המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

שברים משולבים וקירובי פדה

ריאן סלאח אלדין

Continued fractions and Pade approximation

Rayan Salah Alden

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)

במתמטיקה שימושית

שברים משולבים וקירובי פדה

ריאן סלאח אלדין

Continued fractions and Pade approximation

Rayan Salah Alden

Advisor: Prof. Elin Mark

מנחה: פרופ"' מרק ילין

Karmiel **כרמיאל**

2016

תוכן העניינים

רקע היסטורי ומבוא

בפרויקט זה נחקור את הנושא של שברים משולבים,את התכונות שלהם,את הייצוג של מספרים רציונאליים ואי-רציונאליים כשברים משולבים,ונוכיח מספר משפטים שקשורים לנושא הזה. בהמשך נחקור את קירובי פדה והשימושים שלהם, נציג את הדרך לחישוב קירובי פדה ונראה את הקשר ביניהם לבין שברים משולבים.

בסוף הפרויקט אנו נדבר ונציג אחד השימושים החשובים של קירובי פדה שהוא פתרון משוואות דיפרנציאליות שאי אפשר לפתור אותן אנליטית.

שברים משולבים הוא נושא חשוב ושימושי בהרבה ענפים במתמטיקה וישומיה כגון: תורת הכאוס, קירוב של מספרים אי רציונאליים ופתרונות של משוואות מתמטיות שונות. מאז שזה התחיל מהאלגוריתם של אוקליד (כשנה 300 לפני הספירה) למציאת המחלק המשותף הכי גדול של שני מספרים.

ארכימדס (Archimedes) עשה שימוש בשיטת השברים המשולבים, במסגרת עבודתו על שיטה לחישוב של מספר π שבמהלכה היה צריך לבצע קירובים רציונליים לשורשים ריבועיים של מספרים שאינם רציונאליים. מאוחר יותר, גם פיבונאצ'י חקר את השימוש בשברים משולבים.

המונח "שבר משולב" נטבע ב–1653 על ידי ג'ון ואליס (John Wallis). בערך באותה התקופה, המדען ההולנדי המפורסם כריסטיאן הויגנס (Christiaan Huygens) עשה השימוש הפרקטי הראשון בשברים משולבים, כשהשתמש בהם לצורך בניית מכשירים מדעיים המורכבים מגלגלי שיניים.

את הטיפול השיטתי הראשון בשברים משולבים סיפק לאונרד אוילר (Leonard Euler) בהם ניתח באופן מעמיק את התכונות של שברים משולבים, הוכיח שכל מספר רציונאלי ניתן להצגה כשבר משולב סופי ומצא הצגה של המספר e כשבר משולב אינסופי, ממנה נבע שהמספר e הינו אי רציונאלי.

ב–1813, קרל פרידריך גאוס(Karl Friedrich Gauss) גזר תבנית כללית ביותר של שברים משולבים עם ערכים מרוכבים באמצעות זהות שקישרה בינם לטור ההיפרגאומטרי. גאוס גם חקר לפני כן, ב–1800, את ההתנהגות של שברים משולבים של מספרים ממשיים אקראים וניסח והוכיח מספר חוקים לגבי ההתנהגות שלהם.

פרק 1. שברים משולבים

בפרק זה נכיר את השברים המשולבים ואת התכונות והשימושים שלהם ונלמד כיצד שברים משולבים קשורים לאלגוריתם של אוקליד למציאת המחלק המשותף הכי גדול.

1.1 <u>הגדרות ודוגמאות</u>

שברים משולבים הם ביטויים מהצורה $x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ldots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}}$ כאשר

$a_1,\ldots,a_n\ldots$ והן $b_1,\ldots,b_n\ldots$ הם בדרך כלל מספרים טבעיים או כללים יותר, למשל מרוכבים, הנקראים המקדמים של השבר המשולב.

אם $b_i = 1$ לכל $i = 0,\ldots,n$ אזי השבר נקרא שבר משולב פשוט אחרת הוא נקרא שבר משולב מוכלל.

נהוג לסמן שבר משולב פשוט בצורה מקוצרת כ- $x = [a_0;\ a_1,\ldots,a_n]$ ושבר משולב מוכלל בצורה $x = a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\ldots$.

אם השבר בעל מספר סופי של איברים אזי הוא נקרא שבר משולב סופי (finite continued fraction). אחרת הוא נקרא שבר משולב אינסופי (infinite continued fraction) .

<u>דוגמאות :</u>

$$\frac{45}{16} = [2;1,4,3]$$

$$\sqrt{19} = [4;2,1,3,1,2,8,2,1,3,1,2,8,\ldots]$$

$$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,\ldots]$$

$$\phi = [1;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots]\ (golden\ mean)$$

לפני שנדבר על איך מחשבים שברים משולבים נזכיר את האלגוריתם של אוקליד לחישוב מחלק משותף הגדול ביותר של שני **מספרים טבעיים** :

<u>דוגמא:</u> למצוא את המחלק המשותף הכי גדול של 1071 ו- 462 :

1071 = 462 x 2 + 147

462 = 147 x 3 + 21

147 = 21 x 7 + **<u>0</u>**

נקבל שהמחלק המשותף הכי גדול ל 1071 ו 462 הוא **<u>21</u>**.

1.2 חישוב שברים משולבים של מספרים רציונאלים

החישוב של שבר משולב של איזשהו מספר רציונאלי מתבוסס על האלגוריתם של אוקליד.

לדוגמא נרצה למצוא את השבר המשולב של המספר $\frac{1071}{462}$.

לפי האלגוריתם של אוקליד קיבלנו ש :

1071 = 462 x **2** + 147

462 = 147 x **3** + 21

147 = 21 x **7** + **0**

אזי נקבל ש- $\left[2;3,7\right]=\frac{1071}{462}$. קיבלנו שבר משולב סופי.

דוגמא:

נחשב שבר משולב של $\frac{2875}{1000}=2.875$

2875 = **2** ×1000 + 875

1000 = **1** × 875 + 125

875 = **7** × 125 + 0

אזי נקבל ש- $\left[2;1,7\right]=2.875=\frac{2875}{1000}$.

בדוגמאות הנ"ל קבלנו שברים משולבים סופיים. מתברר שזה לא מקרי אלא תכונה כללית של שברים משולבים של מספרים רציונאליים, כעת נלמד תכונות של שברים משולבים של מספרים אלה:

משפט 1: שבר משולב של כל מספר ממשי הוא סופי אמ"מ המספר הוא מספר רציונאלי.

הוכחה: מציאית שבר משולב מתבצעת על סמך האלגוריתם של אוקליד, כלומר אם המספר הוא רציונאלי אזי באיזשהו שלב נגיע לשארית חילוק ששווה לאפס לכן מזה נובע ששבר משולב של מספר רציונאלי הוא סופי.

נוכיח עכשיו את הכיוון השני. נניח שנתון שבר משולב סופי, נוכיח את הנדרש באינדוקציה.
נניח ש X_n מייצג את הערך ה n -י של השבר המשולב.

נבדוק קודם כל עבור המקרה $n=0$: אזי $X_0=a_0$ כך ש - $a_0\in N$ כלומר המספר הוא רציונאלי.

נוכיח עכשיו שהטענה נכונה עבור $n=k$ (כלומר עבור כל סדר של השבר הסופי) .

כלומר נתון ש $X_k = [a_0;\ a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$.

נכתוב את X כ- $X_k = a_0 + \frac{1}{Y}$ כך ש- $Y = [a_1;\ a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k]$.

מאוחר ו- Y שבר משולב **<u>סופי</u>** אזי אפשר לכתוב בצורה $Y = \frac{p}{q}$ כלומר $X_k = \frac{pa_0 + q}{p}$

מאוחר ו- p, q, a_0 מספרים שלמים אזי נקבל ש X_k מספר רציונאלי ▪

<u>משפט 2:</u> אם שבר משולב סופי נגמר במספר שגדול מ 1, אזי אפשר להציג אותו בשתי צורות $[a;b,c,d,e,f,g]$ או $[a;b,c,d,e,f,(g-1),1]$.

לדוגמה: $\frac{7}{30} = [\,0;\ 4,\ 3,\ 2\,] = [\,0;\ 4,\ 3,\ 1,\ 1\,]$

<u>משפט 3:</u> לכל שבר משולב של מספר רציונאלי אפשר לקבל את ההצגה של ההפוך על ידי הזזת המקדמים (האיברים של השבר) ימינה או שמאלה.

<u>דוגמה:</u>

$$\frac{7}{30} = [\,0;\ 4,\ 3,\ 2\,] \leftrightarrow \frac{30}{7} = [\,4;\ 3,\ 2\,]$$

$$\frac{1071}{462} = [2;3,7] \leftrightarrow \frac{462}{1071} = [0;2,3,7]$$

1.3 חישוב שברים משולבים של מספרים אי רציונאלים

נניח כאת ש- x הוא מספר אי רציונאלי.

נגדיר $n = [x]$ החלק השלם של המספר x ונגדיר גם $u = x - n$ החלק השברי של המספר x כך ש- $0 \le u < 1$. ברור שאם $u = 0$ אזי x מספר שלם, מכאן ניתן לייצג את x כסכום $x = n + u$.

נמשיך בתהליך הזה. אזי נקבל $n_1 \le \frac{1}{u} < n_1 + 1$, $n_1 = \left[\frac{1}{u}\right]$, $u_1 = \frac{1}{u} - n_1$, $0 \le u_1 < 1$

$\frac{1}{u} = n_1 + u_1$, ונקבל ש- $x = n + \frac{1}{n_1 + u_1}$.

