



**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

זרימת הלי-שו

ויטלי פומברג

Hele-Shaw Flow

Vitaly Fomberg

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

זרימת הלי-שו
ויטלי פומברג

Hele-Shaw Flow
Vitaly Fomberg

Advisors:
Prof. Karp Lavi
Dr. Ostrovsky Victor

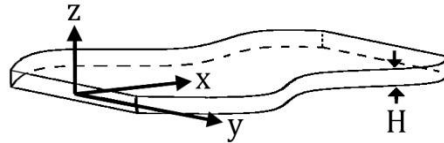
מנחים:
פרו"פ קרפ לביא
ד"ר אוסטובסקי ויקטור

תוכן עניינים

1	מבוא.....
2	1 המודל המתמטי.....
2	1.1 זרימת נוזל בלתי דחיס דרך תווך נקבובי.....
3	1.2 בעיית השפה הנעה.....
5	2 אינטגרלים ראשונים של תנועת השפה.....
5	2.1 משפט האינטגרביליות של ריצ'רדסון.....
7	2.2 שחזור של תחום מתוך המומנטים שלו, ובעיה הפוכה של פוטנציאל דו-מימדי.....
8	3 פתרון אלגברי.....
8	3.1 תחום אלגברי ותחום של אבל.....
8	3.2 פתרון אלגברי.....
8	3.3 טרנספורמציית קושי ומאפייניה.....
10	3.4 משפט הסינגולריות התואמות.....
12	3.5 הוכחת משפט ריצ'רדסון קופרב.....
12	3.6 בניית הפתרון האלגברי.....
14	4 סימולציה.....
15	4.1 סימולציה של הזרקה.....
17	4.2 סימולציה של יניקה.....
26	5 סיכום.....
28	בבליוגרפיה.....
29	נספחים.....

מבוא

אחת הבעיות המתמטיות השימושיות הינה זרימת Hele-Shaw. זרימה זו מוגדרת כזרימת סטוקס בין שני גופים שטוחים כך שהמרחק ביניהם אינפיניטסימלי (איור 1). זרימה זו הינה זרימה פוטנציאלית של נוזל בלתי צמיג דרך תווך נקבובי המתנהגת לפי "חוק דרסי", וניתנת לויזואליזציה בדו-מימד.



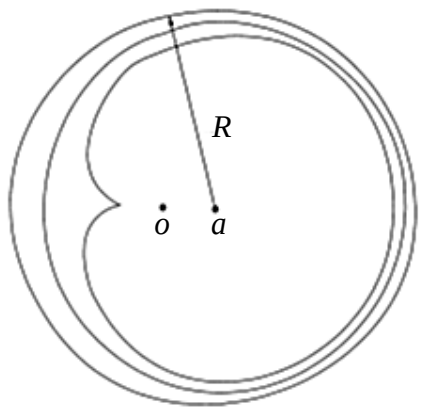
איור 1: תאור סכמטי של זרימת הלי-שו.

בעיות רבות במכניקת הזורמים ניתנות לתאור ע"י זרימת Hele-Shaw ומכאן החשיבות של המחקר בתחום. למשל, ניתן לתאר התפתחות התחום בין נוזל לגז, בין פולימרים ואוויר, בין חומרים קריסטליים ומותכים ועוד. כמו כן, ישנם שימושים רבים של תוצאות המחקר בתעשייה. למשל: במטלורגיה; בהתפרקות של אנודה באלקטרוליזה; בטכניקות היוצרות תצורות מישוריות רדודות ועוד.

בפריקט זה נתייחס לעבודתם של פלגיה פולוברינובה-קושינה (Pelageya Polubarinova-Kochina) ופבל קופרב (Pavel Kufarev), אשר בשנות הארבעים עבדו על בעיית ההתפתחות של טיפת שמן עגולה המוקפת במים, כאשר ישנו מקור של יניקה בתוך הטיפה (איור 2).

