

המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

**אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות בעיגול היחידה
במישור המרוכב**

נור נסראלדין

**Inequalities for analytic functions in the unit disk
of the complex plane**

Noor Naseraldin

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

**אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות בעיגול היחידה
במישור המרוכב**

נור נסראלדין

**Inequalities for analytic functions in the unit disk
of the complex plane**

Noor Naseraldin

Advisor:

Name

מנחה:

מרינה לוינסטיין

Karmiel

כרמיאל

מבוא.....	4
1. אי-שוויונים עבור ערכים של פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו בנקודות פנימיות.....	5
1.1 למה של שוורץ.....	5
1.2 שוורץ-פיק למה (The Schwarz-Pick Lemma).....	6
1.3 אי-שוויונים נוספים (מסקנות משוורץ למה ושוורץ-פיק למה).....	9
1.4 שוורץ-פיק למה במטריקה ההיפרבולית של פוינקרה.....	10
2. אי-שוויונים מפורסמים עבור ערכים של פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו בנקודות השפה.....	13
2.1 משפט Denjoy-Wolff.....	14
2.2 פסידו-מטריקה היפרבולית (Hyperbolic pseudo-metric).....	15
2.3 למה של Julia (Julia's Lemma).....	16
3. אי-שוויונים עם נגזרות בנקודות השפה של עיגול היחידה.....	19
3.1 אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו.....	19
3.2 אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו.....	20
4. מציאת אי-שוויונים עבור יוצרים של חצי-אגודות על בסיס אי-שוויונים ידועים עבור פונקציות אנליטיות פנימיות חד-חד ערכיות.....	22
4.1 תיאור השיטה.....	22
4.2 שימוש בשיטה על בסיס משפט Shinji Yamashita עבור פונקציות חד-חד ערכיות.....	24
4.3 דוגמה נוספת.....	28
5. שימוש באי-שוויונים עבור יוצרים בהוכחה של אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו (לא בהכרח חד-חד ערכיות).....	29
5.1 תיאור השיטה.....	29
5.2 מציאת אי-שוויונים חדשים בנקודות פנימיות על בסיס שימוש בשיטה.....	30
5.3 מציאת אי-שוויונים בנקודות השפה עבור פונקציות אנליטיות עם תמונה שלא מפרידה את ראשית הצירים והשפה.....	33
5.4 מציאת אי-שוויונים בנקודות פנימיות עבור פונקציות אנליטיות עם תמונה שלא מפרידה את ראשית הצירים והשפה.....	34
ביבליוגרפיה.....	36

בעבודה זאת אנחנו מתארים שיטה אחת על מנת למצוא אי-שוויונים עבור ערכים של פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ במישור המרוכב $\mathbb{C}$ לתוך עצמו (לא בהכרח חד-חד ערכיות) ועבור נגזרות שלהן בנקודות פנימיות של העיגול ובנקודות השפה. השיטה מתבססת על שימוש בחצי-אגודות חד-פרמטריות [SD2001, BP1978] בעיגול היחידה ותוצאות ידועות עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות מ- Δ ל- Δ [לדוגמה, CP1982, Y1997, PV2002, CDV2007]. השיטה מאפשרת גם להעריך ערכים של יוצרים של חצי-אגודות ונגזרות של היוצרים בנקודות בתוך עיגול היחידה ועל השפה.

בפרק 1 אנחנו מציגים אי-שוויונים מפורסמים עבור פונקציות אנליטיות פנימיות של עיגול היחידה בנקודות בתוך העיגול (Schwarz-Pick Lemma, Schwarz Lemma ומסקנות) ותיאור גיאומטרי שלהם על בסיס מטריקה היפרבולית של פוינקרה [SD2001, GR1984].

בפרק 2 אנחנו מדסקסים הערכות מפורסמות בנקודות השפה של עיגול היחידה (Denjoy-Wolff Theorem, Julia's lemma) ותיאור גיאומטרי שלהן על בסיס פסידו-מטריקה היפרבולית [SD2001, W1926, J1920].

בפרק 3 אנחנו מציגים אי-שוויונים מפורסמים עבור נגזרות של פונקציות אנליטיות פנימיות בנקודות השפה של עיגול היחידה [O2000], וגם אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות פנימיות וחד-חד ערכיות והנגזרות שלהן בנקודות השפה של עיגול היחידה [YG1997, CP1982].

בפרק 4 אנחנו מתארים את השיטה למציאת אי-שוויונים חדשים עבור יוצרים של חצי-אגודות מאי-שוויונים ידועים עבור פונקציות אנליטיות פנימיות חד-חד ערכיות, ובפרק 5 אנחנו משתמשים באי-שוויונים עבור יוצרים על מנת למצוא אי-שוויונים חדשים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו (לא בהכרח חד-חד ערכיות) בנקודות פנימיות ובנקודות השפה של עיגול היחידה.

1. אי-שוויונים עבור ערכים של פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו בנקודות פנימיות

1.1 למה של שוורץ

אחד המשפטים הכי בסיסיים בפונקציות מרוכבות ומערכות דינאמיות מרוכבות הוא למה של שוורץ ([SD2001], [SD1989]). הלמה נותנת אי-שוויון עבור ערכים של פונקציות אנליטיות פנימיות של עיגול היחידה בכל נקודות בתוך העיגול.

משפט 1 (למה של שוורץ). נניח כי פונקציה $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית ב- Δ ומקיימת $F(0) = 0$. אזי

$$1. \quad |F(z)| \leq |z| \quad \text{לכל } z \in \Delta,$$

$$2. \quad |F'(0)| \leq 1.$$

אם בנוסף לכך קיימת נקודה $z_0 \in \Delta, z_0 \neq 0$, שעבורה מתקיים $|F(z_0)| = |z_0|$ או $|F'(0)| = 1$ אזי קיים קבוע ממשי φ כך ש- $F(z) = e^{i\varphi} z$ לכל $z \in \Delta$.

הוכחה. מכיוון ש- F אנליטית ב- Δ ו- $F(0) = 0$, ניתן לפתח אותה לטור מקלורן:

$$z \in \Delta, \quad F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

$$\text{כאשר } a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}.$$

לכן פונקציה

$$z \in \Delta, \quad G(z) = \frac{F(z)}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}$$

היא גם אנליטית ב- Δ ומתקיים:

$$G(0) = a_1 = F'(0).$$

$$\text{ניקח } 0 < r < 1 \text{ כלשהו ונסמן } \Delta_r = \{z \in \Delta : |z| < r\}.$$

אזי G אנליטית בסגור של Δ_r ולפי עיקרון המקסימום של מודולוס עבור פונקציה אנליטית נקבל:

$$\max_{z \in \Delta_r} |G(z)| = \max_{|z|=r} |G(z)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{F(z)}{z} \right| = \max_{|z|=r} \frac{|F(z)|}{|z|} = \max_{|z|=r} \frac{|F(z)|}{r} < \frac{1}{r}$$

נעבור לגבול כאשר $r \rightarrow 1$ באי-השוויון האחרון. נקבל

$$|G(z)| = \left| \frac{F(z)}{z} \right| \leq 1 \quad \text{לכל } z \in \Delta, z \neq 0.$$

לכן

$$|F(z)| \leq |z| \quad \text{לכל } z \in \Delta.$$

קיבלנו כי $|G(z)| \leq 1$ לכל $z \in \Delta$. בפרט, עבור $z = 0$ מתקיים $|G(0)| = |F'(0)| \leq 1$.

- נניח כי קיימת נקודה $z \in \Delta$ כך שעבורה מתקיים $|G(z)| = 1$ אז $G(z)$ מקבלת מקסימום של מודולוס בנקודה $z \in \Delta$. לכן

$$G(z) = \lambda \quad \text{כך ש-} |\lambda| = 1,$$

או

$$G(z) = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

לכן

$$F(z) = e^{i\varphi} z \quad \text{לכל } z \in \Delta.$$

- אם $|F'(0)| = 1$ אזי $|G(0)| = 1$, וקודם קיבלנו כי $|G(z)| \leq 1$ לכל $z \in \Delta$.

כלומר המקסימום של המודולוס מתקבל בנקודה $0 \in \Delta$ ולכן לפי עיקרון המקסימום נקבל כי

$$G(z) = \lambda \quad \text{כך ש-} |\lambda| = 1,$$

או

$$G(z) = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

לכן

$$F(z) = e^{i\varphi} z \quad \text{לכל } z \in \Delta.$$

□

1.2 שורץ פיק למה (The Schwarz-Pick Lemma)

הגדרה 1. פונקציה אנליטית חד-חד ערכית $F: \Delta \rightarrow \mathbf{C}$ נקראת **אוטומורפיזם** של Δ אם $F(\Delta) = \Delta$.

ידוע כי פונקציה $F: \Delta \rightarrow \mathbf{C}$ היא אוטומורפיזם של Δ אם ורק אם ניתן להציג אותה בצורה:

$$F(z) = e^{i\varphi} \cdot m_a(z)$$

כאשר $z \in \Delta, \varphi \in \mathbf{R}, |a| < 1, m_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$.