באותה הדרך נמשיך את התהליך ונקבל ש- $\frac{1}{u_k} = n_{k+1} + u_{k+1}$ כך ש n_{k+1} מספר שלם ו- $0 \le u_{k+1} < 1$, אז רואים כי

$$x = n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{n_k + u_k}}}}}.$$

הפיתוח הנ"ל מוכיח שכל מספר **ממשי** אפשר להציג כשבר משולב, וראינו קודם שכל מספר הוא רציונאלי אם ורק אם אפשר להציג **כשבר משולב סופי**, ז"א בשלב מסוים נגיע ל k מסוים כך ש- $u_k = 0$.

מה קורא אם המספר הוא אי רציונאלי ?

נתבונן בכמה דוגמאות לחישוב שברים משולבים למספרים אי רציונאלים לפי האלגוריתם שהזכרנו לעיל.

<u>דוגמא:</u>

נחשב את השבר המשולב של π לפי האלגוריתם לעיל.

$\pi = 3.141...$ $\quad 3 \le \pi < 4$ $\quad n = [\pi] = 3$ $\quad 0 \le \mathrm{u} = 0.14 < 1$

$\frac{1}{u} = 7.142$ $\quad n_1 = [\frac{1}{u}] = 7$ $\quad u_1 = 0.142$

$\frac{1}{u_1} = 7.042$ $\quad n_1 = [\frac{1}{u_1}] = 7$ $\quad u_2 = 0.042$

אם נמשיך בתהליך הזה נקבל:
$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}}$$

או בקיצור $\left[3; 7, 15, 1, 292\ldots\right]$.

ראינו שקיבלנו שבר משולב אינסופי.

נשווה את הקירוב הזה עם האלגוריתם של אוקליד כלומר אם אנחנו רוצים לקחת את π עם דיוק של שלושה ספרות אחרי הנקודה העשרונית **(אפשר גם יותר תלוי במידת הדיוק שאנחנו רוצים אותה אבל מה שחשוב שיהיה מספר סופי של ספרות)** (3.141) היינו יכול לכתוב כשבר רציונאלי רגיל:

$3.141 = \frac{3141}{1000}$ ואז לפי האלגוריתם של אוקליד נקבל:

3141 = 1000 x **3** + 141

1000 = 141 x **7** + 13

141 = 13 x **10** + 11

13 = 11 x **1** +2

11 = 2 x **5** + 1

2 = 1 x **2** + **0**

ונקבל
$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

או בקיצור $\left[3; 7, 10, 1, 5, 2\right]$.

כעת נוכל לנסח מסקנה על הצגת מספרים אי רציונאלים ע"י שברים משולבים שנובעת מהמשפטים הקודמים:

מסקנה: שבר משולב של כל מספר אי-רציונאלי הוא אינסופי.

1.4 שברים משולבים מחזוריים

שבר משולב מחזורי הוא שבר משולב שבו אחד או כמה מספרים חוזרים על עצמם באופן קבוע.

דוגמא:

נרצה למצוא שבר משולב של $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}=1.414...$

אפשר לכתוב את $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$ ← $x=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}$ ← נכפיל את המונה והמכנה ב $1+\sqrt{2}$ ← $x=2+\frac{1}{x}$

אם נציב באגף שמאלי של המשוואה $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$ את הערך של x: $x=2+\frac{1}{x}$ נקבל :

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$$

אזי נקבל : $\sqrt{2}=[1;2,2,2,2,2,\dots]$

קיבלנו שבר משולב מחזורי עם מחזור 1.

באופן דומה נתן לקבל גם

$\sqrt{5}=[2;4,4,4,4,4,4.......]$

$\sqrt{51}=[7;7,14,7,14,7,14,7,14,........]$

אם כך, נשאלת שאלה אלה מספרים מיוצגים ע"י שברים מחזוריים?

משפט 4: שבר משולב של מספר אי רציונאלי הוא מחזורי אם ורק אם המספר הוא פתרון של משוואה ריבועית.

למשל בדוגמה שלנו $\sqrt{2}$ הוא פתרון של המשוואה הריבועית $x^2-4=0$.

בפרט אנו מסיקים את נטענה הבאה:

מסקנה: שברים משולבים של כל השורשים של מספרים טבעיים שהם לא ריבוע שלם הם מחזוריים.

פרק 2. התכנסות שבר משולב

מתברר שתכונות של שברים משולבים שראינו בפרק הקודם קשורות לקשר בין השברים האלה להעתקות שבר ליניאריות. יותר מזה הקשר המוזכר מאפשר לחקור התכנסות של שברים משולבים.

נציג את השבר המשולב כהעתקה שבר ליניארי :

$t_k : u \to \frac{1}{a_k + u}$ אזי רואים ששבר משולב הוא הרכבה של העתקות $w_n = t_1 \circ t_2 \circ ....t_n$

כאשר w_n נקרא הקירוב ה n - י לשבר המשולב.

נסמן ב p_n ו- q_n את המונה והמכנה (בהתאמה) של הקירוב ה n -י, ז"א $w_n = \frac{p_n}{q_n}$.

<u>משפט 5:</u> לכל שבר משולב $X_n = [a_0;\ a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ (מסדר n) מתקיימים תנאי רקורסיה הבאים: $p_n = a_n . p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_n . q_{n-1} + q_{n-2}$, עבור $n = 0,1,...$ עם תנאי התחלה $p_{-1} = 1$, $p_{-2} = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_{-2} = 1$.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה, נסמן $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ את הסדר ה- n -י של השבר.

נבדוק את שני המקרים הראשונים כלומר עבור $n=0$ ו- $n=1$:

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1}$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1 \cdot 1 + 0} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1}$$

שני המקרים מתקיימים.

נניח עכשיו שהטענה מתקיימת עבור $n=k$ ונוכיח שהיא מתקיימת עבור המקרה $n=k+1$

הנחה: $C_k = [a_0; a_1, ..., a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}}$.

נכתוב את $C_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ כשבר משולב מסדר k במקום סדר $k+1$ בצורה הבאה:

כלומר נכתוב את $C_{k+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}$ כ- $C_{k+1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{\cfrac{a_k \cdot a_{k+1} + 1}{a_{k+1}}}}}$

כלומר C_{k+1} עכשיו מסדר k.

נשתמש בהנחה של האינדוקציה עבור סדר k של השבר, $C_{k+1}=\dfrac{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot q_{k-1}+q_{k-2}}$

אזי

$$C_{k+1}=\frac{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot q_{k-1}+q_{k-2}}=\frac{\left(a_k\cdot p_{k-1}+p_{k-2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot p_{k-1}}{\left(a_k\cdot q_{k-1}+q_{k-2}\right)+\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot q_{k-1}}=\frac{p_k+\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot p_{k-1}}{q_k+\left(\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)\cdot q_{k-1}}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב- a_{k+1} אזי נקבל:

$\dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\dfrac{a_{k+1}\cdot p_k+\cdot p_{k-1}}{a_{k+1}\cdot q_k+\cdot q_{k-1}}=C_{k+1}$ אזי קיבלנו שהטענה נכונה עבור המקרה $n=k+1$ ▪

משפט 6: לכל שבר משולב $X_n=[a_0;\ a_1,\dots,a_{n-1},a_n]$ (מסדר n) מתקיים תנאי רקורסיה הבא: $p_n\cdot q_{n-1}-p_{n-1}\cdot q_n=(-1)^n$ עבור $n=0,1,\dots$ עם תנאי התחלה $p_{-1}=0$, $p_0=1$, $q_{-1}=1$, $q_0=0$.

הוכחה: נבדוק עבור המקרים $n=0$ ו- $n=1$:

$p_0\cdot q_{-1}-p_{-1}\cdot q_0=1(1)-0(0)=1=(-1)^0$.

$p_1\cdot q_0-p_0\cdot q_1=(a_1\cdot p_0+p_{-1})\cdot(0)-1\cdot(a_1\cdot q_0+q_1)=-1=(-1)^1$.

שני המקרים מתקיימים.

נניח עכשיו שהטענה מתקיימת עבור $n=k$ כלומר $p_k\cdot q_{k-1}-p_{k-1}\cdot q_k=(-1)^k$, נוכיח שהטענה מתקיימת עבור $n=k+1$.

$$\begin{aligned}&p_{k+1}\cdot q_k-p_k\cdot q_{k+1}=(a_{k+1}\cdot p_k+p_{k-1})\cdot q_k-p_k\cdot(a_{k+1}\cdot q_k+p_{k-1})=\\&a_{k+1}\cdot p_k\cdot q_k+p_{k-1}\cdot q_k-a_{k+1}\cdot p_k\cdot q_k-p_k\cdot q_{k-1}=\\&p_{k-1}\cdot q_k-p_k\cdot q_{k-1}=-(\cdot p_k\cdot q_{k-1}-p_{k-1}\cdot q_k)=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

אזי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$ ▪

משפט 7: שבר משולב $x=[a_0;a_1,\dots,a_n]$ מתכנס למספר סופי אם ורק אם הטור $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

פרק 3.קירוב פדה

בפרק זה נציג ונדבר על שיטת קירוב הנקראת קירוב פדה (Padè approximation) והקשר של הקירובים האלה עם שברים משולבים.

3.1 תאור השיטה:

שיטת פדה היא דרך לקירוב פונקציה נתונה שרירותית באמצעות פונקציה רציונאלית.
התיאוריה פותחה בסביבות שנת 1890 ע"י המתמטיקאי הצרפתי הנרי פדה (Henri Padé).

קירוב פדה מתקבל מפיתוח הפונקציה לנוסחת טיילור,אבל היתרון של קירוב פדה שהוא נותן קירוב לפונקציה יותר טוב מקירוב טיילור גם מעבר לרדיוס ההתכנסות של טור טיילור, כלומר בנקודות שבהן טור טיילור מתבדר.