התברר כי שפת הטיפה הינה עקום מסדר רביעי, אשר שומרת על תכונה זו לאורך כל תהליך ההתפתחות. העקום מתקבל ע"י שיקוף של אליפסה ביחס למעגל. בשנת 1950 קופרב (Kufarev) הצליח להכליל תכונה זו: אם הטיפה ההתחלתית הינה תמונה של עיגול היחידה תחת העתקה קונפורמית הנתונה על די פונקציה רציונלית של משתנה מרוכב בתוך העיגול, אז תכונה זו נשמרת לאורך כל תהליך ההתפתחות של הטיפה.

ב-1972 סטנלי ריצ'רדסון (Stanley Richardson) גילה סידרה אינסופית של אינטגרלים ראשוניים של תנועת הטיפה. הוא הוכיח כי אינטגרל של כל פונקציה הרמונית מעל תחום הטיפה משתנה בצורה לינארית בזמן. הוכחה זו נתנה לריצ'רדסון אפשרות לתת הוכחה חדשה לאינווריאנטיות של הרציונליות ושיטה אפקטיבית לבניית פתרון מפורש.



איור 2: R רדיוס הטיפה, a מרכז הטיפה, o מקור יניקה.

1. המודל המתמטי

1.1 זרימת נוזל בלתי דחיס דרך תווך נקבובי

נניח כי נתונה זרימה מישורית של נוזל הומוגני דרך תווך נקבובי הומוגני. זרימה זו ניתנת לתיאור ע"י וקטור מהירות $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$ במישור הנתון, אשר נקרא מהירות הנוזל. נניח כי הנוזל בלתי דחיס. ידוע כי עבור נוזל בלתי דחיס מתקיים:

$$(1.1) \quad \operatorname{div}(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

לפי החוק של דרסי לפילטרציה ידוע כי מהירות הנוזל פרופורציונלית לגרדיאנט הלחץ:

$$(1.2) \quad v = -k \operatorname{grad} p,$$

כאשר p מציין את הלחץ, $k > 0$ מקדם פרופורציה. ידוע כי k נמצא ביחס הפוך למקדם הצמיגות הדינאמי של הנוזל μ : $k = \kappa / \mu$, כאשר κ תלוי אך ורק במאפיינים של התווך הנקבובי. מתוך כך ניתן להסיק כי מהירות הנוזל הינה בעצם שדה הפוטנציאל הוקטורי ולכן ניתנת לרישום הבא:

$$(1.3) \quad v = \operatorname{grad} \Phi, \quad \Phi = -kp,$$

כאשר Φ הינה פונקציה הרמונית המקיימת את משוואת לפלס:

$$(1.4) \quad \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

לשם הנוחות נעבור למשתנה המרוכב: $z = x + iy$.

נניח כי בתחום של הזרימה ישנו מקור הזרקה ומקור יניקה כאשר הקוארדינטות והקצב הינם $z_1, z_2, \dots, z_n$ ו- $q_1, q_2, \dots, q_n$ בהתאמה. מתוך כך ניתן להסיק כי בקרבת הנקודה z_j מתקיים:

$$(1.5) \quad v(z) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi(\bar{z} - \bar{z}_j)} + (\text{smooth vector - function}),$$

או בצורה שקולה

$$(1.6) \quad \Phi(z) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \operatorname{Log} |z - z_j| + (\text{smooth function}).$$

הוכחה:

נתייחס לפוטנציאל כאל פונקציה של שני משתנים ונציב:

$$\Phi(z) = \log |z - z_j| \Leftrightarrow \Phi(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),$$

אז:

$$\Phi_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \Phi_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$v(x, y) = \text{grad } \Phi = \frac{q_j}{2\pi} \left(\frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right).$$

מכיוון שהמהירות מוגדרת במישור המרוכב, ניתן לרשום:

$$\Phi_x + i\Phi_y = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}},$$

מכאן:

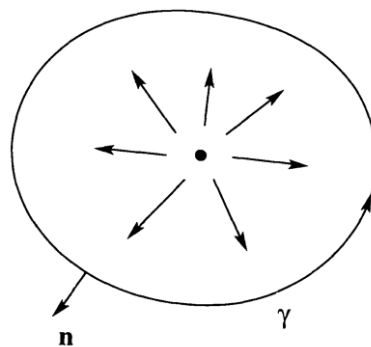
$$\begin{aligned} v(z) &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \text{grad} \left(\Phi(x - x_j, y - y_j) + (\text{smooth vector function}) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} + (\text{smooth function}). \end{aligned}$$

מ.ש.ל

נקיף מקור z_j בעקום γ_j נגד כיוון השעון. אז ממשפט גרין נובע:

$$\int_{\gamma} v \cdot n \, dl = q_j.$$

כלומר, כמות הנוזל העוברת דרך העקום ביחידת זמן שווה ל- q_j .



