2 המקיימות : $j_1+j_2=2$

j	ערכים אפשריים של j		
j_1	0	1	2
j_2	2	1	0
j_1+2j_2	4	3	2

האפשרות היחידה שמקיימת את כל התנאים היא $j_1=j_2=1$.

ולכן :

$$B_{3,2}(x_1,x_2)=\sum_j \frac{3!}{1!\,1!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{1}=3x_1x_2$$

2. הקשר בין פולינום בל לקומבינטוריקה:

לפולינומי בל קיימת משמעות קומבינטורית כך שהפולינומים האקספוננציאליים של בל (Bell) מסייעים בהבנת הצורה וההתנהגות של חלוקות הקבוצות.

הגדרה 1: תהי A קבוצה כלשהי בעלת n איברים.

נאמר כי B היא **בלוק (BLOCK)** של A אם: $B \neq \emptyset$ ו- $B \subsetneq A$.

דוגמא 2: תהי A קבוצה בעלת 3 איברים (n=3): $A = \{x, y, z\}$.

תתי הקבוצות הבאות: $B_1 = \{x, y\}$, $B_2 = \{z, y\}$, $B_3 = \{y\}$ הם בלוקים של A, אך הקבוצות:

$B_4 = \emptyset$, $B_5 = \{x, y, x\}$ אינם בלוקים של A.

כעת, נרצה לחלק את הקבוצה A ל- k בלוקים <u>זרים</u>. לדוגמא, עבור k=2 קיימות 3 חלוקות אפשריות:

חלוקה 1: $\{\{x\}, \{y, z\}\}$

חלוקה 2: $\{\{y\}, \{x, z\}\}$

חלוקה 3: $\{\{z\}, \{x, y\}\}$

בלוק שני   בלוק ראשון

הפולינום $B_{n,k}$ מכיל מידע על מספר האפשרויות לחלוקת קבוצה בעלת n איברים ל- k בלוקים. ניתן לשלוף מידע זה מהפולינום באופן הבא:

a. המקדם של x_i מציין את כמות החלוקות האפשריות.
b. הביטוי x_i מציין שקיים בלוק עם i איברים לחלוקה.
c. הביטוי x_i^j מציין שקיימים j בלוקים בגודל i באותה חלוקה.

נמחיש זאת בעזרת הדוגמא שלנו: $A = \{x, y, z\}$

חלוקה 1: $\{\{x\}, \{y, z\}\}$

חלוקה 2: $\{\{y\}, \{x, z\}\}$

חלוקה 3: $\{\{z\}, \{x, y\}\}$

לפי דוגמא 1 פולינום בל האקספוננציאלי עבור $n = 3$, $k = 2$ הוא: $B_{3,2}(x_1, x_2) = 3x_1x_2$. המשמעות של הפולינום היא כי קיימות 3 אפשרויות לחלק קבוצה עם 3 איברים ל- 2 בלוקים, כאשר בכל חלוקה יש בלוקים בגודל 1 ו- 2.

מקרים מיוחדים:

- כדי לחלק את קבוצה A בעלת n איברים לתת קבוצה אחת, קיימת רק אפשרות אחת והיא: $A=\{\{A_1,A_2,\dots,A_n\}\}$. במילים אחרות, במונחים של פולינום בל: $B_{n,1}=x_n=1\cdot x_n$.
- קיימת רק אפשרות אחת לחלק את קבוצה A בעלת n איברים ל- n בלוקים זרים והיא: $A=\{\{A_1\},\{A_2\},\dots,\{A_n\}\}$. כלומר $B_{n,n}=x_1^n$.

<u>מונח</u>: קבוצה בעלת איבר אחד נקראת **סינגלטון Singleton**.

שאלה: מה הקומבינטוריקה מאחורי הביטוי הבא?

$$B_{6,2}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=6x_5x_1+15x_4x_2+10x_3^2$$

תשובה:

קיימות 3 אפשרויות לחלוקות:

(1) קיימות 6 חלוקות שכל חלוקה מכילה שני בלוקים זרים; הראשון כולל 5 איברים והשני כולל איבר אחד.