הפונקציה $m_a(z)$ היא אוטומורפיזם הפוך לעצמו, כלומר $m_a^{-1} = m_a$.

משפט 2. תהי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ פונקציה אנליטית, אז לכל שתי נקודות $z, w \in \Delta$, מתקיים

$$|m_{F(w)}(F(z))| \leq |m_w(z)|,$$

(1)

או

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{1 - \overline{F(w)}F(z)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

בנוסף לכך אם אי-שוויון (1) מתקיים כשוויון ממש לפחות עבור זוג אחד של נקודות $z, w \in \Delta, z \neq w$, אזי F אוטומורפיזם של Δ .

הוכחה. נניח $z, w \in \Delta, z \neq w$.

נגדיר פונקציה $G: \Delta \rightarrow \Delta$ ע"י

$$G := m_{F(w)} \circ F \circ m_w$$

אז $G: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית ב- Δ כהרכבה של פונקציות אנליטיות ופנימיות של Δ . בנוסף,

$$G(0) = m_{F(w)} \circ F \circ m_w(0) = m_{F(w)}(F(w)) = 0$$

לכן לפי למה של שוורץ, נקבל:

$$|G(x)| \leq |x| \text{ לכל } x \in \Delta.$$

נציב באי-השוויון האחרון $x = m_w(z) \in \Delta$. נקבל:

$$|m_{F(w)}(F(z))| \leq |m_w(z)|.$$

אם לפחות עבור זוג אחד $z \neq w \in \Delta$ מתקיים

$$|m_{F(w)}(F(z))| = |m_w(z)|,$$

כלומר

$$|m_{F(w)} \circ F \circ m_w \circ m_w(z)| = |m_w(z)|$$

או

$$|G(m_w(z))| = |m_w(z)|$$

אז לפי למה של שוורץ, $\varphi \in \mathbf{R}, z \in \Delta, G(z) = e^{i\varphi} z$.

לכן $G(z)$ אוטומורפיזם של Δ .

משום ש- $G = m_{F(w)} \circ F \circ m_w$, נקבל

$$F = m_{F(w)} \circ G \circ m_w$$

ולכן F אוטומורפיזם של Δ כהרכבה של אוטומורפיזמים של Δ .

כעת נוכיח שאם F אוטומורפיזם של Δ אז

$$z, w \in \Delta \text{ לכל } |m_{F(w)}(F(z))| = |m_w(z)|.$$

כל אוטומורפיזם של Δ הוא מהצורה:

$$F(z) = e^{i\varphi} m_a(z) \text{ כאשר } |a| < 1, \varphi \in \mathbf{R}, z \in \Delta$$

$$|m_{F(w)}(F(z))| = \left| \frac{F(w) - F(z)}{1 - \overline{F(w)}F(z)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi} m_a(w) - e^{i\varphi} m_a(z)}{1 - e^{i\varphi} m_a(w) \overline{e^{i\varphi} m_a(z)}} \right| = \left| \frac{m_a(w) - m_a(z)}{1 - \overline{m_a(w)}m_a(z)} \right|$$

• חישוב המונה

$$\begin{aligned} m_a(w) - m_a(z) &= \frac{a - w}{1 - \overline{a}w} - \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} = \frac{a - |a|^2 z - w + \overline{a}zw - a + |a|^2 w + z - \overline{a}wz}{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)} \\ &= \frac{(z - w)(1 - |a|^2)}{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)} \end{aligned}$$

• חישוב המכנה

$$\begin{aligned} 1 - \overline{m_a(w)}m_a(z) &= 1 - \frac{\overline{a - w}}{1 - \overline{a}w} \cdot \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} = 1 - \frac{\overline{a} - \overline{w}}{1 - \overline{a}w} \cdot \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \\ &= \frac{1 - \overline{a}z - a\overline{w} + |a|^2 \overline{w}z - |a|^2 + \overline{a}z + a\overline{w} - z\overline{w}}{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)} = \frac{(1 - |a|^2)(1 - z\overline{w})}{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)} \end{aligned}$$

לכן נקבל:

$$|m_{F(w)}(F(z))| = \left| \frac{(z - w)(1 - |a|^2)}{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)} \cdot \frac{(1 - \overline{a}w)(1 - \overline{a}z)}{(1 - |a|^2)(1 - z\overline{w})} \right| = \left| \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} \right| = |m_w(z)|$$

□

1.3 אי-שוויונים נוספים (מסקנות משורץ למה ושורץ-פיק למה)

מסקנה 1. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית ומעתיקה את עיגול היחידה Δ לתוך הסגור שלו $\bar{\Delta}$. אזי לכל $z \in \Delta$,

$$(2) \quad |F'(z)| \leq \frac{1 - |F(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

הוכחה. נניח כי $|F(z)| \leq 1$ לכל $z \in \Delta$.

אם $|F(z)| = 1$ לאיזשהו $z \in \Delta$ אזי F פונקציה קבועה (לפי עיקרון המקסימום) $F(z) = \lambda$ כך ש- $|\lambda| = 1$ לכל $z \in \Delta$ מתקיים

$$|F'(z)| = 0$$

ולכן אי-השוויון (2) מתקיים.

נניח כי $|F(z)| < 1$ לכל $z \in \Delta$. לפי שורץ-פיק למה,

$$\text{לכל } z, w \in \Delta \quad \left| \frac{F(w) - F(z)}{1 - \overline{F(w)}F(z)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right|$$

לכן

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{w - z} \right| \leq \left| \frac{1 - \overline{F(w)}F(z)}{1 - \overline{w}z} \right|$$

נעבור לגבול כאשר $z \rightarrow w$ ונקבל

$$|F'(w)| \leq \frac{1 - |F(w)|^2}{1 - |w|^2}$$

□

מסקנה 2 (Lindelof's inequality). אם $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית אז לכל $z \in \Delta$, מתקיים

$$|F(z)| \leq \frac{|z| + |F(0)|}{1 + |z||F(0)|}$$

הוכחה. מכיוון ש-

$$1 - |m_{F(0)}(F(z))|^2 = \frac{(1 - |F(0)|^2)(1 - |F(z)|^2)}{|1 + \overline{F(0)}F(z)|^2}$$

נקבל

$$\begin{aligned} |m_{F(0)}(F(z))|^2 &= \left| \frac{F(0) - F(z)}{1 - \overline{F(0)}F(z)} \right|^2 = 1 - \frac{(1 - |F(0)|^2)(1 - |F(z)|^2)}{|1 + \overline{F(0)}F(z)|^2} \geq 1 - \frac{(1 - |F(0)|^2)(1 - |F(z)|^2)}{(1 - |F(0)||F(z)|)^2} \\ &= \frac{1 - 2|F(0)||F(z)| + |F(0)|^2|F(z)|^2 - 1 + |F(z)|^2 + |F(0)|^2 - |F(0)|^2|F(z)|^2}{(1 - |F(0)||F(z)|)^2} \\ &= \frac{(|F(z)| - |F(0)|)^2}{(1 - |F(0)||F(z)|)^2} \end{aligned}$$

מצד שני, לפי שורץ-פיק למה, נקבל

$$. \text{ לכל } z \in \Delta \quad \left| \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}F(z)} \right| \leq |m_0(z)| = |z|$$

מכך נובע כי

$$. \frac{|F(z)| - |F(0)|}{1 - |F(0)||F(z)|} \leq |z|$$

לכן

$$|F(z)| - |F(0)| \leq |z| - |z||F(0)||F(z)|$$

$$. \text{ לכל } z \in \Delta \quad |F(z)| \leq \frac{|z| + |F(0)|}{1 + |z||F(0)|} \quad \text{או}$$

□

1.4 שורץ-פיק למה במטריקה ההיפרבולית של פוינקרה

The Schwarz-Pick inequality in the Poincare hyperbolic metric

לכל $z, w \in \Delta$ נגדיר את הפונקציה האי שלילית $\rho(z, w)$ באופן הבא:

$$. \rho(z, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |m_w(z)|}{1 - |m_w(z)|}$$

הפונקציה הזו נקראת **המטריקה ההיפרבולית של פוינקרה**, היא מקיימת את כל התנאים של מטריקה ב- Δ :

$$. \rho(z, w) \geq 0 \quad \forall z, w \in \Delta \quad 1.$$

$$. \rho(z, w) = \rho(w, z) \quad \forall z, w \in \Delta \quad 2.$$

$$. \rho(z, w) \leq \rho(z, y) + \rho(y, w) \quad \forall z, y, w \in \Delta \quad 3.$$

$$4. \rho(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w.$$

- אם אחת הנקודות z או w שואפת לשפה $\partial\Delta$, נניח כי w מתקרבת לשפה, כלומר

$$|w| \rightarrow 1$$

, אזי

$$|m_w(z)| = \left| \frac{w-z}{1-\overline{w}z} \right| = \frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|} = \frac{|w-z|}{\left| \overline{w} \left(\frac{1}{\overline{w}} - z \right) \right|} = \frac{|w-z|}{|w| \left| \frac{w}{|w|^2} - z \right|} \rightarrow \frac{|w-z|}{|w-z|} = 1$$

לכן

$$\lim_{|w| \rightarrow 1} \rho(z, w) = \infty.$$

לכן (w, ρ) מרחב מטרי אינסופי.