איור 3

1.2 בעיית השפה הנעה

נתון תחום של נוזל המוקף בנוזל אחר בעל צמיגות אפסית. נניח כי הלחץ p קבוע בתוך הנוזל הבלתי צמיג ורציף על הגבול שבין שני הנוזלים. אזי, ניתן להסיק כי הפוטנציאל

קבוע לאורך קו גבול זה. כעת נניח כי תחום הנוזל הצמיג הינו פשוט קשר וחסום. אזי, ניתן להסיק שהפוטנציאל נעלם על השפה כי הוספת קבוע לפוטנציאל לא גורמת לשינוי בשדה המהירות:

$$\Phi|_{\partial D} = 0. \quad (1.8)$$

תנאי זה יחד עם (1.4) ו-(1.6) מגדירים בצורה יחודית את פוטנציאל המהירות Φ_D לכל תחום D המכיל את הנקודות $z_1, z_2, \dots, z_n$. זהו בעצם צירוף לינארי של פונקציות גרין בתחום D עם קטבים בנק' הנ"ל, כאשר פונקציית גרין $G(x, s)$ הינה פתרון של המשוואה $\Delta G(x, s) = \delta(x - s)$, ו- $\delta(x - s)$ הינה פונקציית דלתא של דיראק המוזזת ב- s . קיום פוטנציאל המהירות מובטח על ידי המשפט הסטנדרטי של פתרון בעיית דיריכלה, כאשר בעיית דיריכלה מוגדרת בצורה הבאה:
נתון תחום D עם שפה Γ , ופונקציה f רציפה על Γ . יש למצוא פונקציה $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:
1. $\Delta u = 0$ ב- D .
2. $u|_{\Gamma} = f$.

חוק דרסי מכתיב את תנועת השפה של תחום D : כל נקודה $z \in \partial D$ נעה במהירות אשר שווה ל- $|\text{grad}\Phi|$.

הוכחה:

לפי גוסטפסון ווסילייב (ראה [2]), שפת הנוזל נעה במהירות של הזרימה v . כלומר, המהירות בכיוון הנורמל של השפה v_b מתקבלת על ידי:

$$v_b = v \cdot \hat{n}.$$

מכיוון ש- $v = \text{grad}\Phi$, אז על השפה מתקיים:

$$v_b = v \cdot \hat{n} = \text{grad}\Phi \cdot \hat{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{n}}.$$

מכיוון שעל השפה $\Phi = 0$, אז $\hat{n} = \frac{\text{grad}\Phi}{|\text{grad}\Phi|}$ ולכן $v_b = |\text{grad}\Phi|$.

מסקנה: כל נקודה הנמצאת על השפה ∂D נעה במהירות $|\text{grad}\Phi|$.

מ.ש.ל

הגדרת הבעיה:

תיאור התפתחות התחום של נוזל צמיג, בהינתן צורת התחום ההתחלתי, מיקום המקורות ועוצמתם.

2. אינטגרלים ראשוניים של תנועת השפה

2.1 משפט האינטגרליות של ריצ'רדסון

לבעיית התפתחות השפה של תחום ישנה סדרה אינסופית של אינטגרלים ראשוניים. דבר זה התגלה ע"י ריצ'רדסון בשנת 1972.