נסמן את הקירוב ב- $P_M^N(x)=\dfrac{A_N(x)}{B_M(x)}=\dfrac{\sum_{n=0}^{N}a_nx^n}{\sum_{n=0}^{M}b_nx^n}$ כאשר המונה הוא פולינום ממעלה N והמכנה פולינום ממעלה M וגם $b_0=1$, במקרה המיוחד שבו $M=0$ נקבל שקירוב פדה זהה לנוסחת טיילור מסדר N כלומר נוסחת טיילור היא מקרה מיוחד $(M=0)$ עבור קירוב פדה.

משפט 8: נניח שנתונה הפונקציה $f\in C^{M+N}(x_0)$, ז"א שהפונקציה גזירה לפחות $M+N$ פעמים סביב נקודה x_0 מסוימת, אזי ניתן לקרב אותה ע"י פונקציה רציונאלית $P_M^N(x-x_0)=\dfrac{A_N(x-x_0)}{B_M(x-x_0)}$ כאשר $A_N(x)$ ו- $B_M(x)$ הם פולינומים ממעלה N ו- M

בהתאמה, לשם הנוחות וכדי שלא נגיע לנוסחאות בלתי קריאות ניקח את $x_0=0$ ואז נרשום $f(x)\approx P_M^N(x)=\dfrac{A_N(x)}{B_M(x)}$.

לקירוב זה ($P_M^N(x)$) קוראים קירוב פדה.

לפני שנכיר דרך כללית לבניית הקירובים הנ"ל, נציג שתי דוגמאות לחישוב קירוב פדה:

דוגמא:

נחשב את $P_2^2(x)$ לפונקציה $f(x)=e^x$ סביב הנקודה $x_0=0$.

נפתור את המשוואה $f(x)=\dfrac{A_2(x)}{B_2(x)}+O(x^5)$ כאשר $A_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. $B_2(x)=1+b_1x+b_2x^2$

נפתח את הפונקציה לנוסחת טיילור מסדר רביעי $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+O(x^5)$.

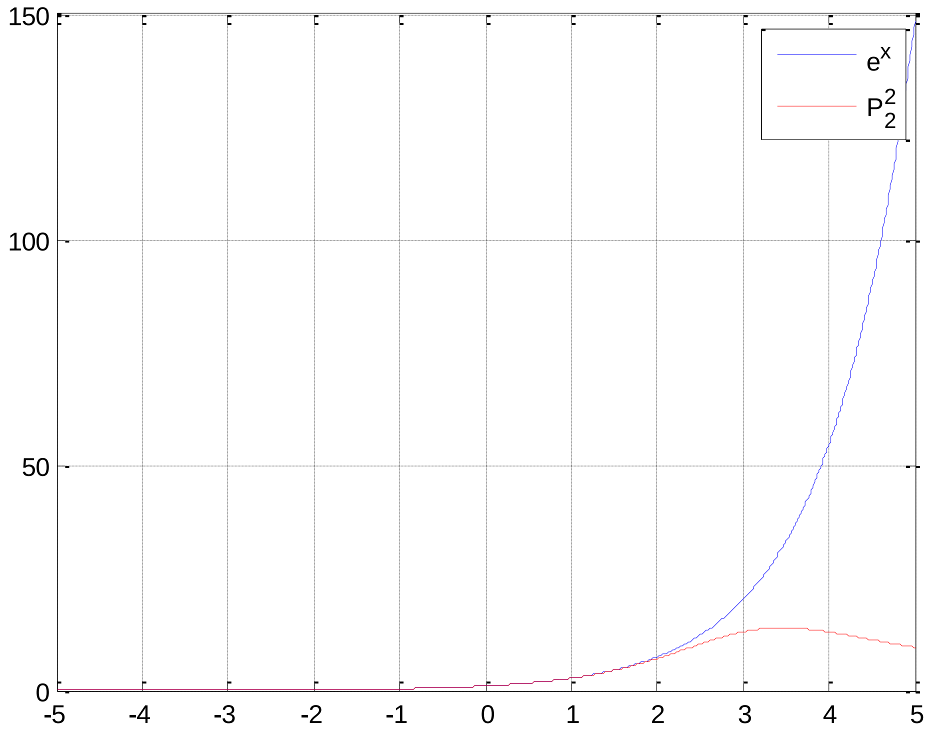
אזי מתקיים $f(x)\cdot B_2(x)-A_2(x)=O(x^5)$ אם עכשיו נאסוף איברים עד לחזקה 4, נקבל:

$$(1-a_0)+(1-a_1+b_1)\cdot x+\left(\frac{1}{2}-a_2+b_1+b_2\right)\cdot x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{b_1}{2}+b_2\right)\cdot x^3+\left(\frac{1}{24}+\frac{b_1}{6}+\frac{b_2}{2}\right)\cdot x^4=0$$

אזי מתקיים:

$$\begin{array}{l} 1-a_0=0 \\ 1-a_1+b_1=0 \\ \frac{1}{2}-a_2+b_1+b_2=0 \\ \frac{1}{6}+\frac{b_1}{2}+b_2=0 \\ \frac{1}{24}+\frac{b_1}{6}+\frac{b_2}{2}=0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} a_0=1 & b_0=1 \\ a_1=\frac{1}{2} & b_1=-\frac{1}{2} \\ a_2=\frac{1}{12} & b_2=\frac{1}{12} \end{array} \Rightarrow P_2^2(x)=\frac{12+6\cdot x+x^2}{12-6\cdot x+x^2}$$

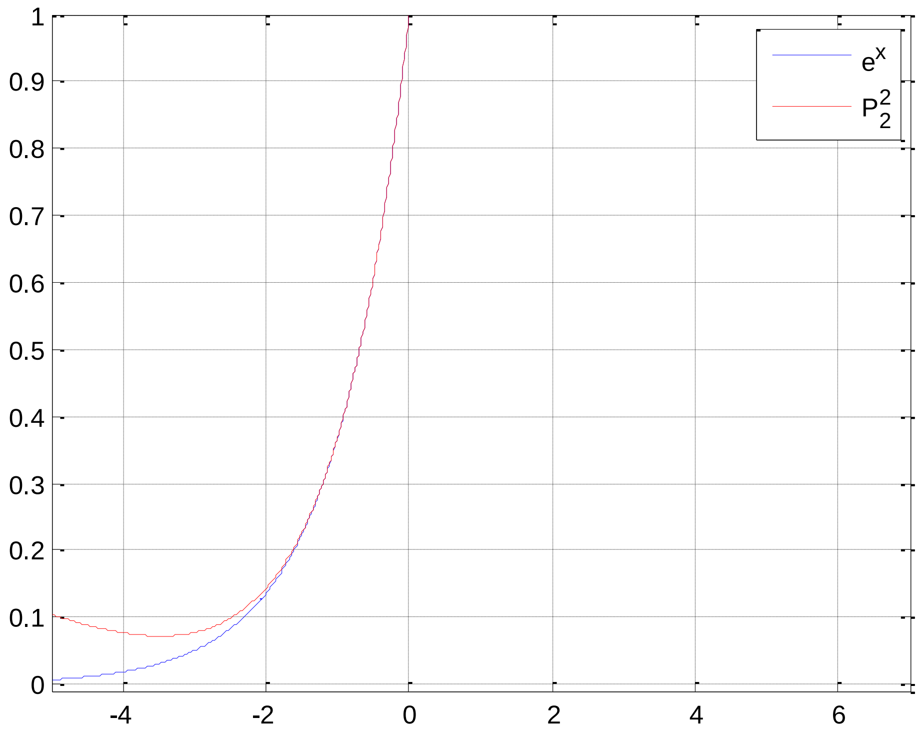
<u>(ראה קוד 1 בנספח 2)</u>



graph 1

מהגרף אנו יכולים לראות שבסביבת הנקודה $x=0$ השגיאה שואפת לאפס ומאיזה שהיא נקודה השגיאה מתחילה לגדול מאוחר ש- $\lim_{x\to\infty} e^x=\infty$ ו- $\lim_{x\to\infty} P_2^2=1$.

מאוחר והקירוב במקרה שלנו הוא סביב הנקודה $x=0$ ולשם הבהרה, נסתכל על אותו גרף אבל בתחום $-5\le x\le 7$ ו- $-0.01\le y\le 1$.



graph 2

מהגרף אנו יכולים לראות כיצד P_2^2 מתכנס לפונקציה בנקודה $x=0$ ובתחום $x<0$ אנו רואים כיצד השגיאה הולכת וגדלה כי $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ו- $\lim_{x\to-\infty} P_2^2 = 1$.

<u>דוגמא 2:</u>

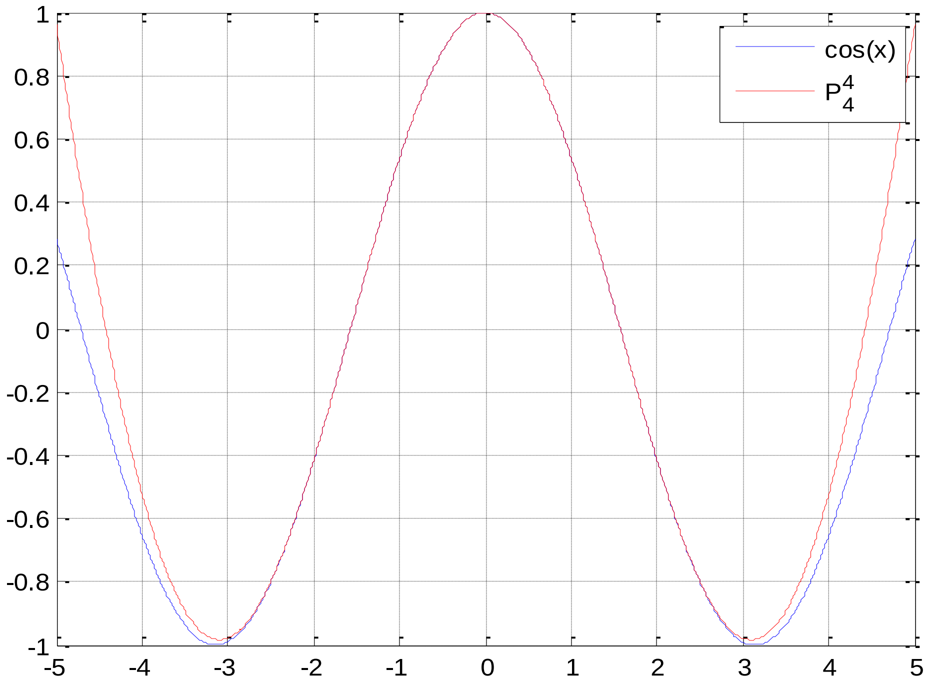
נחשב את $P_4^4(x)$ לפונקציה $f(x)=\cos(x)$ סביב $x_0=0$.