נעיר כי עבור נקודה מסוימת $\zeta \in \Delta$ ו- $k > 0$, קבוצת נקודות z המקיימות $\rho(z, \zeta) < k$ נקראת **עיגול היפרבולי** שמרכזו ב- ζ עם רדיוס היפרבולי k . מבחינה גיאומטרית הוא העיגול הרגיל (אוקלידי) בתוך Δ .

הסבר:

$$\rho(z, \zeta) < k$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \left| \frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}} \right|}{1 - \left| \frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}} \right|} < k$$

$$\frac{|1-z\overline{\zeta}| + |z-\zeta|}{|1-z\overline{\zeta}| - |z-\zeta|} < e^{2k}$$

$$|1-z\overline{\zeta}| + |z-\zeta| < e^{2k} |1-z\overline{\zeta}| - e^{2k} |z-\zeta|$$

$$|z-\zeta| < \frac{(e^{2k}-1)}{(1+e^{2k})} |1-z\overline{\zeta}|$$

$$|z-\zeta|^2 < \frac{(e^{2k}-1)^2}{(1+e^{2k})^2} |1-z\overline{\zeta}|^2$$

$$\text{נסמן } M = \frac{(e^{2k}-1)^2}{(1+e^{2k})^2} < 1. \text{ נקבל:}$$

$$|z|^2 + |\zeta|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\zeta}z) < M + M|z|^2|\zeta|^2 - 2M\operatorname{Re}(z\bar{\zeta})$$

$$|z|^2(1 - M|\zeta|^2) - 2\operatorname{Re}[z(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}M)] < M - |\zeta|^2$$

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}\left[z\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}M}{1 - M|\zeta|^2}\right)\right] + \left|\frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}M}{1 - M|\zeta|^2}\right|^2 < \frac{M - |\zeta|^2}{1 - M|\zeta|^2} + \left|\frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}M}{1 - M|\zeta|^2}\right|$$

$$\text{נסמן } R^2 = \frac{M - |\zeta|^2}{1 - M|\zeta|^2} + \left|\frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}M}{1 - M|\zeta|^2}\right| \text{ ונקבל:}$$

$$\left|z - \frac{1 - M}{1 - M|\zeta|^2}\zeta\right|^2 < R^2$$

$$\left|z - \frac{1 - M}{1 - M|\zeta|^2}\zeta\right| < R \text{ עיגול אוקלידי בתוך } \Delta.$$

□

את אי-שוויון של שורץ-פיק

$$|m_{F(w)}(F(z))| \leq |m_w(z)|$$

במטריקה של פוינקרה ניתן לרשום בצורה

$$\forall z, w \in \Delta, \quad \rho(F(w), F(z)) \leq \rho(w, z)$$

הסבר:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ נתבונן בפונקציה ממשית:}$$

פונקציה זו היא עולה עבור $|x| < 1$ כי

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} > 0$$

לכן לכל $z, w \in \Delta$, אי-שוויון

$$|m_{F(w)}(F(z))| \leq |m_w(z)|$$

מתקיים אם ורק אם

$$\forall z, w \in \Delta, \quad \rho(F(w), F(z)) \leq \rho(w, z)$$

מסקנה 3. כל העתקה פנימית ואנליטית בעיגול היחידה הפתוח Δ אינה מתרחבת לפי המטריקה ההיפרבולית של פוינקרה.

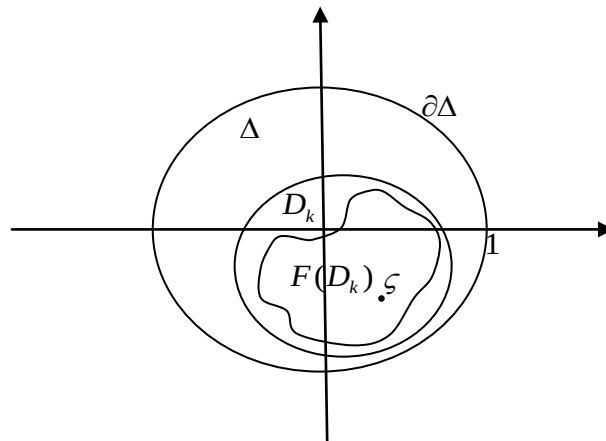
הגדרה 2. נקודה $\zeta \in \Delta$ נקראת **נקודת שבת** פנימית של פונקציה אנליטית $F : \Delta \rightarrow \Delta$ אם $F(\zeta) = \zeta$.

שוורץ-פיק למה גוררת כי

• אם $\zeta \in \Delta$ נקודת שבת פנימית להעתקה אנליטית $F : \Delta \rightarrow \Delta$ אז לכל $z \in \Delta$ מתקיים

$$\rho(F(z), \zeta) \leq \rho(z, \zeta)$$

משמעות גיאומטרית: אם $\zeta \in \Delta$ נקודת שבת של F , אז F מעתיקה כל עיגול היפרבולי $D_k = \{z : \rho(z, \zeta) < k\}$ לתוכו.



2. אי-שוויונים מפורסמים עבור ערכים של פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו בנקודות השפה

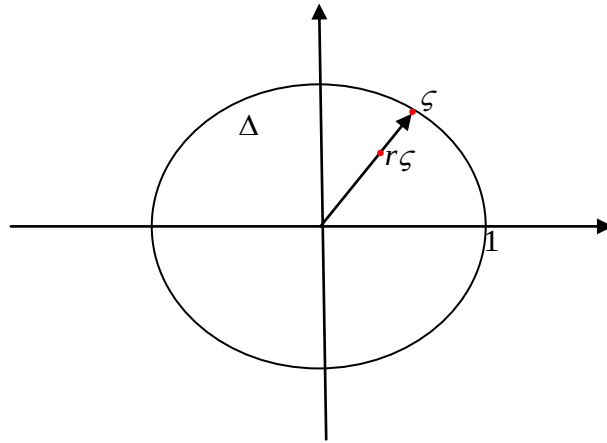
אם פונקציה $F : \Delta \rightarrow \Delta$ מוגדרת בעיגול היחידה הפתוח Δ ואנחנו רוצים להעריך את הערכים שלה בנקודות השפה $\partial\Delta$, קודם אנחנו צריכים להגדיר באיזהשהו אופן ערכים של פונקציה בנקודות השפה.

הגדרה 3. אם בנקודת שפה $\zeta \in \partial\Delta$ קיים גבול רדיאלי סופי $\lim_{r \rightarrow 1^-} F(r\zeta)$ אז מסמנים $F(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F(r\zeta)$.

הערה. אם פונקציה $F : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית וחסומה אז הגבול הרדיאלי $\lim_{r \rightarrow 1^-} F(r\zeta)$ קיים וסופי אם ורק אם קיים גבול זוויתי $\angle \lim_{z \rightarrow \zeta} F(z)$ (כאשר z שואף ל- ζ בתוך כל זווית ב- Δ שקודקודה ב- ζ).

הגדרה 4. נקודה $\zeta \in \partial\Delta$ נקראת **נקודת שבת על השפה** של פונקציה אנליטית $F : \Delta \rightarrow \Delta$ אם הגבול הרדיאלי

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} F(r\zeta) = \zeta$$



הגדרה 5. אם בנקודת שפה $\zeta \in \partial\Delta$ קיים גבול סופי $F(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} F(r\zeta)$ וגם קיים גבול סופי

$$F'(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{F(r\zeta) - F(\zeta)}{r\zeta - \zeta}$$

אז $F'(\zeta)$ נקרא **נגזרת רדיאלית של F ב- ζ** .

הערה. ידוע כי אם פונקציה $F : \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית, אז בכל נקודת שבת על השפה $\zeta \in \partial\Delta$ (אם קיימת), הגבול הרדיאלי (סופי או אינסופי)

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{F(r\zeta) - F(\zeta)}{r\zeta - \zeta}$$

קיים ותמיד חיובי. אם הגבול הוא סופי, אז $\zeta \in \partial\Delta$ נקראת **נקודת שבת רגולרית על השפה**.

הערה. לפעמים מגדירים גבול ונגזרות בנקודות השפה $\partial\Delta$ במובן זוויתי ומסמנים

$$F(\zeta) = \angle \lim_{z \rightarrow \zeta} F(z)$$

$$F'(\zeta) = \angle \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta}$$

אם פונקציה F אנליטית חסומה ב- Δ גבול זוויתי של F בנקודת שפה $\zeta \in \partial\Delta$ קיים אם ורק אם קיים גבול רדיאלי בנקודה זאת וגבולות אלה זהים.

2.1 משפט Denjoy-Wolff

משפט 3. אם לפונקציה אנליטית $F : \Delta \rightarrow \Delta$ אין נקודות שבת בתוך Δ , אז קיימת לפחות נקודת שבת אחת על השפה $\partial\Delta$ ואחת מנקודות שבת על השפה $\tau \in \partial\Delta$ מקיימת

$$F'(\tau) \leq 1.$$

היא נקראת **נקודת שבת מושכת** של F .