משפט ריצ'רדסון:

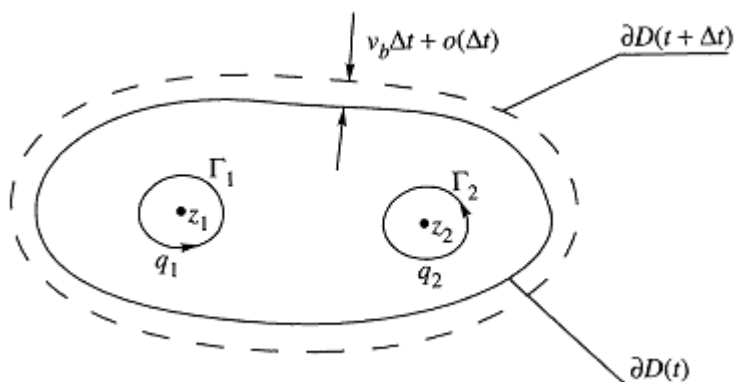
נניח כי $D(t)$ הינו תחום של הנוזל הצמיג בזמן t , ו- u פונקציה הרמונית שרירותית במישור. אזי:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} u dx dy = \sum_{j=1}^n q_j u(z_j).$$

נקרא לאינטגרל $\int_D u dx dy$ המומנט של תחום D ביחס לפונקציה הרמונית u . משפט ריצ'רדסון מתאר בעצם את הדינמיקה של המומנטים של $D(t)$ בזמן ובמיוחד אם כל q_j ($j=1, \dots, n$) קבועים, אז כל המומנטים משתנים באופן ליניארי בזמן.

הוכחה:

נתבונן באיור הבא:



איור 4

מתוך התרשים ניתן להסיק כי המומנט של תחום $D(t + \Delta t)$ הינו בעצם סכום של המומנט של $D(t)$ ועוד אינטגרל על $\partial D(t)$ של מהירות השפה כפולה באינטרוול זמן Δt (מכפלה זו היא בעצם כמות הנוזל שנכנס דרך המקורות) ועוד $o(\Delta t)$:

$$\int_{D(t+\Delta t)} u dx dy = \int_{D(t)} u dx dy + \int_{\partial D(t)} v_b \Delta t dl + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

כאשר $v_b = n \cdot \text{grad } \Phi = \pm |\text{grad } \Phi|$ הינו ערך סקלרי של מהירות השפה (n - נורמל לשפה $\partial D(t)$).

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u dx dy = \int_{\partial D(t)} u (n \cdot \text{grad } \Phi) dl. \quad \text{מכאן:}$$

נוסיף לצד הימני של המשוואה את הביטוי $-\int_{\partial D(t)} \Phi (n \cdot \text{grad } u) dl$. ביטוי זה לא משנה את ערך האינטגרל כי הוא שווה לאפס וזאת משום שהפוטנציאל מתאפס על השפה. ע"י שימוש בנוסחת גרין נקבל:

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{d}{dt} \int_{D(t)} u dx dy &= \int_{\partial D(t)} u (\text{grad } \Phi \cdot n) dl - \int_{\partial D(t)} \Phi (\text{grad } u \cdot n) dl = \\ &= \int_E \text{div}(u \text{grad } \Phi - \Phi \text{grad } u) dx dy + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} (u \text{grad } \Phi - \Phi \text{grad } u) \cdot n dl, \end{aligned}$$

כאשר E הינו תחום $D(t)$ ללא n עיגולים בעלי רדיוס ε ומרכז z_j . האינטגרל על E שווה לאפס כי פונקציות u ו- Φ הרמוניות. בהתחשב באסימפטוטיות של הפוטנציאל ב- z_j נקבל:

$$\int_{\Gamma_j} \Phi \text{grad } u \cdot n dl \rightarrow 0, \quad \int_{\Gamma_j} u \text{grad } \Phi \cdot n dl \rightarrow u(z_j) q_j,$$

כאשר $\varepsilon \rightarrow 0$.
מהצבת הערכים הנ"ל במשוואה (*) מקבלים:

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u dx dy = \sum_{j=1}^n q_j u(z_j).$$

מ.ש.ל

הערה: במשפט ריצ'רדסון מספיק לדרוש כי פונקציה u תהיה הרמונית בתחום כלשהו המכיל את התחום $D(t)$ (כולל השפה $\partial D(t)$).