נפתח את הפונקציה לטור טיילור מסדר שמיני $f(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}+O(x^9)$

אזי מתקיים $f(x)\cdot B_2(x)-A_2(x)=O(x^9)$ אם עכשיו נאסוף איברים עד לחזקה 9, נקבל :

$$(1-a_0)+(-a_1+b_1)\cdot x+\left(-\frac{1}{2}-a_2+b_2\right)\cdot x^2+\left(-a_3-\frac{b_1}{2}+b_3\right)\cdot x^3+$$
$$\left(\frac{1}{24}-\frac{b_2}{2}-a_4+b_4\right)\cdot x^4+\ldots=0$$

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = 1$$
$$a_1 = 0 \qquad b_1 = 0$$
$$a_2 = -\frac{115}{252} \quad \Longrightarrow \quad b_2 = \frac{11}{252} \quad \Longrightarrow \quad P_4^4(x) = \frac{15120 - 6900 \cdot x^2 + 313 \cdot x^4}{15120 + 660 \cdot x^2 + 13 \cdot x^4}$$
$$a_3 = 0 \qquad b_3 = 0$$
$$a_4 = -\frac{313}{15120} \qquad b_4 = \frac{13}{15120}$$



graph 3

מהגרף אנו יכולים לראות את ההתכנסות סביב $x=0$.

3.2 טבלת פדה:

טבלת פדה היא טבלה אשר בתוכה נמצאים הערכים הנומריים של $P_M^N(x)$.

לפני שנדבר על מבנה הטבלה נציג את הדרך הכללית לחישוב הקירוב של פדה $P_M^N(x)$.

נתונה הפונקציה $f \in \mathbb{C}^{M+N}$, נניח שהפונקציה גזירה לפחות $M+N$ פעמים, רוצים לקרב אותה ע"י פונקציה רציונאלית $P_M^N(x) = \frac{A_N(x)}{B_M(x)}$ כאשר $A_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot x^n$ ו- $B_M(x) = 1 + \sum_{n=1}^{M} b_n \cdot x^n$ הם פולינומים ממעלה N ו- M בהתאמה, ז"א $f(x) \approx P_M^N(x) = \frac{A_N(x)}{B_M(x)}$.

נשים לב שבהינתן אום הנתונים, אפשר לפתח את הפונקציה $f(x)$ לנוסחת טיילור מסדר $M+N$, כלומר למצוא פולינום טיילור $T_{M+N}(x) = \sum_{n=0}^{M+N} c_n \cdot x^n$ כך ש- $c_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$. נפתור את המשוואה $T_{M+N}(x) \approx \frac{A_N(x)}{B_M(x)}$ או יותר מדויק $T_{M+N}(x) = \frac{A_N(x)}{B_M(x)} + O\left(x^{M+N}\right)$, אזי נקבל

$$c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots}{1 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \ldots} + O(x^{M+N})$$

נבצע השוואת מקדמים ,נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + c_0 b_1 \\
a_2 &= c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 \\
a_3 &= c_3 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 \\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

ונקבל את המקדמים a_i, b_i , עד סדר כלשהו נדרש, כלומר עבור $i = 0,1,2,\ldots$, מאוחר והפולינום $A_N(x)$ הוא ממעלה N נקבל ש- $a_i = 0$ לכל $i > N$ במערכת המשוואות.

הצורה הכללית של הטבלה היא:

M/N	0	1	2	3	$\cdots$
0	$P_0^0(x)$	$P_0^1(x)$	$P_0^2(x)$	$P_0^3(x)$	$\cdots$
1	$P_1^0(x)$	$P_1^1(x)$	$P_1^2(x)$	$P_1^3(x)$	$\cdots$
2	$P_2^0(x)$	$P_2^1(x)$	$P_2^2(x)$	$P_2^3(x)$	$\cdots$
3	$P_3^0(x)$	$P_3^1(x)$	$P_3^2(x)$	$P_3^3(x)$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

דוגמא:

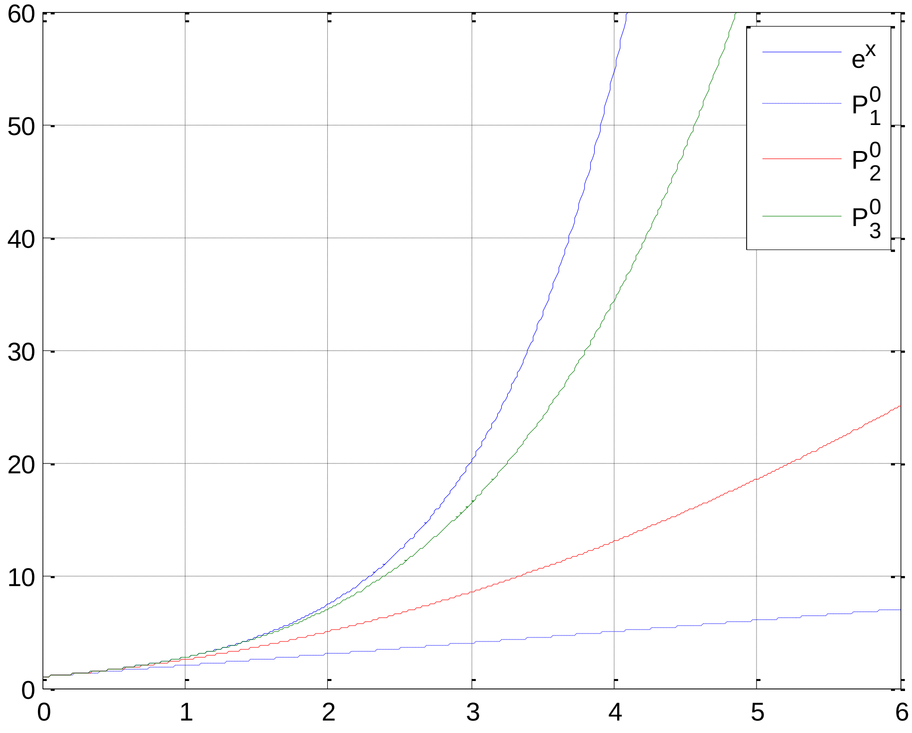
נתבונן בטבלת פ'דה חלקית לפונקציה מערכית e^x

M/N	0	1	2	3	$\cdots$
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3}$	$\cdots$
1	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	$\frac{1+\frac{1}{4}x}{1-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^3}$	$\cdots$
2	$\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2}{1}$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	$\frac{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2-\frac{1}{60}x^3}$	$\cdots$
3	$\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4}{1}$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	$\frac{1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{60}x^3}{1-\frac{2}{5}x+\frac{1}{20}x^2}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2+\frac{1}{120}x^3}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{120}x^3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

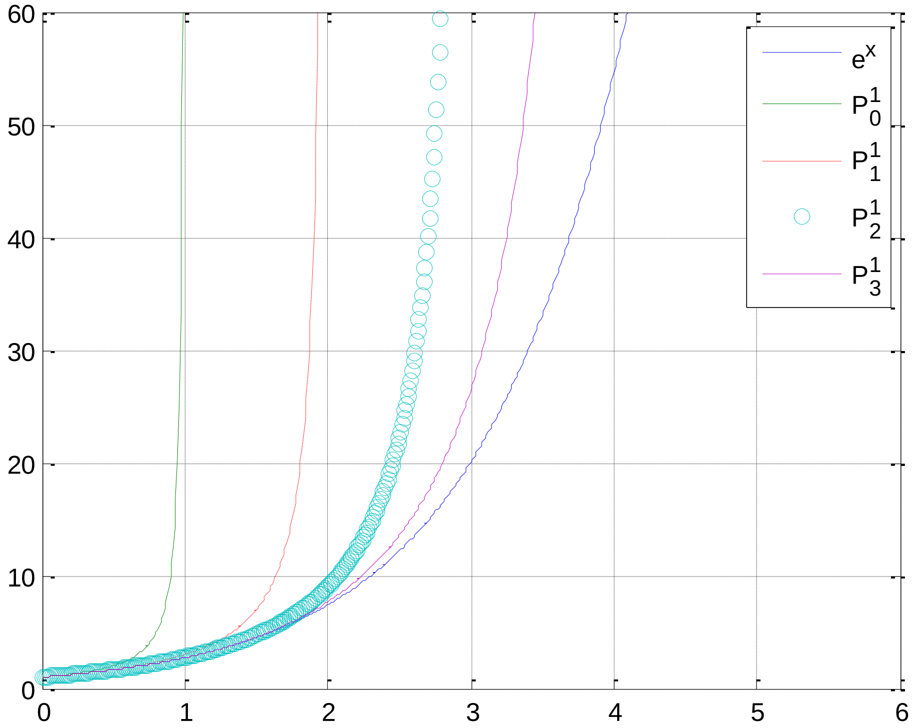
נשים לב שכל אחת מהפונקציות רציונאליות בטבלה שנמצאות באלכסון מאונך לאלכסון הראשי בנויות על סמך אותם הנתונים **נשאלת השאלה איזה פונקציה מהן נותנת קירוב הכי טוב לפונקציה המקורית?**