או

(2) 15 חלוקות שמכילות שני בלוקים; אחד כולל 4 איברים והשני כולל 5 איברים.

או

(3) 10 חלוקות שמכילות 2 בלוקים בגודל 3 כל אחד.

3. שימושים של פולינום בל

3.1 הקשר בין פולינומי בל לנגזרות:

I. <u>הקשר בין פולינום בל אספוננציאלי חלקי לנגזרת:</u>

איך מחשבים את הנגזרת מסדר n של פונקציה מורכבת?!

הנוסחה של פא- די-ברונו (על שם פרנצ׳סקו פא-די-ברונו (1855, 1857)) נותנת משוואה מפורשת המכלילה את כלל השרשרת לנגזרות גבוהות. הנוסחה קיבלה את השם של פא- די-ברונו למרות שהיא נקבעה לראשונה על ידי ארבוגסט בשנת 1800, יותר מ- 50 שנה לפני פא-די-ברונו ([3] Frabetti, A., & Manchon, D. (2014)).

❖ **נוסחת Faa Di Bruno של פולינום בל אקספוננציאלי חלקי:**

<u>משפט 1</u>: בהינתן שתי פונקציות $f,g: R \to R$ שגזירות n פעמים מתקיים:

$$\frac{d^n}{dx^n} f\big(g(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\big(g(x)\big) B_{n,k}(g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n-k+1)}(x))$$

דוגמא 3: לגזור את הפונקציה $F(x)$ הבאה 3 פעמים בעזרת הנוסחה של פא-די-ברונו:

נתחיל מגזירה ידנית לפי כלל השרשרת:

$$\boldsymbol{F(x) = e^{x^3}}$$

$$F'(x) = e^{x^3} \cdot (x^3)' = e^{x^3} 3x^2$$

$$F''(x) = 6xe^{x^3} + 3x^2 \cdot 3x^2 e^{x^3} = e^{x^3}(6x + 9x^4)$$

$$F^{(3)}(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2(6x + 9x^4) + e^{x^3}(6 + 36x^3) = e^{x^3}(54x^3 + 27x^6 + 6)$$

כעת נגזור את הפונקציה בעזרת הנוסחה של פא-די-ברונו:

$$\boldsymbol{F(x) = e^{x^3}}$$

פתרון:

$$F(x) = e^{x^3} = f(g(x))$$

$$f(t) = e^t \qquad , \qquad g(y) = y^3$$

$$f'(t) = e^t \qquad , \qquad g'(y) = 3y^2$$

$$f''(t) = e^t \qquad , \qquad g''(y) = 6y$$

$$f'''(t) = e^t \qquad , \qquad g'''(y) = 6$$

עבור $n=1$:

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot B_{1,1}(g'(x))$$

כאשר $B_{1,1}(x_1) = x_1$

$$=> F'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$$

עבור $n=2$:

$$\frac{d^2}{dx^2} f\big(g(x)\big) = F''(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot B_{2,1}\big(g'(x), g''(x)\big) + f''\big(g(x)\big) \cdot B_{2,2}\big(g'(x)\big)$$

כאשר $B_{2,2}(x_1) = x_1^2 \qquad B_{2,1}(x_1, x_2) = x_2$

$$=> F''(x) = e^{x^3} B_{2,1}(3x^2, 6x) + e^{x^3} B_{2,2}(3x^2) = e^{x^3}(6x + 9x^4)$$

עבור $n=3$:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3} f\big(g(x)\big) &= F'''(x) \\ &= f'\big(g(x)\big) \cdot B_{3,1}\big(g'(x), g''(x), g'''(x)\big) + f''(g(x)) \cdot B_{3,2}\big(g'(x), g''(x)\big) \\ &+ f'''(g(x)) \cdot B_{3,3}(g'(x))\end{aligned}$$

כאשר $B_{3,3}(x_1) = x_1^3 \qquad B_{3,2}(x_1, x_2) = 3x_1 x_2 \qquad B_{3,1}(x_1, x_2, x_3) = x_3$

$$=> F'''(x) = e^{x^3} B_{3,1}(3x^2, 6x, 6) + e^{x^3} \cdot B_{3,2}(3x^2, 6x) + e^{x^3} \cdot B_{3,3}(3x^2) =$$
$$= e^{x^3}(6 + 3 \cdot 3x^2 \cdot 6x + (3x^2)^3) = e^{x^3}(6 + 54x^3 + 27x^6)$$