בפרק הקודם ראינו כי אם לפונקציה אנליטית $F: \Delta \rightarrow \Delta$ קיימת נקודת שבת $\varsigma \in \Delta$, אז F מעתיקה כל עיגול היפרבולי $\rho(z, \varsigma) < k$ לתוך עצמו.

שאלה: האם לנקודת שבת מושכת $\tau \in \partial\Delta$ של F שנמצאת על השפה יש תכונה גיאומטרית דומה?

התשובה היא חיובית. כדי לתאר תכונה זאת, מטריקה $\rho(z, w)$ לא מתאימה משום ש-
 $\rho(z, w) \rightarrow \infty$ כאשר אחת מנקודות (w או z) מתקרבת לשפה $\partial\Delta$. נגדיר "מטריקה" אחרת.

2.2 פסידו-מטריקה היפרבולית (Hyperbolic pseudo-metric)

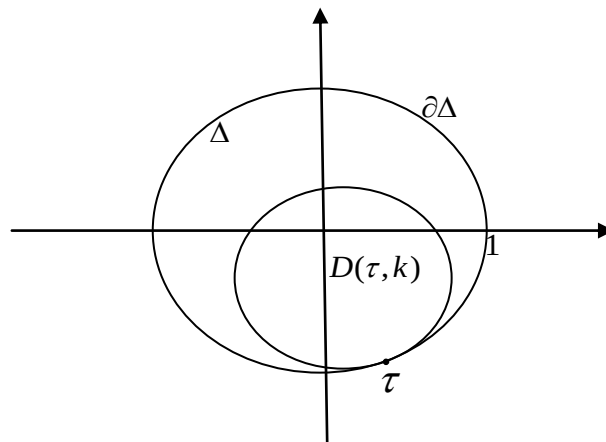
הגדרה 6. פונקציה

$$d(z, w) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{1 - |z|^2}, z \in \Delta, w \in \bar{\Delta}$$

נקראת **פסידו-מטריקה היפרבולית**.

הערה. פונקציה d אינה מטריקה, היא לא מקיימת תכונות של מטריקה. לדוגמה עבור שתי נקודות שונות $z, w \in \Delta, z \neq w, |z| = |w|$ נקבל $d(z, w) \neq d(w, z)$. למרות זאת היא עוזרת לתאר התנהגות של פונקציות אנליטיות המעתיקות את Δ לתוך Δ בסביבת השפה.

לכל נקודה $\tau \in \partial\Delta$, קבוצת הנקודות $D(\tau, k) = \{z \in \Delta : d(z, \tau) < k\}$ היא עיגול המשיק ל- $\partial\Delta$ בנקודה τ .



מרכז אוקלידי של העיגול $D(\tau, k)$ הוא $\frac{1}{1+k}\tau$ ורדיוס שווה ל- $\frac{k}{k+1} < 1$.

הסבר:

$$d(z, \tau) < k$$

$$\frac{|1 - z\bar{\tau}|^2}{1 - |z|^2} < k$$

$$|1 - z\bar{\tau}|^2 < k - k|z|^2$$

$$1 - 2\operatorname{Re}(z\bar{\tau}) + |z|^2|\tau|^2 < k - k|z|^2$$

$$|\tau|^2 = 1, \quad |z|^2(k + |\tau|^2) - 2\operatorname{Re}(z\bar{\tau}) < k - 1$$

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}\left[z\left(\frac{\tau}{k+1}\right)\right] + \left|\frac{\tau}{k+1}\right|^2 < \frac{k-1}{k+1} + \left|\frac{\tau}{k+1}\right|^2$$

$$\left|z - \frac{1}{k+1}\tau\right|^2 < \frac{k-1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\left|z - \frac{1}{k+1}\tau\right|^2 < \frac{(k-1)(k+1)+1}{(k+1)^2}$$

$$\left|z - \frac{1}{k+1}\tau\right|^2 < \frac{k^2 + k - k - 1 + 1}{(k+1)^2}$$

$$\cdot \left|z - \frac{1}{k+1}\tau\right| < \frac{k}{(k+1)}$$

□

אם $\tau \in \partial\Delta$ נקודת שבת מושכת של פונקציה אנליטית $F: \Delta \rightarrow \Delta$, כלומר $F(\tau) = \tau$ ו-
 $F'(\tau) \leq 1$, אז F מעתיקה כל עיגול $D(\tau, k)$ לתוך עצמו. זה נובע מלמה של Julia. הלמה
 נותנת תכונה גיאומטרית דומה גם עבור כל נקודות $w \in \partial\Delta$ המקיימות $|F(w)| = 1$ (contact points).

2.3 למה של Julia (Julia's Lemma)

משפט 4. (למה של Julia)

נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית וקיימת סדרה $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ ב- Δ כך ש-

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = \eta \in \partial\Delta \quad \text{וגם} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \zeta \in \partial\Delta$$

אם

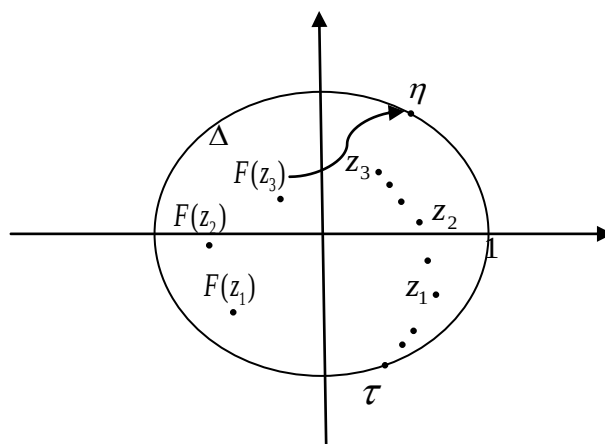
$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |F(z_n)|}{1 - |z_n|} = \alpha < \infty$$

אז לכל $z \in \Delta$,

$$(5) \frac{|1 - F(z)\bar{\eta}|^2}{1 - |F(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z\bar{\zeta}|^2}{1 - |z|^2}$$

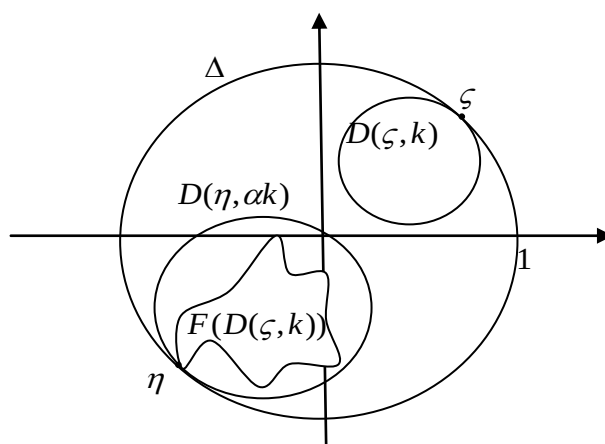
כלומר, לכל $K > 0$:

$$F(D(\zeta, K)) \subseteq D(\eta, \alpha K)$$

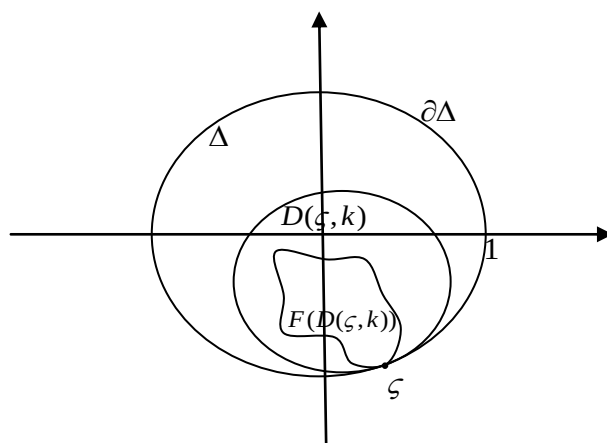


משמעות גיאומטרית:

אם בנקודה שנמצאת על השפה $\zeta \in \partial\Delta$ תנאי הלמה מתקיימים, אז תמונה של כל עיגול $d(\zeta, z) < k$ (horodisk) על ידי F , מוכלת בעיגול $d(\eta, z) < \alpha k$.



בפרט, אם $\zeta \in \partial\Delta$ נקודת שבת של F (לא בהכרח מושכת) אז F מעתיקה את הורודיסק $D(\zeta, k)$ להורודיסק $D(\eta, \alpha k)$.