נסתכל על הגרפים של הקירובים ביחס לפונקציה סביב הנקודה $x_0 = 0$:

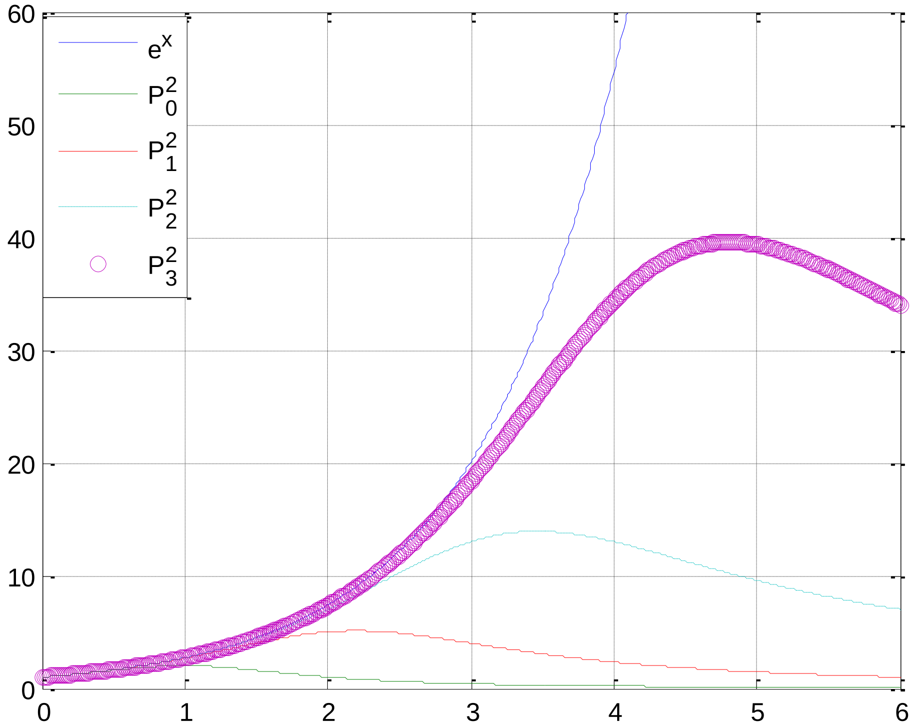
(ראה קוד 2 בנספח 2)



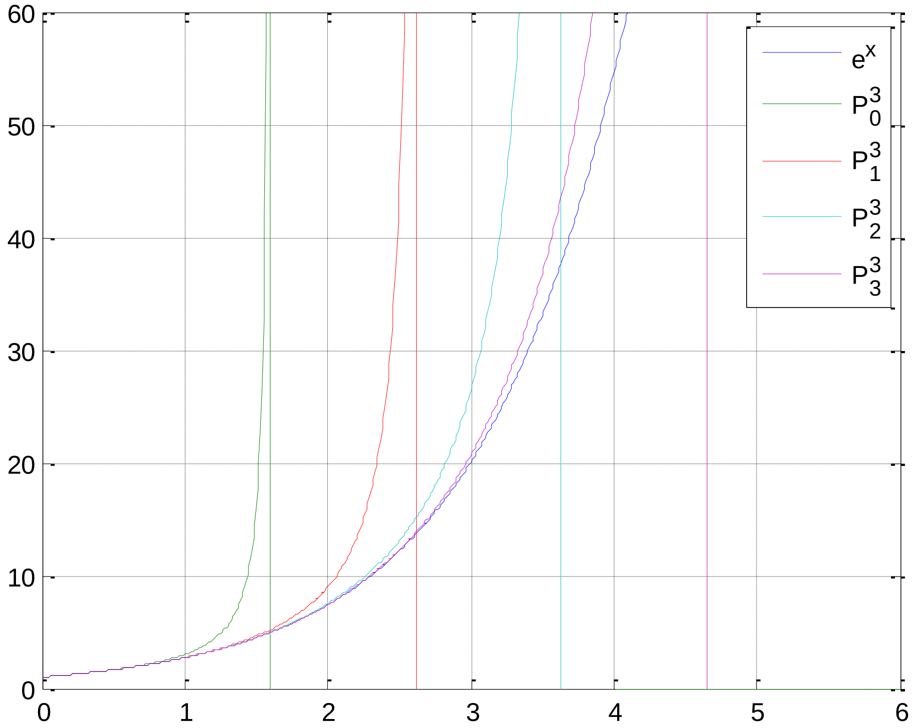
graph 4



graph 5



graph 6



graph 7

נתבונן בטבלת השגיאות בנספח 1 **(ראה קוד 3 בנספח 2)** של כל אחד מהקירובים במספר נקודות שנמצאת בנספח **(ראה נספח 2)** בתנאי שפונקציית הקירוב מוגדרת בסביבת הנ"ק הנוכחית.

מהגרפים והטבלאות אנו יכולים להסיק את המסקנות הבאות:

- ככל שלוקחים קירוב מסדר יותר גבוה אנו מקבלים קירוב יותר טוב ז"א שגיאה יותר קטנה ואז מקבלים התכנסות יותר מהירה לערך של הפונקציה.

- בדרך כלל הקירובים הטובים ביותר הם הקירובים אשר נמצאים באלכסון הראשי ובאלכסון שמתחתיו כלומר האיברים P_N^N ו P_{N+1}^N לכל $N = 0,1,2\ldots$ בטבלת הקירובים של פ'דה.

3.3 יצוג קירוב פדה באמצעות שברים משולבים

נתונה הפונקציה $f(x)$ נניח שנוסחת טיילור שלה מסדר k היא $f(x) \sim \sum_{n=0}^{k} c_k \cdot x^k$ אזי

אפשר להציג אותה כשבר משולב בצורה הבאה:

$$f(x) = \cfrac{b_1(x)}{a_1(x) + \cfrac{b_2(x)}{a_2(x) + \cfrac{b_3(x)}{a_3(x) + \cfrac{b_4(x)}{\ldots + \cfrac{b_n(x)}{a_n(x)}}}}}$$

ננסח כמה נוסחאות שהזכרנו בפרק 1(מספרים) שהן תקיפות גם במקרה של קירובי פונקציות.

נסמן ב $\frac{A_n}{B_n}$ את הקירוב ה n-י של הפונקציה כאשר $\deg(A_{2n-1}) = 2n-1$, $\deg(A_{2n}) \le 2n-1$,

$\deg(B_{2n}) = 2n$, $\deg(B_{2n+1}) \le 2n$, אזי מתקיים:

$$\begin{aligned} A_n &= b_n \cdot A_{n-1} + a_n \cdot A_{n-2} \\ B_n &= b_n \cdot B_{n-1} + a_n \cdot B_{n-2} \end{aligned}$$ עבור $n = 0,1,2,3,\ldots$ עם תנאי התחלה $\begin{pmatrix} A_{-1} & A_0 \\ B_{-1} & B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

יש מספר שיטות לייצוג פונקציה רציונאלית כשבר משולב , נציג אחת השיטות:

דוגמא: נחשב את השבר המשולב של הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1}$.

נבצע חלוקת פולינומים רגילה נקבל $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1} = 1 + \frac{4x+1}{x^2-x+1}$.

רואים ש- $4x+1 < x^2-x+1$ לכן נכתוב את השבר בצורה הבאה: $\frac{4x+1}{x^2-x+1} = \cfrac{1}{\cfrac{x^2-x+1}{4x+1}}$

ושוב $\frac{21/16}{4x+1} + \frac{5}{16} - \frac{x}{4} = \frac{x^2-x+1}{4x+1}$.

באותה דרך נמשיך ונקבל $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-x+1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x}{4} - \cfrac{5}{16} + \cfrac{1}{\cfrac{64}{21}x + \cfrac{16}{21}}}$.

3.4 שימוש בקירובי פדה לפתרון משוואות דיפרנציאליות

בפרק קודם הכרנו את קירובי פדה וראינו שהם נותנים קירוב טוב לפונקציות, בפרק זה נציג את השימוש של קירובים אלה בפתירת משוואות דיפרנציאליות.

נציג את הדרך בעזרת הדוגמא הבאה:

דוגמא:

נתבונן בבעית ההתחלה הכוללת המשוואה הדיפרנציאלית $y' = y^2 + \frac{8}{y} - 12 \cdot \frac{1+x+3x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$

ו-תנאי ההתחלה $y(0) = 1$.

מהתבוננות במשוואה אנו רואים ש- :

- המשוואה לא פתירה בצורה אנליטית,ולכן צריך לפתור אותה נומרית.
- ממבנה המשוואה ברור שלמשוואה יש סינגולאריות כאשר $x=-1$, $x=0.5$, $y=0$, ולכן צריך לחפש פתרונות בתחום $-1<x<0.5$, $y>0$.

נמצא קודם כל את $y'(0)$ ו- $y''(0)$.

$$y'(0) = y(0)^2 + \frac{8}{y(0)} - 12 \cdot \frac{1+0+3\cdot 0^2}{(1+0)^2(1-2\cdot 0)} = 1+8-12 = -3$$

נגזור את המשוואה:

$$y'' = 2yy' - \frac{8}{y^2} \cdot y' - 12 \cdot \frac{(6x+1)(1+x)^2(1-2x) - (1+x+3x^2)\left(2(1+x)(1-2x) - 2(1+x)^2\right)}{\left((1+x)^2(1-2x)\right)^2}$$

נציב:

$$y''(0) = 2y(0)y'(0) - \frac{8}{y(0)^2} \cdot y'(0) - 12 \cdot \frac{(1)(1)^2(1) - (1^2)\left(2(1)(1) - 2(1)^2\right)}{\left((1)^2(1)\right)^2} = -6+24-12 = 6$$

עכשיו נבנה את קירובי פדה P_2^0, P_1^1, P_0^2 .