II. <u>הקשר בין פולינום בל רגיל חלקי לנגזרת:</u>

ניתן לבטא את נוסחת פא-דה-ברונו עבור פולינום בל רגיל חלקי בעזרת שימוש בנוסחה (6) :

❖ **נוסחת Faa Di Bruno של פולינום בל רגיל חלקי:**

<u>**משפט 2**</u>**:** בהינתן שתי פונקציות $f,g:R\to R$ שגזירות n פעמים מתקיים :

$$\frac{d^n}{dx^n}f\big(g(x)\big)=n!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}\big(g(x)\big)}{k!}B_{n,k}^{o}\left(\frac{g'(x)}{1!},\frac{g''(x)}{2!},\dots,\frac{g^{(n-k+1)}(x)}{(n-k+1)!}\right)$$

3.2 הקשר בין פולינום בל הרגיל לבין טור טיילור:

המשפט הבא התקבל כמסקנה ממשפט 2 במאמר של Mark Elin and Fiana Jacobzon [4] והוא מראה לנו שבהינתן שתי פונקציות אנליטיות, ניתן לבטא את מקדמי טיילור של הרכבת הפונקציות בעזרת פולינומי בל רגילים חלקיים.

משפט 3: יהיו $g(x) \in Hol(D), h \in Hol(D,C)$ פונקציות עם טורי טיילור $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$, $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ בהתאמה. נגדיר את פונקצית ההרכבה $F(x) = h \circ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ אז:

$c_0 = h(0)$ ו- $c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_k B_{n,k}^{o}(u_1, u_2, \dots, u_{n-k+1})$ לכל n=1,2,3,....

משפט 4: לכל $u, b \in R$ ולכל $n \in N$ מתקיים הקשר הבא:

$$\sum_{k=0}^{n} u^k B_{n,k}^{o}(b_1, \dots, b_{n-k+1}) = u\Delta_n(u,b)$$

כאשר:

$$\Delta_n(u,b) = det\begin{pmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & uzb_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & ub_{n-2} & ub_{n-3} & \dots & -1 \\ b_n & ub_{n-1} & ub_{n-2} & \dots & ub_1 \end{pmatrix}$$

הוכחה:

נתבונן בקשר הבא: $\mathrm{F(x)} = \frac{1}{1-\mathrm{uw(x)}} \iff \mathrm{F(x)(1-uw(x))} = 1$ כאשר $\mathrm{F(x), w(x)}$ הן פונקציות אנליטיות.

תחילה ננסה למצוא את מקדמי טיילור של פונקציית ההרכבה על ידי הצבת טורי טיילור של $F(x)$ ושל $\mathrm{w(x)}$ בתוך $\mathrm{F(x)(1-uw(x))} = 1$ והשוואת מקדמים (כלומר בלי התייחסות למשפטים).

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$

$$\mathrm{F(x)(1-uw(x))} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot \left(1 - u\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = 1$$

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots)(1 - ub_1 x - ub_2 x^2 - ub_3 x^3 - \cdots) = 1$$

מהשוואת מקדמים נקבל כי :

$c_0 = 1$	מקדם חופשי
$c_1 - c_0 u b_1 = 0$	מקדם של x
$c_2 - c_1 u b_1 - c_0 u b_2 = 0$	מקדם של x^2
$c_3 - c_2 u b_1 - c_1 u b_2 - c_0 u b_3 = 0$	מקדם של x^3

…

$c_n - c_{n-1} u b_1 - c_{n-2} u b_2 - \cdots - c_0 u b_n = 0$ מקדם של x^n

⇨ $c_n - u\sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k} = 0$

⇨ $c_n = u\sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}$

ולכן פתרון מערכת המשוואות הנ״ל ניתן על ידי הקשר הרקורסיבי הבא :

$$(*)\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = u b_1 \\ c_n = u\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k} \end{cases}$$