הוכחה. של למה של Julia:

$$|\eta| = 1 \text{ לכן } \eta \in \partial\Delta$$

$$z, w \in \Delta, \sigma(z, w) = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \quad \text{נגדיר פונקציה}$$

$$(6) \quad 1-|m_w(z)|^2 = 1 - \frac{|w-z|^2}{|1-\bar{w}z|^2} = \frac{|1-\bar{w}z|^2 - |w-z|^2}{|1-\bar{w}z|^2} = \frac{(1-|w|^2) - |z|^2(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\bar{w}z|^2}$$

לפי שוורץ-פיק למה,

$$|m_{F(w)}(F(z))|^2 \leq |m_w(z)|^2$$

$$-|m_{F(w)}(F(z))|^2 \geq -|m_w(z)|^2$$

$$1-|m_{F(w)}(F(z))|^2 \geq 1-|m_w(z)|^2$$

$$\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{w}z|^2} \leq \frac{(1-|F(z)|^2)(1-|F(w)|^2)}{|1-\overline{F(w)}F(z)|^2} \quad \text{, לכן לפי (6)}$$

כלומר, לכל $z, w \in \Delta$,

$$\sigma(z, w) \leq \sigma(F(z), F(w))$$

עבור $w = z_n$ נקבל

$$z \in \Delta, n=1,2,\dots \text{ לכל } \sigma(z, z_n) \leq \sigma(F(z), F(z_n))$$

$$\frac{(1-|z_n|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z_n}z|^2} \leq \frac{(1-|F(z_n)|^2)(1-|F(z)|^2)}{|1-\overline{F(z_n)}F(z)|^2}$$

$$\frac{|1-\overline{F(z_n)}F(z)|^2}{(1-|F(z)|^2)} \leq \frac{(1-|F(z_n)|^2)|1-\overline{z_n}z|^2}{(1-|z_n|^2)(1-|z|^2)}$$

נעבור לגבול כאשר $n \rightarrow \infty$, נקבל:

$$\frac{|1-F(z)\overline{\eta}|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|F(z_n)|^2}{1-|z_n|^2}$$

$$= \frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-|F(z_n)|}{1-|z_n|} \cdot \frac{1+|F(z_n)|}{1+|z_n|} \right) = \alpha \frac{1+|\eta|}{1+|\zeta|} \cdot \frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2} = \alpha \frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2}$$

לכן,

$$\frac{|1-F(z)\overline{\eta}|^2}{1-|F(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{1-|z|^2}$$

□

3. אי-שוויונים עם נגזרות בנקודות השפה של עיגול היחידה.

3.1. אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו.

ממשפט Denjoy-Wolff ולמה של Julia נובע כי אם פונקציה אנליטית $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אינה אוטומורפיזם של Δ וקיימת נקודת שבת של F בתוך Δ וגם נקודת שבת רגולרית $\zeta \in \partial\Delta$ על השפה, אז $F'(\zeta) > 1$. בשנת 1938, Helmut Unkelbach [U1938] הוכיח אי-שוויון יותר מדויק עבור $F'(\zeta)$.

משפט 5. נניח כי פונקציה אנליטית $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אינה העתקת הזהות, $F(0)=0$ ו- $\zeta=1$ נקודת שבת רגולרית של F על השפה. אזי

$$(7) \quad F'(1) \geq 2 \frac{1-\operatorname{Re} F'(0)}{1-|F'(0)|^2} \geq \frac{2}{1+|F'(0)|}$$

שוויון ב- (7) מתקיים רק אם

$$F(z) = z \cdot \frac{(1 - F'(0))z + F'(0) - |F'(0)|^2}{(F'(0) - |F'(0)|^2)z + 1 - F'(0)}$$

אחרי יותר מ-60 שנים, Robert Osserman [O2000] גילה מחדש את אי-השוויון

$$(8) \quad F'(1) \geq \frac{2}{1 + |F'(0)|}$$

והיום אי-השוויון (8) נקרא Osserman's inequality, הוא משפר את אי-שוויון $F'(1) > 1$ בנקודת שבת $\zeta = 1$ משום ש- $|F'(0)| < 1$.

3.2 אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו.

קיימים גם אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו. אחד המשפטים כאלה הוכח על ידי Shinji Yamashita בשנת 1997 [YG1997]. תוצאה זאת משפרת את אי-השוויון של שוורץ עבור פונקציות אנליטיות, פנימיות וחד-חד ערכיות בעיגול היחידה.

משפט 6. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$, אנליטית וחד-חד ערכית, $F(0) = 0$ ו- $F'(0) = \alpha$. אז לכל $z \in \Delta$

$$|F(z)| \leq |z| \cdot \frac{4|\alpha|}{\left(1 - |z| + \sqrt{(1 - |z|)^2 + 4|\alpha z|}\right)^2}$$

דוגמה אחרת לאי-שוויונים עבור פונקציות חד-חד ערכיות: משפט של Cowen ו-Pommerenke [CP1982].

משפט 7. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$, אנליטית, חד-חד ערכית ו- $F(0) = 0$.

אם $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Delta$ נקודות שבת רגולריות, אז

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\log F'(\zeta_j)} \leq 2 \operatorname{Re}(B^{-1})$$

כאשר

$$B = \lim_{r \rightarrow 1^-} \log \frac{F(r\zeta_1)}{F'(0)r\zeta_1}$$

בנוסף, השוויון מתקיים אם ורק אם

$$F(z) = \sigma^{-1}(F'(0)\sigma(z))$$

כאשר

$$\sigma(z) = z \prod_{j=1}^n (1 - \overline{\zeta_j} z)^{-2\gamma_j B}, \quad \gamma_j = \frac{1}{\log F'(\zeta_j)}$$

עוד משפט אחד עבור פונקציות חד-חד ערכיות הוכיחו James Milne Anderson ו- Alexander Vasil'ev [AV2008]:

משפט 8. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית, חד-חד ערכית ו- $F(0) = 0$.

$\zeta_1 = e^{i\theta_1}, \dots, \zeta_n = e^{i\theta_n}, \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ נקודות שבת על השפה.

אז לכל וקטור $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \geq 0$ כך ש- $\sum_{j=1}^n t_j = 1$ מתקיים

$$|F'(0)| \cdot \prod_{j=1}^n (F'(\zeta_j))^{2t_j} \geq 1$$

מסקנה 4. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$, אנליטית, חד-חד ערכית ו- $F(0) = 0$.

אם $\zeta_1 = e^{i\theta_1}, \dots, \zeta_n = e^{i\theta_n}, \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ נקודות שבת על השפה אז מתקיים

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\log F'(\zeta_j)} \leq \frac{-2}{\log |F'(0)|}$$

במקרה של נקודת שבת מושכת τ על השפה, Cowen ו- Pommerenke [CP1982] הוכיחו את אי-השוויון הבא.

משפט 9. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית וחד-חד ערכית, $\tau \in \partial\Delta$ נקודת שבת של F ומתקיים $F'(\tau) < 1$. אם $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \partial\Delta$ נקודות שבת של F כך ש- $\zeta_j \neq \tau$ לכל $j = 1, \dots, n$, אז

$$\sum_{j=1}^n (\log F'(\zeta_j))^{-1} \leq -(\log F'(\tau))^{-1}$$

4. מציאת אי-שוויונים עבור יוצרים של חצי-אגודות על בסיס אי-שוויונים ידועים עבור פונקציות אנליטיות פנימיות חד-חד ערכיות.

הגדרה 5. קבוצה אינסופית $\{F_t\}_{t \geq 0}$ של פונקציות אנליטיות ב- Δ המעתיקות את Δ לתוך Δ נקראת חצי-אגודה רציפה (חצי-אגודה, semigroup) אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F_t(z) = F_0(z) = z, \quad z \in \Delta$$

$$(2) \quad F_{t+s}(z) = F_t(F_s(z)), \quad z \in \Delta \text{ ולכל } s, t \in [0, \infty)$$

הערה. ידוע כי כל חצי-אגודה רציפה היא גזירה ב- $t = 0^+$, כלומר לכל $z \in \Delta$ קיים גבול סופי

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_t(z) - F_0(z)}{t} = \left. \frac{dF_t(z)}{dt} \right|_{t=0^+}$$

הגדרה 6. פונקציה $f(z) = -\left. \frac{dF_t(z)}{dt} \right|_{t=0^+}$ נקראת יוצר (generator) של חצי-אגודה $\{F_t\}_{t \geq 0}$.

טענה. אם פונקציה אנליטית $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ היא יוצר של חצי-אגודה $\{F_t\}_{t \geq 0}$, אז חצי-האגודה היא פתרון לבעיית קושי

$$\begin{cases} \frac{dF_t(z)}{dt} + f(F_t(z)) = 0, & t \in [0, \infty) \\ F_0(z) = z, & z \in \Delta \end{cases}$$

לבעיית קושי זאת קיים פתרון אחד ויחיד $F_t(z)$ ולכל $t \geq 0$ פונקציה $F_t(z)$ היא חד-חד ערכית [SD2001].

Berkson ו-Porta [BP1978] מצאו את ההצגה הפרמטרית הבאה של יוצרים:

משפט 10. פונקציה אנליטית $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ היא יוצר של חצי-אגודה אם ורק אם ניתן להציג אותה בצורה

$$f(z) = (z - \tau)(1 - \bar{\tau}z)p(z), \quad z \in \Delta$$

כאשר $\tau \in \bar{\Delta}$ ו- P פונקציה אנליטית ב- Δ המקיימת $\operatorname{Re} P(z) \geq 0$ לכל $z \in \Delta$.