P_0^2 הינו פולינום טיילור כי המכנה מדרגה 0 . $\Leftarrow$ $P_0^2 = T_2(x) = 1-3x+3x^2$.

$P_1^1 = \frac{a_0 + a_1 \cdot x}{1 + b_1 \cdot x}$ נפתור את המשוואה $(1+b_1 \cdot x)\cdot(1-3x+3x^2) = a_0 + a_1 \cdot x + O(x^3)$.

נבצע השוואת מקדמים נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} 3-3b_1&=0 &&\Rightarrow b_1=1\\ b_1-3-a_1&=0 &&\Rightarrow a_1=-2\\ 1-a_0&=0 &&\Rightarrow a_1=1 \end{aligned}.$$

מזה נובע $P_1^1=\dfrac{1-2x}{1+x}$.

$P_2^0=\dfrac{a_0}{1+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2}$, נפתור את המשוואה $\left(1+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2\right)\cdot\left(1-3x+3x^2\right)=a_0+O\left(x^3\right)$

נבצע השוואת מקדמים נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} 3b_1-3b_2&=0 &&\Rightarrow b_2=3\\ -3-b_1&=0 &&\Rightarrow b_1=3\\ 1-a_0&=0 &&\Rightarrow a_0=1 \end{aligned}$$

נקבל $P_2^0=\dfrac{1}{1+3x+3x^2}$.

כעת בידיעת הקירובים האלה, נחזור למשוואה המקורית ונרשום את הפתרון שלה בצורה $y=P_j^i\cdot\tilde{y}$ כך ש- $\tilde{y}(0)=1$.

$$y_1=P_0^2\cdot\tilde{y}=(1-3x+3x^2)\cdot\tilde{y}$$

$$y_2=P_2^0\cdot\tilde{y}=\left(\frac{1}{1+3x+3x^2}\right)\cdot\tilde{y}$$

$$y_3=P_1^1\cdot\tilde{y}=\left(\frac{1-2x}{1+x}\right)\cdot\tilde{y}$$

נניח ש- P_j^i הוא פתרון מקורב למשוואה הדיפרנציאלית אזי ככל ש $\tilde{y}(x)$ קרוב ל 1 נקבל ש- P_j^i נותן קירוב טוב יותר לפתרון האמיתי.

נתחיל מ- P_0^2 .

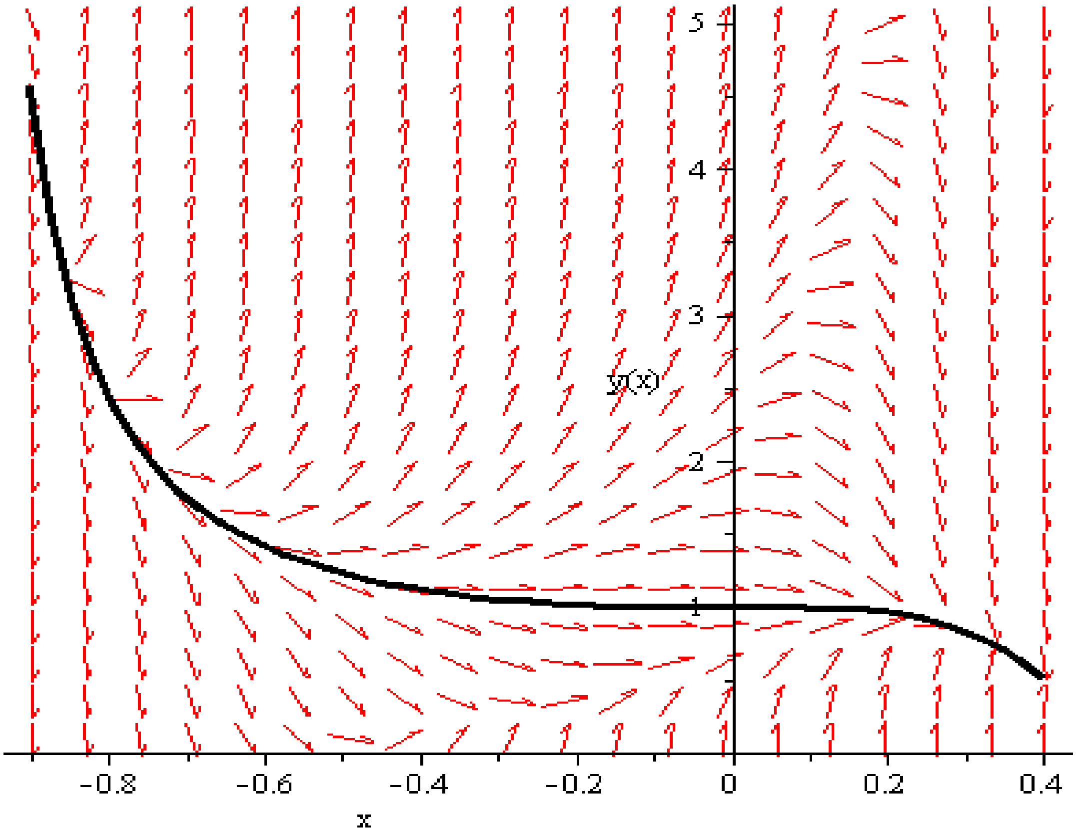
נציב $y_1=P_0^2\cdot\tilde{y}=(1-3x+3x^2)\cdot\tilde{y}$ במשוואה:

$$\tilde{y}'(1-3x+3x^2)+\tilde{y}(6x-3)=\left((1-3x+3x^2)\cdot\tilde{y}\right)^2+\frac{8}{(1-3x+3x^2)\cdot\tilde{y}}-12\cdot\frac{1+x+3x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

$$\tilde{y}'=-\tilde{y}\frac{6x-3}{1-3x+3x^2}+\tilde{y}^2\cdot\left(1-3x+3x^2\right)+\frac{8}{(1-3x+3x^2)^2\cdot\tilde{y}}-12\cdot\frac{1+x+3x^2}{(1+x)^2(1-2x)(1-3x+3x^2)}$$

נפתור את המשוואה ע"י גרפיקה ממוחשבת, נצייר שדה שיפועים של קבוצת הפתרונות של המשוואה:

<u>(ראה קוד 4 בנספח 2)</u>



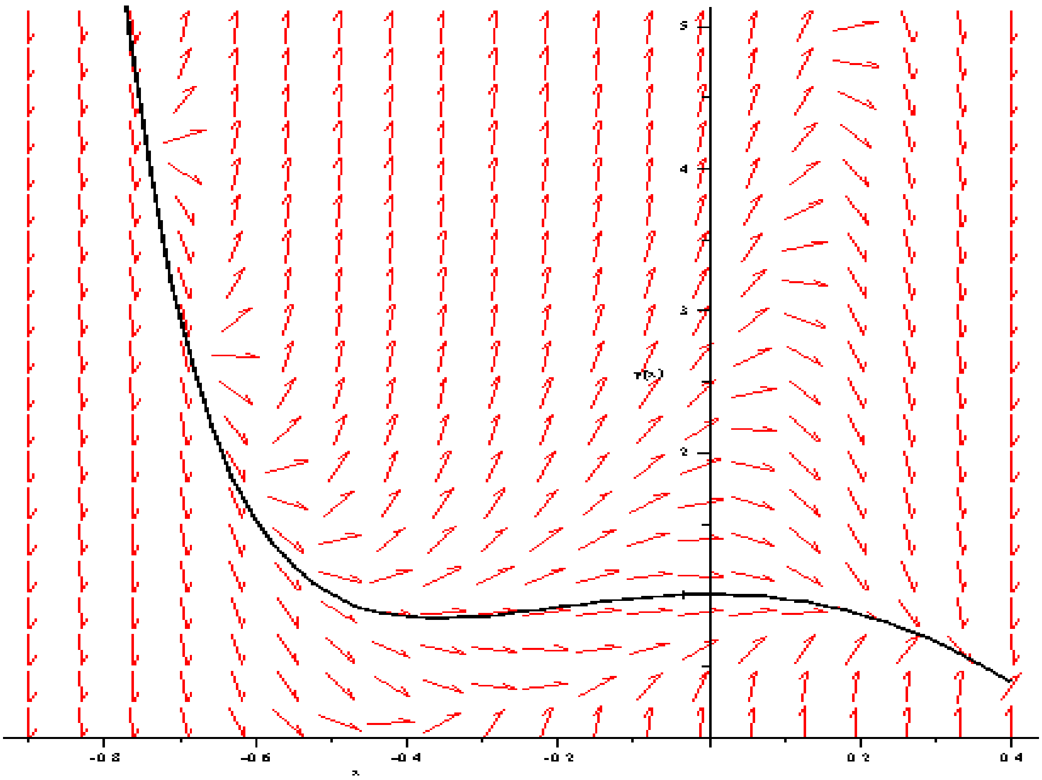
קיבלנו שהפתרון קרוב ל -1 בתחום $-0.4 < x < 0.2$ אבל רואים שלפני ואחרי התחום הזה הפתרון מתחיל להתרחק מ-1 ז"א קירוב פחות טוב מחוץ לתחום הנ"ל .