כעת נתייחס למשפטים, נכתוב את F כהרכבה של שתי פונקציות : $F(x) = h(g(x))$ כאשר :

$$h(z) = \frac{1}{1-uz} \underset{\text{טור גיאומטרי}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (uz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} u^n z^n$$

$$g(z) = w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

נסמן : $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ אז לפי משפט 3 :

$$(**)\begin{cases} c_0 = h(0) = \dfrac{1}{1-0} = 1 \\ c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k B_{n,k}^{o}(b_1, b_2, \dots, b_{n-k+1}) \end{cases}$$

נוכל לבטא את (*) באמצעות משוואה מטריציונית:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = c_0 u b_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n = u \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -ub_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -ub_2 & -ub_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ub_{n-1} & -ub_{n-2} & -ub_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ub_1 \\ ub_2 \\ ub_3 \\ \vdots \\ ub_n \end{pmatrix}$$

נמצא את c_n לפי שיטת קרמר: $c_n = u\frac{\Delta_n}{\Delta}$

$$\Delta = \underbrace{det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -ub_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -ub_2 & -ub_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ub_{n-1} & -ub_{n-2} & -ub_{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{נסמן ב- A}} = 1$$

$\Delta = \det(A) = 1$ (A הינה מטריצה משולשת תחתונה)

ו-

$$\Delta_n = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ -ub_1 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -ub_{n-2} & -ub_{n-3} & \dots & 1 & b_{n-1} \\ -ub_{n-1} & -ub_{n-2} & \dots & -ub_1 & b_n \end{pmatrix}$$

"נזיז" את העמודה האחרונה להיות העמודה הראשונה ונכפיל את שאר העמודות ב- (-1). נקבל:

$$\Delta_n = det\begin{pmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & ub_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & ub_{n-2} & ub_{n-3} & \dots & -1 \\ b_n & ub_{n-1} & ub_{n-2} & \dots & ub_1 \end{pmatrix} = \Delta_n(u,b)$$

בסה"כ נקבל: $\sum_{k=0}^{n} u^k B^o_{n,k}(b_1, \dots, b_{n-k+1}) = c_n = u\Delta_n(u,b)$

מ.ש.ל

בדיקה: מהשוואה בין התוצאות שקבלנו ב- (*) ו- (**) נובע כי:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = uB^o_{1,1}(b_1) = ub_1 \checkmark$$
$$c_2 = uB^o_{2,1}(b_1, b_2) + u^2 B^o_{2,2}(b_1) = ub_2 + u^2 b_1^2 = ub_2 + c_1 ub_1 = ub_2 + u^2 b_1^2 \checkmark$$

(ראה חישובים של ערכי הפולינום בנספח 3)

כעת נקבע u=1 ונקבל מקרה פרטי של משפט 4:

מסקנה:

עבור u=1 נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n} B^o_{n,k}(b_1, \dots, b_{n-k+1}) = \Delta_n(1,b)$$

כאשר:

$$\Delta_n(1,b) = det\begin{pmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות בנספח 2 סעיף [1] דוגמא לחישוב הדטרמיננטה בעזרת פונקצית מטל"ב עבור $n = 3$ ו- u כללי.

3.3 הקשר בין פולינום בל רגיל לבין פונקציה יוצרת

בספרות המדעית, עבור פולינומי בל הרגילים, לא קיימת הגדרה אחת שמקובלת על כולם של המושגים ״פולינום שלם״ ו- ״פונקציה יוצרת עבור פולינום שלם״, ולכן ניתן לבטא את פולינום בל הרגיל בעזרת פונקציה יוצרת בשתי צורות:

הגדרה 2: נגדיר ״פולינום בל רגיל שלם ראשון״ על ידי $B_n^{(1)}(u,x)=\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}^{o}(x)\frac{u^k}{k!}$ כאשר $n,k\in N$, $u\in R$.

הגדרה 3: פונקציה יוצרת המתאימה לפולינום בל רגיל שלם ראשון ניתנת על ידי:

$$\Phi^{(1)}(\mathrm{t},\mathrm{u})=1+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}B_n^{(1)}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{t}^{\mathrm{n}}$$

לֶמה 1: אם $a(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}$, $b(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{t^n}{n!}$, $c(t)=a(t)\cdot b(t)$. אז:

$c(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}$, $c_n=\sum_{k=0}^{\mathrm{n}}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$

הוכחה: לפי מכפלת קושי של טורי חזקות.