4.1 תיאור השיטה

נניח כי לכל פונקציה אנליטית חד-חד ערכית $F: \Delta \rightarrow \Delta$ מתקיים

$$|F(z)| \leq G(F(z))$$

כאשר $G(z)$ פונקציה עם ערכים ממשיים חיוביים. אזי בכל חצי-אגודה $\{F_t(z)\}_{t \geq 0}$ כל פונקציה $F_t(z)$, $t \geq 0$ מקיימת

$$|F_t(z)| \leq G(F_t(z))$$

נסמן $G(F_t(z)) = G_t(z)$, אזי

$$(*) \quad |F_t(z)| \leq G_t(z)$$

נניח גם כי עבור $t = 0$ מתקיים שוויון ממש

$$|F_0(z)| = G_0(z)$$

אז

$$G_0(z) = |z|$$

לכן לפי (*),

$$|F_t(z)| - |F_0(z)| \leq G_t(z) - G_0(z)$$

וגם לכל $t > 0$,

$$\frac{|F_t(z)| - |F_0(z)|}{t} \leq \frac{G_t(z) - G_0(z)}{t}$$

אם קיימים גבולות בשני האגפים של אי-השוויון האחרון כאשר $t \rightarrow 0^+$, אז

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z)| - |F_0(z)|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_t(z) - G_0(z)}{t}$$

נחשב את הגבולות משני הצדדים

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_t(z) - G_0(z)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F_t(z)) - G(F_0(z))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F_t(z)) - G(F_0(z))}{F_t(z) - F_0(z)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F_t(z) - F_0(z)}{t} = -f(z) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F_t(z)) - G(z)}{F_t(z) - z} \end{aligned}$$

נעיר כי משום שלכל $t \geq 0$, פונקציה G_t ממשית, גם הגבול $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G_t(z) - G_0(z)}{t}$ הוא ממשית. לכן

גם האגף הימני $-f(z) \cdot G'(z)$ הוא ממשית.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z)| - |F_0(z)|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(|F_t(z)| - |z|)(|F_t(z)| + |z|)}{(|F_t(z)| + |z|) \cdot t} = \frac{1}{2|z|} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z)|^2 - |z|^2}{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2|z|} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z) - F_0(z) + F_0(z)|^2 - |z|^2}{t} \\
&= \frac{1}{2|z|} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z) - F_0(z)|^2 + |F_0(z)|^2 + 2\operatorname{Re}[\bar{z} \cdot (F_t(z) - F_0(z))]}{t} - |z|^2 \\
&= \frac{1}{2|z|} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\left| \frac{F_t(z) - F_0(z)}{t} \right|}_{\downarrow} \cdot \underbrace{|F_t(z) - F_0(z)|}_{\downarrow} + 2\operatorname{Re} \left[\bar{z} \cdot \underbrace{\frac{F_t(z) - F_0(z)}{t}}_{\downarrow} \right] \right] \\
&\qquad\qquad\qquad | -f(z) | \qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad -f(z) \\
&= \frac{1}{2|z|} \cdot 2\operatorname{Re}(\bar{z} \cdot (-f(z))) = -\frac{\operatorname{Re}(f(z) \cdot \bar{z})}{|z|}
\end{aligned}$$

קיבלנו אי-שוויון עבור יוצרים של חצי-אגודות:

$$\frac{\operatorname{Re}(f(z) \cdot \bar{z})}{|z|} \geq -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{G(F_t(z)) - G(z)}{t}$$

נשתמש בשיטה זאת כדי לפתח אי-שוויונים עבור יוצרים על בסיס אי-שוויונים ידועים עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות מ- Δ ל- Δ .

4.2 שימוש בשיטה על בסיס משפט Yamashita עבור פונקציות חד-חד ערכיות

ניקח משפט של Shinji Yamashita [YG1997] עבור פונקציות אנליטיות, פנימיות וחד-חד ערכיות בעיגול היחידה וניפתח אי-שוויון עבור יוצר.

משפט 11 (Shinji Yamashita) נניח כי $G: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית, חד-חד ערכית ו- $G(0) = 0$. אז לכל $z \in \Delta$,

$$|G(z)| \leq |z| \cdot \frac{4|G'(0)|}{\left(1 - |z| + \sqrt{(1 - |z|)^2 + 4|G'(0)|z}\right)^2}$$

משפט 12 נניח כי $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ יוצר של חצי-אגודה רציפה $\{F_t\}_{t \geq 0}$ ולכל $t \geq 0$, $F_t(0) = 0$. אז לכל $z \in \Delta$,

$$(9) \quad \operatorname{Re}(f(z) \cdot \bar{z}) \geq \frac{|z|^2(1 - |z|)\operatorname{Re} f'(0)}{1 + |z|}$$

הוכחה: לכל $t \geq 0$, פונקציות F_t בחצי-האגודה מקיימות את תנאי המשפט של

Shinji-Yamashita. לכן לכל $t \geq 0$ ולכל $z \in \Delta$, מתקיים

$$(10) \quad |F_t(z)| \leq |z| \cdot \frac{4|F'_t(0)|}{\left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2}$$

עבור $t = 0$, מתקיים $\begin{cases} F_0(z) = z \\ F'_0(z) = 1 \end{cases}$. לכן עבור $t = 0$ נקבל

$$|z| \leq |z| \cdot \frac{4 \cdot 1}{\left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z|}\right)^2}$$

$$|z| \leq |z| \cdot \frac{4 \cdot 1}{\left(1-|z| + \sqrt{(1+|z|)^2}\right)^2}$$

$$|z| \leq |z| \cdot \frac{4 \cdot 1}{\left(1-|z| + 1+|z|\right)^2}$$

$$|z| \leq |z|$$

מאי-שיוויון (10) נובע כי לכל $t > 0$,

$$\frac{|F_t(z)| - |z|}{t} \leq \frac{|z| \cdot \frac{4|F'_t(0)|}{\left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2} - |z|}{t}$$

לכן גם

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F_t(z)| - |z|}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|z| \cdot \frac{4|F'_t(0)|}{\left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2} - |z|}{t}$$

נחשב את הגבול באגף הימני:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|z| \cdot \frac{4|F'_t(0)|}{\left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2} - |z|}{t} = \\ &= |z| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4|F'_t(0)| - \left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2}{t \left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2} \\ &= \frac{|z|}{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4|F'_t(0)| - \left(1-|z| + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|F'_t(0)| \cdot |z|}\right)^2}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|z|}{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4|F'_t(0)| - (1-|z|)^2 - (1-|z|)^2 - 4|F'_t(0)||z| - 2(1-|z|) \cdot \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|}}{t} \\
&= \frac{|z|}{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4|F'_t(0)|(1-|z|) - 2(1-|z|)^2 - 2(1-|z|)\sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|}}{t} \\
&= \frac{2|z|(1-|z|)}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left[2|F'_t(0)| - (1-|z|) - \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|} \right]}{t} \\
&= \frac{2|z|(1-|z|)}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left| \frac{2|F'_t(0)| - (1-|z|) - \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|}}{2|F'_t(0)| - (1-|z|) + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|}} \right|}{t}
\end{aligned}$$

משום ש-

$$, \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2|F'_t(0)| - (1-|z|) + \sqrt{(1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|} \right] = 2 - (1-|z|) + 1 + |z| = 2(1+|z|)$$

נקבל

$$\begin{aligned}
R &= \frac{|z|(1-|z|)}{4(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left[(2|F'_t(0)| - (1-|z|))^2 - ((1-|z|)^2 + 4|z||F'_t(0)|) \right]}{t} \\
&= \frac{|z|(1-|z|)}{4(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left[4|F'_t(0) - 1 + 1|^2 + (1-|z|)^2 - 4|F'_t(0)|(1-|z|) - (1-|z|)^2 - 4|z||F'_t(0)| \right]}{t} \\
&= \frac{|z|(1-|z|)}{4(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\left[4|F'_t(0) - F'_0(0)|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - |F'_t(0)| \right]}{t}
\end{aligned}$$

נשתמש בשוויון,

$$* \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F'_t(0) - F'_0(0)|^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{F'_t(0) - F'_0(0)}{t} \right| \cdot |F'_t(0) - F'_0(0)| = f'(0) \cdot 0 = 0$$

ונקבל

$$\begin{aligned}
R &= \frac{|z|(1-|z|)}{4(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[4 + 8\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - 4|F'_t(0)|]}{t} \\
&= \frac{|z|(1-|z|)}{4(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[4 + 8\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - 4|F'_t(0)|][4 + 8\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) + 4|F'_t(0)|]}{t[4 + 8\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) + 4|F'_t(0)|]}.
\end{aligned}$$

משום ש-

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(F'_t(0) - F'_0(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\operatorname{Re} \frac{F'_t(0) - F'_0(0)}{t} \right) = -\operatorname{Re} f'(0)$$

-1

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} [4 + 8 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) + 4|F'_t(0)|] = 8$$

נקבל,

$$R = \frac{|z|(1-|z|)}{32(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{16 + 64(\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1))^2 + 64 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - 16|F'_t(0)|^2}{t}$$

משום ש-

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1))^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(F'_t(0) - F'_0(0))}{t} \cdot \operatorname{Re}(F'_t(0) - F'_0(0)) = \operatorname{Re} f'(0) \cdot 0 = 0$$

נקבל,

$$\begin{aligned} R &= \frac{16|z|(1-|z|)}{32(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + 4 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - |F'_t(0) - 1|^2}{t} \\ &= \frac{|z|(1-|z|)}{2(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + 4 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - |F'_t(0) - 1|^2 - 1 - 2 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1)}{t} \\ &= \frac{|z|(1-|z|)}{2(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1) - |F'_t(0) - 1|^2}{t} \end{aligned}$$