ידוע כי פונקציות הרמוניות במישור הן בעצם החלק הממשי או המדומה של פונקציות הולומורפיות. מכאן, לכל פונקציה הולומורפית מתקיים:

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} f(z) dx dy = \sum_{j=1}^n q_j f(z_j).$$

במקרה הפרטי, לכל $k \geq 0$ מתקיים:

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} z^k dx dy = \sum_{j=1}^n q_j z_j^k.$$

לפי הגדרה של המומנט:

$$M_k(D) = \int_D z^k dx dy = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t q_j(\tau) d\tau \right) z_j^k,$$

וזה נקרא המומנטים של ריצ'רדסון.

2.2 שחזור של תחום מתוך המומנטים שלו, ובעיה הפוכה של פוטנציאל דו-מימדי

לפי משפט ריצ'רדסון, ניתן לפתור את בעיית השפה הנעה בעזרת הערכה של המומנטים של התחום כאשר התחום ההתחלתי $D(0)$ ידוע. המומנטים של התחום $D(t)$ ניתנים לחישוב מתוך המשוואה (2.1):

$$(2.2) \quad \int_{D(t)} u dx dy = \int_{D(0)} u dx dy + \sum_{j=1}^n u(z_j) \int_0^t q_j(\tau) d\tau.$$

הערה: משוואה (2.2) מתייחסת למקרה כללי בו q_j אינו קבוע.

בעיית המומנטים של ריצ'רדסון:
האם ניתן לשחזר את התחום $D(t)$ מתוך המשוואה (2.2)?

בעיה זו שקולה לבעיה הפוכה של פוטנציאל דו-מימדי:
האם ניתן לשחזר צורת גליל הומוגני אינסופי מתוך שדה הגרביטציה שהוא יוצר סביבו?

נניח כי D זהו חתך אורתוגונלי רוחבי של הגליל, ו- w מייצג את הקוארדנטות הקומפלקסיות בחתך זה. ידוע כי הכח הגרביטציוני שווה לגרדיאנט של הפוטנציאל הגרביטציוני הלוגריתמי (עד הגורם שתלוי אך ורק בצפיפות החומר):

$$(2.3) \quad \Pi_D(w) = \frac{1}{2\pi} \int_D \log |w - z| dx dy,$$

מכיוון שתחום D חסום, עבור $|w|$ מספיק גדול מתקיים $|z| < |w|$ לכל $z \in D$. לכן:

$$\log |w - z| = \log \left| w \left(1 - \frac{z}{w} \right) \right| = \log |w| + \log \left| 1 - \frac{z}{w} \right| = \log |w| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{z^k}{w^k} \right),$$

נבצע אינטגרציה ונקבל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_D \log |w - z| dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_D \left(\log |w| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{z^k}{w^k} \right) dx dy,$$

$$(2.4) \quad \Pi_D(w) = \frac{M_0}{2\pi} \log |w| - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{M_k}{w^k} \right),$$

כאשר M_k אלה הם המומנטים של תחום D .

מכאן, זה מביא אותנו לבעיה ההפוכה של תורת הפוטנציאל: האם המומנטים קובעים באופן מוחלט את התחום D . לראשונה עסק בבעיה זו נוביקוב (P. S. Novikov) בשנת 1938 (ראה [3]).