חישוב עזר 1: נרצה להראות כי מתקיים הקשר הבא: $\Phi^{(1)}(\mathrm{t},\mathrm{u})=\exp(u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j)$:

$$\text{אגף ימין}=\exp(u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)^k\overset{*}{=}$$

ניעזר בשוויון הידוע הבא (מתוך ויקיפדיה [6]):

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)^k=\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}^{o}(x)t^n$$

$$\overset{*}{=}1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}^{o}(x)t^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}^{o}(x)\frac{u^k}{k!}=$$

נחליף סדר סכימה

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}t^nB_n^{(1)}(u,x)=\Phi^{(1)}(\mathrm{t},\mathrm{u})=\text{אגף שמאל}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^{(1)}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = \exp(u\sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j)$$

<u>משפט 5</u>: לכל $n,k \in N$ ולכל $u,v \in R$ מתקיים הקשר הבא:

$$B_n^{(1)}(u+v,x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{(1)}(u,x)\, B_{n-k}^{(1)}(v,x)$$

הוכחה:

נשתמש בחישוב עזר 1 ונקבל:

$$\Phi^{(1)}(t,u+v) = \exp\left((u+v)\cdot\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{x_j}\, \mathrm{t^j}\right) = \exp\left(u\cdot\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{x_j}\, \mathrm{t^j}\right)\cdot\exp\left(v\cdot\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{x_j}\, \mathrm{t^j}\right) =$$

$$= \Phi^{(1)}(t,u)\cdot\Phi^{(1)}(t,v)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)}(u+v,x)t^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(1)}(u,x)t^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{(1)}(v,x)t^l = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} B_k^{(1)}(u,x)B_{n-k}^{(1)}(v,x)$$

לפי למה 1 נובע כי:

$$B_n^{(1)}(u+v,x) = \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k^{(1)}(u,x)\, B_{n-k}^{(1)}(v,x).$$

מ.ש.ל

וזהו אנלוג למשפט 2 במאמר (Wheeler, F. S. (1987) **[5]**).

<u>הגדרה 4</u>: נגדיר "פולינום בל רגיל שלם שני" על ידי: $B_n^{(2)}(u,x) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}^{o}(x)u^k$.

<u>הגדרה 5</u>: פונקציה יוצרת המתאימה לפולינום בל רגיל שלם שני ניתנת על ידי:

$$\Phi^{(2)}(\mathrm{t},\mathrm{u}) = 1 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{B_n^{(2)}}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{t^n}$$

המשפט הבא מאפשר לנו למצוא קשר חדש עבור פולימום בל רגיל שלם:

משפט 6: לכל $n \in N$ מתקיים הקשר הבא:

$$B_n^{(2)}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j}\right)_{t=0}$$

וזהו ביטוי מקובל לפולינום בל רגיל שלם שני.

הוכחה:

תחילה נתבונן בפונקציה יוצרת של $B_n^{(2)}$:

$$\Phi^{(2)}(\mathrm{t},\mathrm{u})=1+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{B}_{\mathrm{n}}^{(2)}(\mathrm{u},\mathrm{x})\mathrm{t}^{\mathrm{n}}=1+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}^{o}(x)u^k\,\mathrm{t}^{\mathrm{n}}$$

$$=1+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{t}^{\mathrm{n}}\sum_{k=1}^{n}B_{n,k}^{o}(x)u^k$$

נשים לב כי על ידי טריקים דומים שעשינו בהוכחת משפט 4, נקבל כי:

$$.\ \Phi^{(2)}(t,u)=\frac{1}{1-u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j}$$

ולכן, באופן שקול, על ידי השוואת החזקה ה k-ית של שני האגפים נקבל את הקשר הבא:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)^k=\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}^{o}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})t^n\quad,\qquad k\in N$$

נבצע סכימה עבור k:

סכימה עבור
k=0,1,2,3,...