נשתמש בשוויון,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F'_t(0) - 1|^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|F'_t(0) - F'_0(0)|}{t} \cdot |F'_t(0) - F'_0(0)| = f'(0) \cdot 0 = 0$$

ונקבל,

$$R = \frac{|z|(1-|z|)}{2(1+|z|)} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{Re}(F'_t(0) - 1)}{t} = \frac{|z|(1-|z|)}{1+|z|} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1)}{t}$$

בגלל ש-

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Re}(F'_t(0) - 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \frac{F'_t(0) - F'_0(0)}{t} = -\operatorname{Re} f'(0)$$

נקבל כי,

$$. R = \frac{-|z|(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

מפני שהוכחנו קודם כי הגבול באגף השמאלי של אי שוויון (11) שווה ל- $\frac{-\operatorname{Re}(f(z)\bar{z})}{|z|}$,

קיבלנו

$$\frac{\operatorname{Re}(f(z)\bar{z})}{|z|} \geq \frac{|z|(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{2(1+|z|)}$$

□

4.3 דוגמה נוספת

אם אנחנו נשתמש באותה שיטה לאי-שוויון שהוכח על ידי Vasil'ev ו-Anderson [AV2008] עבור פונקציות אנליטיות חד-חד ערכיות נקבל עוד אי-שוויון אחד עבור יוצרים.

משפט 13 [AV2008]. תהי $\varphi: \Delta \rightarrow \Delta$ פונקציה אנליטית וחד-חד ערכית כך ש- $\varphi(1) = 1$ וקיים גבול סופי $\lim_{z \rightarrow 1} \varphi'(z) = \alpha$. אז לכל $z \in \Delta$,

$$|\varphi'(z)| \geq \frac{1}{\alpha^2} \frac{(1-|z|^2)^3}{|1-z|^4} \frac{|1-\varphi(z)|^4}{(1-|\varphi(z)|^2)^3}$$

השוויון מתקיים עבור $z \in \Delta$ מסוים ו- $\varphi(z) = w$ רק עבור פונקציה $\varphi^* = B_w^{-1} \circ p_\beta \circ B_z$ כאשר

$$, B_z(\zeta) = \frac{1-\bar{z}}{1-z} \frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}$$

$$, p_\beta(z) = \frac{4\beta z}{(1-z + \sqrt{(1-z)^2 + 4\beta z})^2}$$

$$. \beta = \frac{1}{\alpha^2} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z|^4} \frac{|1-\varphi^*(z)|^4}{(1-|\varphi^*(z)|^2)^2}$$

אחרי שימוש בשיטה לאי-שוויון Vasil'ev-Anderson ניתן לקבל את התוצאה הבאה עבור יוצרים.

משפט 14 [FLSV2013]. נניח כי $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ יוצר של חצי-אגודה רציפה $S = \{F_t\}_{t \geq 0}$ עם נקודת שבת רגולרית $\zeta = 1$. אזי לכל $z \in \Delta$,

$$. f'(1) \leq -\frac{4(1-|z|^2)\operatorname{Re}((1-\bar{z})f(z)) - 6\operatorname{Re}(\bar{z}f(z)) + (1-|z|^2)\operatorname{Re} f'(z)}{2(1-|z|^2)}$$

בפרט, עבור $z = 0$,

$$(13) \cdot f'(1) \leq -\frac{\operatorname{Re}(f'(0) + 4f(0))}{2}$$

5. שימוש באי-שוויונים עבור יוצרים בהוכחה של אי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את עיגול היחידה לתוך עצמו (לא בהכרח חד-חד ערכיות).

5.1 תיאור השיטה

כדי לעבור מאי-שוויון עבור יוצרים של חצי-אגודות לאי-שוויונים עבור פונקציות אנליטיות המעתיקות את Δ לתוך עצמו, ניתן להשתמש בהצגה פרמטרית Berkson-Porta עבור יוצרים. נזכיר כי פונקציה אנליטית $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ היא יוצר של חצי-אגודה אם ורק אם ניתן להציג אותה בצורה [BP1978]

$$, z \in \Delta, \quad f(z) = (z - \tau)(1 - \bar{\tau}z)p(z)$$

כאשר $\tau \in \bar{\Delta}$ ו- $p: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית המקיימת $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ לכל $z \in \Delta$.

למה. נניח כי $G: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית ב- Δ (לא בהכרח חד-חד ערכית).

נגדיר פונקציה

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad z \in \Delta, \quad p(z) = \frac{e^{i\theta} + G(z)}{e^{i\theta} - G(z)}$$

אז

$$. z \in \Delta \quad \operatorname{Re} p(z) > 0$$

הוכחה. לכל $z \in \Delta$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p(z) &= \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + G(z)}{e^{i\theta} - G(z)} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + G(z)}{e^{i\theta} - G(z)} \cdot \frac{e^{-i\theta} - \overline{G(z)}}{e^{-i\theta} - \overline{G(z)}} = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i\theta} \overline{G(z)} + G(z)e^{-i\theta} - |G(z)|^2}{|e^{i\theta} - G(z)|^2} = \\ &= \frac{\operatorname{Re}(1 - |G(z)|^2) + \operatorname{Re}(G(z)e^{-i\theta} - \overline{e^{-i\theta}G(z)})}{|e^{i\theta} - G(z)|^2} = \frac{1 - |G(z)|^2}{|e^{i\theta} - G(z)|^2} > 0 \end{aligned}$$

□

הערה. ברור כי הלמה מתקיימת גם עבור

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad z \in \Delta, \quad p(z) = \frac{e^{i\theta} - G(z)}{e^{i\theta} + G(z)}$$

מסקנה 5. אם $G: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית ב- Δ , אז לכל $\tau \in \bar{\Delta}$ פונקציה

$$f(z) = (z - \tau)(1 - \bar{\tau}z) \frac{e^{i\theta} - G(z)}{e^{i\theta} + G(z)}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \quad z \in \Delta$$

היא יוצר של חצי אגודה.

עכשיו, נניח כי ידוע שכל יוצר f של חצי-אגודה עם נקודת אפס $\tau \in \bar{\Delta}$ מקיים אי-שוויון

$$M(f(z)) \geq N(f(z)), \quad z \in \Delta$$

כאשר M ו- N פונקציות עם ערכים ממשיים. אזי לפי הצגה פרמטרית Berkson-Porta, כל פונקציה אנליטית (לא בהכרח חד-חד-ערכית) $G(z)$ מקיימת את אי-השוויונים

$$\begin{aligned} M\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z) \frac{e^{i\theta} - G(z)}{e^{i\theta} + G(z)}\right) &\geq N\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z) \frac{e^{i\theta} - G(z)}{e^{i\theta} + G(z)}\right) \\ M\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z)(1 - G(z))\right) &\geq N\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z)(1 - G(z))\right) \\ M\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z) \frac{1}{1 - G(z)}\right) &\geq N\left((z - \tau)(1 - \bar{\tau}z) \frac{1}{1 - G(z)}\right) \end{aligned}$$

5.2 מציאת אי-שוויונים חדשים בנקודות פנימיות על בסיס שימוש בשיטה.

משפט 15. נניח $G: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית ב- Δ . אזי לכל $z \in \Delta$ מתקיים

$$\operatorname{Re} \frac{1 - G(z)}{1 + G(z)} \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \operatorname{Re} \frac{1 - G(0)}{1 + G(0)} \quad (\text{א})$$

$$\operatorname{Re} G(z) \leq \frac{2|z| + (1 - |z|)\operatorname{Re} G(0)}{1 + |z|} \quad (\text{ב})$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - G(z)} \right) \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - G(0)} \right) \quad (\text{ג})$$

הערה. אי-שוויונים (א) - (ג) הם בעצם מסקנות מאי-שוויון של Harnack עבור פונקציות אנליטיות $p: \Delta \rightarrow \mathbf{C}$ עם $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$.

הוכחה.

א. נסמן $p(z) = \frac{1 - G(z)}{1 + G(z)}$ ו- $\tau = 0 \in \Delta$. אזי לפי נוסחת Berkson-Porta, פונקציה

$$f(z) = z \frac{1 - G(z)}{1 + G(z)}, \quad z \in \Delta, \quad (14)$$

יוצר של חצי-אגודה עם נקודת שבת בראשית.

לפי אי-שוויון (9) שהוכחנו קודם,

$$\operatorname{Re}(f(z)\bar{z}) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

נציב (14) ונקבל

$$\operatorname{Re}\left(|z|^2 \frac{1-G(z)}{1+G(z)}\right) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

משום ש-

$$f'(0) = \frac{1-G(z)}{1+G(z)} + z \frac{-G'(z)(1+G(z)) + G'(z)(1-G(z))}{(1+G(z))^2} \Big|_{z=0} = \operatorname{Re} \frac{1-G(0)}{1+G(0)}$$

נקבל

$$\operatorname{Re}\left(|z|^2 \frac{1-G(z)}{1+G(z)}\right) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)}{(1+|z|)} \operatorname{Re}\left(\frac{1-G(0)}{1+G(0)}\right)$$

$$\operatorname{Re} \frac{1-G(z)}{1+G(z)} \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \operatorname{Re} \frac{1-G(0)}{1+G(0)}$$

ג. ניקח $p(z) = 1-G(z)$. ברור כי לכל $z \in \Delta$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ ולכן פונקציה
(15) $z \in \Delta$, $f(z) = z(1-G(z))$

יוצר של חצי-אגודה $\{F_t\}_{t \geq 0}$ המקיימת $F_t(0) = 0$ לכל $t \geq 0$.