3. פתרון אלגברי

3.1 תחומים אלגבריים ותחומי אבל

לפי משפט רימן, כל תחום פשוט קשר במישור המכיל יותר מנקודה אחת על השפה הינו אקוילונטי בצורה קונפורמית לעיגול היחידה. כלומר, אם $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ הינו עיגול היחידה, אזי, קיימת פונקציה אנליטית וחח"ע f מ- K ל- D . פונקציה כזו אינה יחידה היות ולעיגול היחידה יש אוטומורפיזמים קונפורמיים שאינם טריויאליים. קבוצת ההעתקות הקונפורמית המעתיקות עיגול יחידה על עצמו מורכבת ממשפחת פונקציות בעלות שני פרמטרים $z = \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta} e^{i\theta}$, כאשר $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. לפיכך, על מנת לקבוע העתקה קונפורמית מ- K ל- D באופן יחיד, מספיק לקבע את התמונה של הראשית ב- D ואת הזווית $\arg f'(0)$. קבוצת התחומים הרלוונטית לנושא המדובר הינה קבוצה בה הפונקציה של ההעתקה הקונפורמית של עיגול היחידה הינה רציונלית $f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$, כאשר P ו- Q פולינומים. לתחומים הנ"ל נקרא תחומים אלגבריים. המעלה של תחום אלגברי היא $\deg f = \max(\deg P, \deg Q)$. תחום אלגברי חסום ע"י עקום אלגברי ממעלה $2 \deg D$. נשים לב שלא כל תחום בעל שפה אלגברית הינו אלגברי בעצמו, למשל אליפסה. תחום אלגברי בעל מעלה מוגבלת מוגדר באמצעות מספר סופי של מקדמי הפולינומים P ו- Q . ניקח בחשבון גם את התחום של אבל (Abelian domain), זהו התחום שבו ההעתקה הקונפורמית הינה בעלת נגזרת רציונלית $f'(\zeta)$. נקרא ל- f' הריבוי של תחום של אבל. התפתחות של תחומים מאופיינת ע"י תכונה יוצאת דופן: תחום אלגברי העובר טרנספורמציה, עובר לתחום שהוא גם תחום אלגברי.

3.2 פתרון אלגברי

משפט ריצ'רדסון וקופרב:

יהי $D(t)$ תחום התפתחות לפי זרימת Hele-Shaw עם n מקורות: אם $D(0)$ הינו תחום אלגברי ממעלה d , אז $D(t)$ הינו תחום אלגברי ממעלה שאינה עולה על $d + n$. על סמך משפט זה, שנראה את הוכחתו בהמשך, ניתן להסיק שחישוב התחומים היא בעיה סוף מימדית.

3.3 טרנספורמציות קושי ומאפייניה

הוכחת המשפט של ריצ'רדסון וקופרב (3.2) מתבססת על טרנספורמציות קושי של תחום חסום D שמוגדרת באופן הבא:

$$(3.1) \quad C_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx dy}{w - z}.$$

הפונקציה $C_D(w)$ רציפה ומקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} C_D(w) = \begin{cases} 1, & w \in D \\ 0, & w \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

מכיוון ש- $\frac{1}{w-z}$ אנליטית ב- $w \notin D$, אז לפי משפט המומנטים של ריצ'רדסון מתקיים:

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} C_{D(t)}(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{w - z_j}, \quad w \notin D(t), \quad \forall t.$$

מאפיינים של טרנספורמציות קושי:

1. הפונקציה C_D אנליטית מחוץ לתחום D ומקיימת: $\lim_{w \rightarrow \infty} C_D(w) = 0$. תכונה זו נובעת ישירות מההגדרה (3.1) ומהמשוואה הדיפרנציאלית (3.2).

2. יהי D תחום פשוט קשר. אז עבור $w \notin D$ מתקיים: $C_D(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}}$.

הוכחה:

נתון כי תחום D חסום. אז, עבור $|w|$ מספיק גדול מתקיים: $\frac{|z|}{|w|} < 1$ לכל $z \in D$.

כעת, נפתח את הפונקציה $\frac{1}{w-z}$ לטור:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w \left(1 - \frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}}.$$

בשלב הבא, לפי (3.1) נקבל שעבור $|w| > |z|$ מתקיים:

$$\frac{1}{\pi} \int_D \frac{1}{w-z} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_D \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{w^{k+1}} dx dy = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^{k+1}} \int_D z^k dx dy = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}}, \quad |z| < |w|,$$

מכיוון שהטור הינו פונקציה אנליטית, אז ניתן להמשיך אותו לכל $w \notin D$. מכאן:

$$C_D(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}}, \quad w \notin D.$$

3. נניח כי $F_D(w)$ הינו שדה כבידה של גליל בעל חתך D . אז מ- (2.3) נקבל כי

$$F_D(w) = \overline{C_D(w)}$$

$$C_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z} dz}{w-z}, \quad w \notin D \quad 4.$$