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j\right)^k=\frac{1}{1-u\sum_{j=1}^{\infty}x_jt^j}=\sum_{k=1}^{\infty}u^k\sum_{n=k}^{\infty}B_{n,k}^{o}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})t^n$$

יש לנו סכימה לפי קבוצת אינדקסים $\{k\geq 1,n\geq k\}=\{n\geq 1,1\leq k\leq n\}$. נשתמש בזה כדי להחליף סדר הסכימה: $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}$ ואז הסכום הפנימי הוא $B_n^{o}(x_1,\ldots,x_n)$:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=1}^{n} u^k B_{n,k}^{o}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)}(u,x) t^n$$

$$\Rightarrow \quad B_n^{(2)}(u,x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{1 - u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j} \right)_{t=0}$$

מ.ש.ל

<u>מסקנה:</u> על ידי שילוב המשפטים 4 ו 6 נקבל את הקשר הבא:

$$\frac{1}{1 - u \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(2)}(u,x) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} u \Delta_n(u,x) t^n$$

כאשר

$$\Delta_n(u,x) = det \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & ux_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & ux_{n-2} & ux_{n-3} & \dots & -1 \\ x_n & ux_{n-1} & ux_{n-2} & \dots & ux_1 \end{pmatrix}$$

בסעיף [2] של נספח 2, ניתן לראות דוגמא לחישוב הביטוי $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n!}} \frac{\partial^{n}}{\partial t^{\mathbf{n}}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j} \right)_{t=0}$ בעזרת פונקציות מטלב עבור n=3.

נספח 1: הוכחות

[1] טענה 1: אפשר לבטא את פולינום בל הרגיל בעזרת פולינום בל אקספוננציאלי על ידי הנוסחה הבאה:

$$B^{o}_{n,k}(x_1, x_2, \dots x_{n-k+1}) = \frac{k!}{n!} B_{n,k}(1!\,x_1, 2!\,x_2, \dots, (n-k+1)!\,x_{n-k+1})$$

הוכחה:

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{n!}{j_1! \cdot \dots \cdot j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$$

נציב $(1!\,x_1, 2!\,x_2, \dots, (n-k+1)!\,x_{n-k+1})$ במקום $(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$, נקבל:

$$B_{n,k}(1!\,x_1, 2!\,x_2, \dots, (n-k+1)!\,x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{n!}{j_1! \cdot \dots \cdot j_{n-k+1}!} \left(\frac{1!\,x_1}{1!}\right)^{j_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{(n-k+1)!\,x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$$

$$B_{n,k}(1!\,x_1, 2!\,x_2, \dots, (n-k+1)!\,x_{n-k+1}) = \sum_j \frac{n!}{j_1! \cdot \dots \cdot j_{n-k+1}!} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_{n-k+1}^{j_{n-k+1}}$$

נכפיל ב- $\frac{k!}{n!}$ נקבל:

$$\frac{k!}{n!} B_{n,k}(1!\,x_1, 2!\,x_2, \dots, (n-k+1)!\,x_{n-k+1}) = B^{o}_{n,k}(x_1, x_2, \dots x_{n-k+1})$$

מ.ש.ל

מזה נובע גם היפוך: $B_{n,k}\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}\right) = \frac{n!}{k!} B^{o}_{n,k}\left(\frac{x_1}{1!}, \frac{x_2}{2!}, \dots, \frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)$.

נספח 2: פונקציות מטל״ב

[1] פונקצית מטל״ב לחישוב הדטרמיננטה $\Delta_{n=3}(u,b)$:

$$\Delta_n(u,b) = det\begin{pmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & ub_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & ub_{n-2} & ub_{n-3} & \dots & -1 \\ b_n & ub_{n-1} & ub_{n-2} & \dots & ub_1 \end{pmatrix}$$

```
clear all;

% create symbolic variables
n   =   3;
X   =   sym('x', [1 n]);
syms u;

% Constructing the matrices
Mat_X = sym('Mat_X', [n n]);

for row = 1: n
    for column = 2 : n
        if column <= row
            Mat_X(row, column) = u*X(row - column + 1);
        elseif column == row + 1
            Mat_X(row, column) = -1;
        else
            Mat_X(row, column) = 0;
        end
    end
    Mat_X(row, 1)  = X(row);
end

% Calculating and printing the determinant
fprintf('The determinant of order %d is: \n%s\n', n,
char(det(Mat_X)));
```