לפי משפט (9) שהוכחנו קודם,

$$\operatorname{Re}(f(z)\bar{z}) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

נציב (15) ונקבל

$$\operatorname{Re}\left(|z|^2(1-G(z))\right) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

נחשב

$$f'(0) = 1-G(z) - zG'(z) \Big|_{z=0} = 1-G(0)$$

לקן

$$\operatorname{Re}\left(|z|^2(1-G(z))\right) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)}{(1+|z|)} \operatorname{Re}(1-G(0))$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(1-G(z)) &\geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \operatorname{Re}(1-G(0)) \\ 1-\operatorname{Re}(G(z)) &\geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \cdot (1-\operatorname{Re}(G(0))) \\ \operatorname{Re}(G(z)) &\leq \frac{-1+|z|+(1-|z|)\operatorname{Re} G(0)}{1+|z|} + 1 \\ \operatorname{Re} G(z) &\leq \frac{2|z|+(1-|z|)\operatorname{Re} G(0)}{1+|z|}\end{aligned}$$

ג. ניקח $p(z) = \frac{1}{1-G(z)}$. אזי פונקציה

$$(16) \quad f(z) = \frac{z}{1-G(z)}$$

יוצר של חצי-אגודה $\{F_t\}_{t \geq 0}$ המקיימת $F_t(0) = 0$ לכל $t \geq 0$.

לפי משפט (9) שהוכחנו קודם,

$$\operatorname{Re}(f(z)\bar{z}) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

נציב (16) ונקבל

$$\operatorname{Re}\left(\frac{|z|^2}{1-G(z)}\right) \geq \frac{|z|^2(1-|z|)\operatorname{Re} f'(0)}{(1+|z|)}$$

משום ש-

$$f'(0) = \frac{1-G(z)+zG'(z)}{(1-G(z))^2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{1-G(0)}$$

נקבל

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-G(z)}\right) \geq \frac{(1-|z|)}{(1+|z|)} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-G(0)}\right)$$

□

הערה. אם בסעיף (ג) נרשום $G(z)^n$ במקום $G(z)$ נקבל אותו שוויון זהה לשוויון שקיבלנו כי פונקציה $G(z)^n$ היא גם אנליטית ופנימית.

5.3 מציאת אי-שוויונים בנקודות השפה עבור פונקציה אנליטית עם תמונה שלא מפרידה את ראשית הצירים והשפה.

בפרק זה אנחנו מציגים דוגמאות לשימוש בשיטה למציאת אי-שוויונים בנקודות השפה ממאמר [FLSV2013].

משפט 16. תהי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית, $0 \notin F(\Delta)$ והתמונה $F(\Delta)$ לא מפרידה את ראשית הצירים והשפה $\partial\Delta$. אם $\zeta = 1$ נקודת שבת רגולרית של F , אז

$$F'(1) \geq -\frac{\ln|F(0)|}{2}$$

הוכחה. נגדיר יוצר של חצי-אגודה

$$f(z) = z \frac{1 - F(z)^{1/n}}{1 + F(z)^{1/n}}, \quad z \in \Delta,$$

כאשר $w^{1/n} = \sqrt[n]{w}$ ענף אנליטי של השורש המקיים $\sqrt[n]{1} = 1$.

נחשב

$$f(1) = \frac{1 - \sqrt[n]{F(1)}}{1 + \sqrt[n]{F(1)}} = \frac{1 - \sqrt[n]{1}}{1 + \sqrt[n]{1}} = 0$$

$$f'(1) = -\frac{1}{n} \frac{F'(1)}{2}$$

-I

$$f'(0) = \frac{1 - \sqrt[n]{F(0)}}{1 + \sqrt[n]{F(0)}}$$

אחרי ההצבה באי-שוויון ממשפט [FLSV2013] (פרק 4)

$$f'(1) \leq -\frac{\operatorname{Re}(f'(0) + 4f(0))}{2}$$

נקבל

$$F'(1) \geq n \operatorname{Re} \frac{1 - \sqrt[n]{F(0)}}{1 + \sqrt[n]{F(0)}}$$

נעבור לגבול כאשר $n \rightarrow \infty$, נקבל

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{Re} \frac{1 - F(0)^{\frac{1}{n}}}{1 + F(0)^{\frac{1}{n}}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - F(0)^{\frac{1}{n}} \right) = \left\{ x = \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - F(0)^x}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-F(0)^x \log F(0) \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \log F(0) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\ln |F(0)| + i\theta] = -\frac{1}{2} \ln |F(0)| \end{aligned}$$

לכן

$$F'(1) \geq -\frac{1}{2} \ln |F(0)|$$

□

5.4 מציאת אי-שוויונים בנקודות פנימיות עבור פונקציה עם תמונה שלא מפרידה את ראשית הצירים והשפה.

ידוע כי אם פונקציה $p: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית ו- $\operatorname{Re} p(z) \geq 0$ לכל $z \in \Delta$, אז היא מקיימת את אי-שוויון של Harnack (לדוגמה, [SD2001]):

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \operatorname{Re} p(0) \leq \operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \operatorname{Re} p(0)$$

אם נשתמש בשיטה על בסיס אי-שוויון של Harnack, נקבל את ההערכה הבאה [FLSV2013].

משפט 17. נניח כי $F: \Delta \rightarrow \Delta$ אנליטית, $0 \notin F(\Delta)$ ו- $F(\Delta)$ לא מפרידה את ראשית הצירים והשפה $\partial\Delta$. אז לכל $z \in \Delta$

$$|F(0)|^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \leq |F(z)| \leq |F(0)|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}}$$

הוכחה. לפי אי-שוויון של Harnack, פונקציה

$$p(z) = \frac{1 - F(z)^{1/n}}{1 + F(z)^{1/n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \Delta,$$

מתקיים

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \operatorname{Re} p(0) \leq \operatorname{Re} p(z) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \operatorname{Re} p(0)$$

לכן

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} n \operatorname{Re} \frac{1 - F(0)^{1/n}}{1 + F(0)^{1/n}} \leq n \operatorname{Re} \frac{1 - F(z)^{1/n}}{1 + F(z)^{1/n}} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} n \operatorname{Re} \frac{1 - F(0)^{1/n}}{1 + F(0)^{1/n}}$$

משום שלכל $z \in \Delta$,

$$, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{1 - F(z)^{1/n}}{1 + F(z)^{1/n}} \right) = -\frac{\log F(z)}{2}$$

נקבל

$$-\frac{1-|z|}{1+|z|} \operatorname{Re} \log F(0) \leq -\operatorname{Re} F(z) \leq -\frac{1+|z|}{1-|z|} \operatorname{Re} \log F(0)$$



$$|F(0)|^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \leq |F(z)| \leq |F(0)|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}}$$



- [AV2008] J. M. Anderson and A. Vasil'ev, Lower Schwarz–Pick estimates and angular derivatives, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* (33) 101–110, 2008.
- [BP1978] E. Berkson and H. Porta, Semigroups of analytic functions and composition operators, *Michigan Math. J.* (25) 101–115, 1978.
- [CDV2007] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, A. Vasil'ev, Digons and angular derivatives of analytic self-maps of the unit disk, *Complex Var. Elliptic Equ.* (52) 685–691, 2007.
- [CP1982] C. C. Cowen and Ch. Pommerenke, Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk, *J. London Math. Soc.* (2) 271–289, 1982.
- [D1989] S. Dineen, *The Schwarz Lemma*, Oxford, 1989.
- [FLSV2013] A. Frolova, M. Levenshtein, D. Shoikhet, A. Vasil'ev, Boundary distortion estimates for holomorphic maps, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2013.
- [GR1984] K. Goebel and S. Reich, *Uniform Convexity, Hyperbolic geometry and Nonexpansive Mappings*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.
- [O2000] R. Osserman, A sharp Schwarz inequality on the boundary, *Proc. Amer. Math. Soc.* (128) 3513–3517, 2000.
- [J1920] G. Julia, Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz, *Acta Math.* (42) 349–355, 1920.
- [PV2002] Ch. Pommerenke and A. Vasil'ev, Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk, *Pacific J. Math.* (206) 425–450, 2002.
- [U1938] H. Unkelbach, Über die Randverzerrung bei konformer Abbildung, *Math. Z.* (43) 739–742, 1938.
- [SD2001] D. Shoikhet, *Semigroups in Geometrical Function Theory*, Kluwer, Dordrecht, 2001.

[Y1997] S. Yamashita, Goluzin's extension of the Schwarz–Pick inequality, *J. Inequal. Appl.* (1) 345–356, 1997.

[W1926] J. Wolff, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, *C. R. Acad. Sci. Paris* (182) 918–920, 1926.