הוכחה:

נשתמש בצורה המרוכבת של משפט גרין:

$$C_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{1}{w-z} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\bar{z}}{w-z} \right) dx dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z}}{w-z} dz.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z} - C_D(z)}{w-z} dz = 0, \quad w \notin D \quad 5.$$

הוכחה:

על סמך המשוואה הדיפרנציאלית (3.2) מתקיים: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{z} - C_D(z)) = 1 - 1 = 0$ עבור

$z \in D$. כלומר, $\bar{z} - C_D(z)$ הינה פונקציה אנליטית בתחום D ולכן, גם $\frac{\bar{z} - C_D(z)}{w-z}$

אנליטית בתחום D לכל $w \notin D$. אז תכונה 5 מתקבלת על סמך משפט קושי (ראה [5]).

$$C_{D(t)}(w) = C_{D(0)}(w) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{q_j t}{w-z_j} \quad \text{עבור } 0 \leq s \leq t, w \notin D(s) \text{ מתקיים:} \quad 6.$$

כאשר $\{z_1, \dots, z_n\}$ המקורות של הזרימה. תוצאה זו מתקבלת על ידי אינטגרציה של משוואה (3.3).

7. עבור $0 \leq s \leq t, w \notin D(s)$, רציונלית אם ורק אם $C_{D(0)}(w)$ רציונלית.

עבור $0 \leq s \leq t, w \notin D(s)$, $\frac{d}{dt} C_{D(t)}(w)$ רציונלית אם ורק אם $\frac{d}{dt} C_{D(0)}(w)$ רציונלית.

תכונה זו נובעת ישירות מתוך תכונה 6.

3.4 משפט הסינגולריות התואמות

$$\text{נסמן: } f^*(\zeta) = \overline{f(1/\bar{\zeta})}.$$

משפט ריצ'רדסון וגוסטפסון:

נתונה העתקה קונפורמית f מעיגול היחידה K לתחום D . אזי:

1. לפונקציה $\psi(\zeta) = f^*(\zeta) - h_D(f(\zeta))$ יש המשכה הולומורפית לתוך עיגול היחידה.

2. נציב:

$$(3.4) \quad h_D(w) = \begin{cases} C_D(w), & w \notin D \\ f^*(f^{-1}(w)) - \psi(f^{-1}(w)), & w \in D. \end{cases}$$

אז f רציונלית אם ורק אם h_D פונקציה רציונלית, עם קטבים במקורות של הזרימה

$$\cdot \{z_1, \dots, z_n\}$$

הכלי העיקרי להוכחת סעיף זה הינו נוסחת סוקחותסקי-פלמלי
(Sokhotskiĭ - Plemelj):
יהי D תחום חסום ו- ϕ פונקציה רציפה על השפה ∂D . נציב:

$$F^+(z) = \int_{\partial D} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D; \quad F^-(z) = \int_{\partial D} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}.$$

אזי, לכל נקודה $z_0 \in \partial D$ מתקיים:

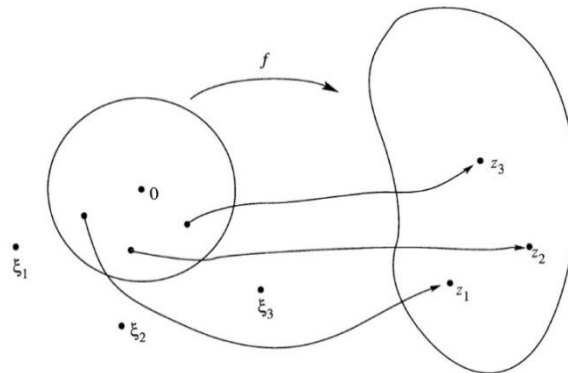
$$\lim_{D \ni z \rightarrow z_0} F^+(z) - \lim_{\mathbb{C} \setminus \bar{D} \ni z \rightarrow z_0} F^-(z) = 2\pi i \phi(z_0).$$

בפרט, אם $F^-(z) = 0$, אז $F^+(z)$ היא המשכה ההלומורפית של ϕ לתוך תחום D .