[2] פונקצית מטל״ב לחישוב הביטוי $\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{\infty} x_j t^j}\right)_{t=0}$:

```
clear all;

% create symbolic variables x1,...,xj
j  =  100;
X  =  sym('x', [1 j]);

% Defining the generating function
syms t;
syms u;
powers                      =      t.^linspace(1, j, j);
geometric_sum(t)            =      X * powers.';
generating_function(t)      =      1 / (1 - u*geometric_sum(t));

% Order of differentiation at zero
n    =  3;
derivative   =  1/factorial(n) *
vpa(subs(diff(generating_function, t, n), t, 0));
print = 'The derivative (divided by %d factorial) of order %d
at t=0 is: \n%s\n';
fprintf(print, n, n, char(derivative));
```

נספח 3: חישוב ערכים של פולינום בל רגיל חלקי

(1) $B_{1,1}^{o}(x_1) = \sum \frac{1!}{j_1!} x_1^{j_1}$

$\begin{cases} j_1 = 1 \\ j_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow j_1 = 1$

ולכן: $\boldsymbol{B_{1,1}^{o}(x_1) = x_1}$

(2) $B_{2,1}^{o}(x_1, x_2) = \sum \frac{1!}{j_1! j_2!} x_1^{j_1} x_2^{j_2}$

$\begin{cases} j_1 + j_2 = 1 \\ j_1 + 2j_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_2 = 1 \\ j_1 = 0 \end{cases}$ פתרון יחיד

ולכן: $\boldsymbol{B_{2,1}^{o}(x_1, x_2) = x_2}$

(3) $B_{2,2}^{o}(x_1) = \sum \frac{2!}{j_1!} x_1^{j_1}$

$\begin{cases} j_1 = 2 \\ j_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow j_1 = 2$

ולכן: $\boldsymbol{B_{2,2}^{o}(x_1) = x_1^2}$

(4) $B_{3,1}^{o}(x_1, x_2, x_3) = \sum \frac{1!}{j_1! j_2! j_3!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^{j_3}$

$\begin{cases} j_1 + j_2 + j_3 = 1 \\ j_1 + 2j_2 + 3j_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_1 = j_2 = 0 \\ j_3 = 1 \end{cases}$ פתרון יחיד

ולכן: $\boldsymbol{B_{3,1}^{o}(x_1) = x_3}$

(5) $B_{3,2}^{o}(x_1, x_2) = \sum \frac{2!}{j_1! j_2!} x_1^{j_1} x_2^{j_2}$

$\begin{cases} j_1 + j_2 = 2 \\ j_1 + 2j_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_1 = 1 \\ j_2 = 1 \end{cases}$ פתרון יחיד

ולכן: $$\boldsymbol{B^{o}_{3,2}(x_1, x_2) = 2x_1x_2}$$

(6) $B^{o}_{3,3}(x_1) = \sum \frac{3!}{j_1!} x_1^{j_1}$

$\begin{cases} j_1 = 3 \\ j_1 = 3 \end{cases} \Longrightarrow j_1 = 3$

ולכן: $$\boldsymbol{B^{o}_{3,3}(x_1) = x_1^3}$$

ביבליוגרפיה

1. Mihoubi, M. (2008). Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Mathematics*, *308*(12), 2450-2459.
2. Birmajer, D., Gil, J. B., & Weiner, M. D. (2012). Some convolution identities and an inverse relation involving partial Bell polynomials. *arXiv preprint arXiv:1211.4881*.
3. Frabetti, A., & Manchon, D. (2014). Five interpretations of Fa\a di Bruno's formula. *arXiv preprint arXiv:1402.5551*.
4. Mark Elin and Fiana Jacobzon. Estimates For Taylor Coefficients For A Family Of Inverse Functions And Rigidity
5. Wheeler, F. S. (1987). Bell polynomials. *Acm Sigsam Bulletin*, *21*(3), 44-53.
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_polynomials