נציב $\tilde{y} \cdot \left(\frac{1}{1+3x+3x^2} \right) = y_2 = P_2^0 \cdot \tilde{y}$ במשוואה:

$$\tilde{y}'\frac{1}{1+3x+3x^2} - \frac{6x+3}{\left(1+3x+3x^2\right)^2}\tilde{y} = \left(\frac{1}{1+3x+3x^2}\cdot\tilde{y}\right)^2 + \frac{8\left(1+3x+3x^2\right)}{\tilde{y}} - 12\cdot\frac{1+x+3x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

$$\tilde{y}' = \frac{6x+3}{1+3x+3x^2}\tilde{y} + \frac{1}{1+3x+3x^2}\tilde{y}^2 + \frac{8\left(1+3x+3x^2\right)^2}{\tilde{y}} - 12\cdot\frac{\left(1+x+3x^2\right)\left(1+3x+3x^2\right)}{(1+x)^2(1-2x)}$$

נצייר שדה שיפועים של קבוצת הפתרונות של המשוואה:



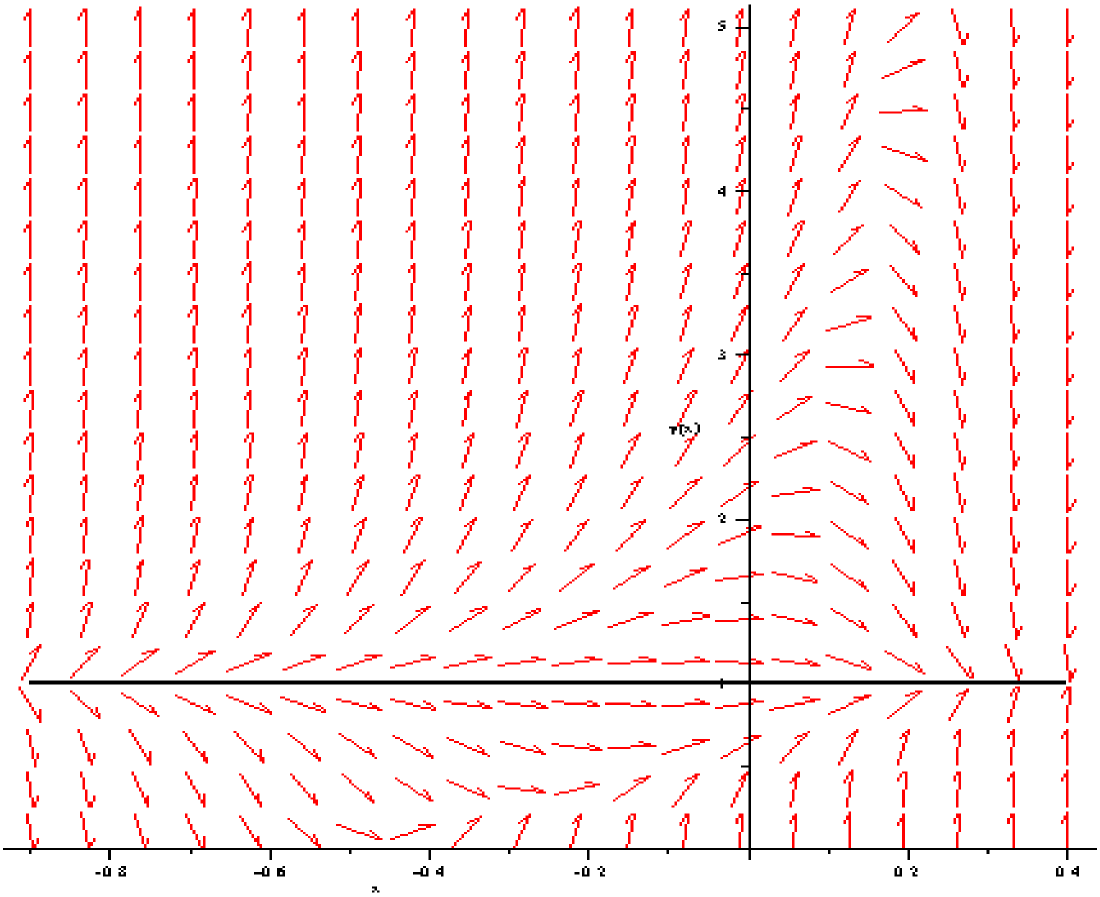
קיבלנו שהפתרון קרוב ל -1 בתחום $-0.2 < x < 0.1$ אבל רואים שלפני ואחרי התחום הזה הפתרון מתחיל להתרחק מ-1 ז"א קירוב פחות טוב מחוץ לתחום הנ"ל והפתרון הזה הוא פחות טוב מהפרון הקודם כי הפתרון הקודם היה קרוב ל-1 באינטרוול גדול יותר.

נציב $y_3 = P_1^1 \cdot \tilde{y} = \left(\frac{1-2x}{1+x}\right) \cdot \tilde{y}$ במשוואה:

$$\tilde{y}'\frac{1-2x}{1+x} - \tilde{y}\frac{3}{(1+x)^2} = \left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^2 \tilde{y}^2 + \frac{8}{\left(\frac{1-2x}{1+x}\right) \cdot \tilde{y}} - 12 \cdot \frac{1+x+3x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

$$\tilde{y}' = \tilde{y}\frac{3}{(1+x)(1-2x)} + \left(\frac{1-2x}{1+x}\right)\tilde{y}^2 + \frac{8(1+x)^2}{(1-2x)^2 \cdot \tilde{y}} - 12 \cdot \frac{1+x+3x^2}{(1+x)(1-2x)^2}$$

משוואה זו גם לא פתירה אנליטית,אבל אם מציירים שדה שיפועים של קבוצת הפתרנות של המשוואה נקבל:



קיבלנו שהפתרון $\tilde{y}(x)$ שווה זיהותית ל-1 ולכן הפתרון $y_3 = P_1^1 \cdot \tilde{y} = \left(\frac{1-2x}{1+x}\right) \cdot \tilde{y}$ **הוא הפתרון המדויק** של המשוואה המיקורית .

סיכום

נושא הקירובים עניין אותי במיוחד, מאז שהתחלתי את התואר למדנו הרבה קורסים,שנוגעים בנושא הקירובים כמו טורי פורייה וטורי חזקות טיילור ולורן,לכן בחרתי בנושא הזה כי הוא מאוד מוחשי ושימושי וקל להבנה, אי לכך חיפשתי הרבה חומר בכל מיני ספרות, מאמרים ואתרי אינטרנט כדי שאוכל לנסח ולכתוב את הפרוייקט בצורה ברורה ושיטתית כך שכל אחד שיש לו רקע מתמטי יוכל להבין אותו.

התחלתי את הפרויקט בנושא השברים המשולבים שמהווה חומר בסיס לפרקים האחרים, בהתחלה הזכרתי אלגוריתם אוקליד למציאת המחלק הכי קטן וראיתי איך ממנו אפשר לייצג כל מספר רציונלי ואי רציונאלי כשבר משולב.

בפרק השני חקרתי את הנושא התכנסות שבר משולב, היצגתי את השבר המשולב כהעתקה שבר ליניארית והוכחתי מספר תכונות ומשפטים שקשורים להתכנסות של השבר המשולב.

הפרוייקט התחיל לקבל צורה ולהיות יותר מעניין בפרק השלישי, שבו חקרתי את הנושא קירובי פדה שבו הסקנו מסקנה מאוד מעניינת וחשובה שטור טיילור הוא מקרה מיוחד של קירוב פדה שבו המכנה ממעלה אפס, הצגתי את השיטה לחישוב קירובי פדה והראיתי בעזרת גרפים ב-matlab כמה קירובי פדה משמשים "כקירוב טוב" לפונקציה.

הפרויקט היה אמור להסתיים בתת פרק 3.3 שבו קישרנו בין שברים משולבים וקירובי פדה, אך רציתי שהפרוייקט יהיה יותר מעניין ומתאים לסטודנט תואר ראשון ,וגם רציתי להשתמש ולייּשם את מה שלמדתי בתקופת התואר, לכן החלטנו להוסיף נושא חדש "שימוש בקירובי פדה לפתרון משוואות דיפרנציאליות", שבו היצגנו שיטה לפתרון משוואות דיפרנציאליות שאינן פתירות אנליטית בעזרת קירובי פדה, וראינו שקירוב פדה הוא אכן פתרון "טוב" ואף יותר מדויק למשוואה הדיפרנציאלית.

בבליוגרפיה

ספרות:

1. D. C. Collins, Continued Fractions.

2. P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Volume 2, Wiley-Interscience, 1991.

3. Baker, George A. ,Essentials of Pade approximants ,New York :Academic Press,1975.

מאמרים:

4. Elsevier-L Lorentzen - Applied numerical mathematics, 2010.

אתרי אינטרנט:

5. https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction

6. http://www.maths.surrey.ac.uk/hostedsites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html

7. https://en.wikipedia.org/wiki/Pad%C3%A9_approximant

8. https://en.wikipedia.org/wiki/Pad%C3%A9_table

9. http://mathworld.wolfram.com/PadeApproximant.html

10. http://jfrabajante.weebly.com/uploads/1/1/5/5/11551779/2_pade_approximation.pdf

11. http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews//n2003/pade/PadeApproximationProof.pdf

נספח 1

בנספח זה מופיעים תוצאות החישוב שבעמוד 22.

x =2

f (x)=e^x =7.389056098930650

Pade approximant Table:

1.000000000000000	-1.000000000000000	1.000000000000000	-3.000000000000001
3.000000000000000	Eroor	4.999999999999999	8.999999999999998
5.000000000000000	8.999999999999998	7.000000000000001	7.499999999999998
7.000000000000000	7.666666666666667	7.333333333333335	7.400000000000000

Errors Table (f(x)-P):

6.389056098930650	8.389056098930650	6.389056098930650	10.389056098930652
4.389056098930650	Eroor	2.389056098930651	-1.610943901069348
2.389056098930650	-1.610943901069348	0.389056098930650	-0.110943901069348
0.389056098930650	-0.277610567736017	0.055722765597316	-0.010943901069349

x = 0.5

f(x) =e^x =1.648721270700128

Pade approximant Table:

1.000000000000000	2.000000000000000	1.600000000000000	1.655172413793104
1.500000000000000	1.666666666666667	1.647058823529412	1.648854961832061
1.625000000000000	1.650000000000000	1.648648648648649	1.648725212464589
1.648437500000000	1.648809523809524	1.648717948717949	1.648721399730821

Errors Table (f(x)-P):

0.648721270700128	-0.351278729299872	0.048721270700128	-0.006451143092975
0.148721270700128	-0.017945395966539	0.001662447170717	-0.000133691131933
0.023721270700128	-0.001278729299872	0.000072622051480	-0.000003941764461
0.000283770700128	-0.000088253109396	0.000003321982179	-0.000000129030693

x =0.05

f(x) =e^x =1.051271096376024

Pade approximant values Table:

1.000000000000000	1.052631578947368	1.051248357424442	1.051271381326792
1.050000000000000	1.051282051282051	1.051271003877639	1.051271097074936
1.051250000000000	1.051271186440678	1.051271095919675	1.051271096378325
1.051271093750000	1.051271097046414	1.051271096373762	1.051271096376032

Errors Table (f(x)-P):

0.051271096376024	-0.001360482571344	0.000022738951583	-0.000000284950768
0.001271096376024	-0.000010954906027	0.000000092498385	-0.000000000698911
0.000021096376024	-0.000000090064654	0.000000000456349	-0.000000000002301
0.000000002626024	-0.000000000670390	0.000000000002262	-0.000000000000008

נספח 2

קוד 1:

```
clc

x=-5:0.01:5;

f1=exp(x);
p22=(12+6.*x+x.^2)./(12-6.*x+x.^2);

figure
plot(x,f1,x,p22,'r')
legend('e^x','P_2^2')
grid
xlabel('graph 1')

figure
f2=cos(x);
p44=(15120-6900.*x.^2+313.*x.^4)./(15120+660.*x.^2+13.*x.^4);
plot(x,f2,x,p44,'r')
legend('cos(x)','P_4^4')
grid
xlabel('graph 2')
```

קוד 2:

```
clc
x=0:0.01:30;

f=exp(x);

%pmn---- m-nomenatur degree n-doniminator degree

p00=1;
p01=(1+x);
p02=1+x+0.5*(x.^2);
p03=1+x+0.5*(x.^2)+(1/6)*(x.^3)+(1/24)*(x.^4);

p10=1./(1-x);
p11=(1+0.5*x)./(1-0.5*x);
p12=(1+(2/3)*x+(1/6)*(x.^2))./(1-(1/3)*x);
p13=(1+0.75*x+0.25*(x.^2)+(1/24)*(x.^3))./(1-0.25*x);

p20=1./(1-x+0.5*(x.^2));
p21=(1+(1/3)*x)./(1-(2/3)*x+(1/6)*(x.^2));
p22=(1+0.5*x+(1/12)*(x.^2))./(1-0.5*x+(1/12)*(x.^2));
p23=(1+(3/5)*x+(3/20)*(x.^2)+(1/60)*(x.^3))./....
... (1-(2/5)*x+(1/20)*(x.^2));

p30=1./(1-x+0.5*(x.^2)-(1/6)*(x.^3));
p31=(1+0.25*x)./(1-0.75*x+0.25*(x.^2)-(1/24)*(x.^3));
p32=(1+0.4*x+0.05*(x.^2))./(1-0.6*x+0.15*(x.^2)-(1/60)*(x.^3));
p33=(1+0.5*x+0.1*(x.^2)+(1/120)*(x.^3))./ ....
.... (1-0.5*x+0.1*(x.^2)(1/120)*(x.^3));

figure
plot(x,f,x,p00,x,p01,'--b',x,p02,'or',x,p03)
legend('e^x','P_0^0','P_1^0','P_2^0','P_3^0')
axis([0 6 0 60])
```

```
xlabel('graph 3')


figure
plot(x,f,x,p10,x,p11,'--',x,p12,'o',x,p13)
legend('e^x','P_0^1','P_1^1','P_2^1','P_3^1')
axis([0 6 0 60])
grid
xlabel('graph 4')

figure
plot(x,f,x,p20,x,p21,x,p22,'--',x,p23,'o')
legend('e^x','P_0^2','P_1^2','P_2^2','P_3^2')
axis([0 6 0 60])
grid
xlabel('graph 5')

figure
plot(x,f,x,p30,x,p31,x,p32,x,p33)
legend('e^x','P_0^3','P_1^3','P_2^3','P_3^3')
axis([0 6 0 60])
grid
xlabel('graph 6')
```

קוד 3:

```
clc

x=0.05;
f=exp(x);

%Pmn   == m-nomenatur degree      n-doniminator degree
%err - error

p00=1;                                                    er00=f-p00;
p01=(1+x);                                                er01=f-p01;
p02=1+x+0.5*(x.^2);                                       er02=f-p02;
p03=1+x+0.5*(x.^2)+(1/6)*(x.^3)+(1/24)*(x.^4);            er03=f-p03;

p10=1./(1-x);                                             er10=f-p10;
p11=(1+0.5*x)./(1-0.5*x);                                 er11=f-p11;
p12=(1+(2/3)*x+(1/6)*(x.^2))./(1-(1/3)*x);                er12=f-p12;
p13=(1+0.75*x+0.25*(x.^2)+(1/24)*(x.^3))./(1-0.25*x);     er13=f-p13;

p20=1./(1-x+0.5*(x.^2));                                  er20=f-p20;

p21=(1+(1/3)*x)./(1-(2/3)*x+(1/6)*(x.^2));                er21=f-p21;
p22=(1+0.5*x+(1/12)*(x.^2))./(1-0.5*x+(1/12)*(x.^2));     er22=f-p22;
p23=(1+(3/5)*x+(3/20)*(x.^2)+(1/60)*(x.^3))./ ...
...  (1-(2/5)*x+(1/20)*(x.^2));      er23=f-p23;

p30=1./(1-x+0.5*(x.^2)-(1/6)*(x.^3));
er30=f-p30;

p31=(1+0.25*x)./(1-0.75*x+0.25*(x.^2)-(1/24)*(x.^3));
er31=f-p31;
p32=(1+0.4*x+0.05*(x.^2))./(1-0.6*x+0.15*(x.^2)-(1/60)*(x.^3));
er32=f-p32;

p33=(1+0.5*x+0.1*(x.^2)+(1/120)*(x.^3))./(1-0.5*x+0.1*(x.^2) ...
```

```
... -(1/120)*(x.^3));  er33=f-p33;

res=[p00 p10 p20 p30 ; p01 p11 p21 p31 ; p02 p12 p22 p32 ; p03 p13
p23 p33];
err=[er00 er10 er20 er30;er01 er11 er21 er31;er02 er12 er22 er32;er03
er13 er23 er33];

disp('Pade approximant Table:')
disp(res)
disp('Errors Table (f(x)-P):')
disp(err)
```

קוד 4: קוד בתוכנת maple לשרטוט שדה שיפועים של פתרונות של משוואה דיפרנציאלית

> $restart$

> $with(plots)$
$with(DEtools);$

> $y1(x) := (1 - 3\cdot x + 3\cdot x^2)\cdot y(x)$
$diff(y1(x), x)$

>
$$DEplot\left(\left\{(-3+6x)\,y(x) + (1-3x+3x^2)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = \left((1-3\cdot x+3\cdot x^2)\cdot y(x)\right)^2 + \frac{8}{(1-3\cdot x+3\cdot x^2)\cdot y(x)} - \frac{12\cdot(1+x+3\cdot x^2)}{(1+x)^2\cdot(1-2\cdot x)}\right\}, \{y(x)\}, x=-0.9..0.4, [y(0)=1\ ], y = 0.1..5\quad, linecolor = COLOR(BLACK, 0.5)\right)$$

> $y2(x) := \dfrac{y(x)}{1+3\cdot x+3\cdot x^2}$
$diff(y2(x), x)$

>
$$DEplot\left(\left\{\frac{\frac{d}{dx}\,y(x)}{1+3x+3x^2} - \frac{y(x)\,(3+6x)}{(1+3x+3x^2)^2} = \left(\frac{y(x)}{1+3\cdot x+3\cdot x^2}\right)^2 + \frac{8}{\frac{y(x)}{1+3\cdot x+3\cdot x^2}} - \frac{12\cdot(1+x+3\cdot x^2)}{(1+x)^2\cdot(1-2\cdot x)}\right\}, \{y(x)\}, x=-0.9..0.4, [y(0)=1\ ], y = 0.1..5\quad, linecolor = COLOR(BLACK, 0.5)\right)$$

> $y3(x) := \dfrac{(1-2\cdot x)\cdot y(x)}{1+\mathrm{x}}$

$diff(y3(x), x)$

>

$$DEplot\left(\left\{-\frac{2\,y(x)}{1+x}+\frac{(1-2\,x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)\right)}{1+x}-\frac{(1-2\,x)\,y(x)}{(1+x)^2}\right.\right.$$

$$=\left(\frac{(1-2\,x)\,y(x)}{1+x}\right)^2+\frac{8}{\frac{(1-2\,x)\,y(x)}{1+x}}$$

$$\left.-\frac{12\cdot\left(1+x+3\cdot x^2\right)}{(1+x)^2\cdot(1-2\cdot x)}\right\},\{y(x)\},x=-0.9\,..0.4,[\,y(0)=1\;],y$$

$$\left.=0.1\,..5\quad,linecolor=COLOR(BLACK,0.5)\right)$$