הוכחת משפט הסינגולריות התואמות:

1. נשתמש במשפט סוקחותסקי-פלמלי עם הפונקציה: $\phi(z) = \bar{z} - C_D(z)$, $z \notin D$.
אז מתכונה 5 של טרנספורמציות קושי נקבל ש- $F^-(z) \equiv 0$ ולכן ל- $\bar{z} - C_D(z)$ יש המשכה הלומורפית לתוך תחום D . נציב: $z = f(\zeta)$, אז ל- $\overline{f(\zeta)} - C_D(f(\zeta))$ יש המשכה הלומורפית לתוך עיגול היחידה K . מכיוון שעל שפת העיגול מתקיים $\overline{f(\zeta)} = \overline{f(1/\bar{\zeta})} = f^*(\zeta)$ אז $\zeta = 1/\bar{\zeta}$.

2. אם הפונקציה f רציונלית, אז הפונקציה f^* מרומורפית ב- $\mathbb{C}$ עם קטבים בעיגול היחידה. מתכונה 1 ניתן להסיק שלטרנספורמציות קושי $C_D(f(\zeta))$ יש המשכה אנליטית מעבר לשפה של K עם נקודות סינגולריות זהות לאלו של $f^*(\zeta)$. לפיכך, $h_D(f(\zeta))$ שנתונה ב- (3.4), מרומורפית ב- $\mathbb{C}$ עם קטבים בעיגול היחידה אם ורק אם $f^*(\zeta)$ מרומורפית בעיגול היחידה. יתר על כן, הקטבים של $f^*(\zeta)$ הם שיקוף של הקטבים של $f(\zeta)$ ביחס למעגל היחידה והמקורות של הזרימה ניתנים על ידי $z_j = f^*(\zeta_j)$, כאשר ζ_j זה הקטבים של f מחוץ לעיגול היחידה (ראה איור 4). ועל כן, $h_D(w)$ רציונלית אם ורק אם f רציונלית.



איור 5

3.5 הוכחת משפט ריצ'רדסון קופרב

אם $D(0)$ תחום אלגברי, אז לפי משפט הסינגולריות התואמות, $h_{D(0)}(w)$ שמוגדרת ב- (3.3) הינה פונקציה רציונלית, ולפי תכונה 6 של טרנספורמציות קושי גם $h_{D(t)}(w)$ הינה פונקציה רציונלית. לפיכך, ההעתקה הקונפורמית $f_t(\zeta)$ של $D(t)$ היא פונקציה רציונלית. יתר על כן, מתקיים: $\deg h_{D(t)} - \deg h_{D(0)} \leq n$, ולכן $\deg f_t \leq \deg f_0 + n$.

3.6 בניית הפתרון האלגברי

משפט הסינגולריות התואמות מאפשר בניית הפתרונות במקרה בו התחום ההתחלתי הינו אלגברי (אבלי) באמצעות מערכת סופית של משוואות לא לינאריות המבטאות את המקדמים של ההעתקה הקונפורמית במונחים של המקדמים הידועים של טרנספורמציות קושי. משוואות אלה לקוחות מתוך התנאי שהפונקציות $f^*(\zeta)$ ו- $h_D(f(\zeta))$ מתואמות בנקודות הסינגולריות שלהן בתוך עיגול היחידה. נחשב מקרה פשוט בו ישנה נקודה סינגולרית אחת מיוחדת.

משפט גלין:

נניח כי המקור היחיד נמצא בראשית, ונניח כי $f_t(0) = 0$ לכל t . אזי, אם הפונקציה $f_0(\zeta)$ הינה פולינום ממעלה d , אז גם $f_t(\zeta)$ פולינום ממעלה d לכל t . באמצעות משפט הסינגולריות התואמות ניתן לחשב את הפתרונות כאשר התחום ההתחלתי הוא אלגברי (אבל).

הוכחה:

הנקודה הסינגולרית היחידה של $f_0(\zeta)$ הינה באינסוף וזהו קוטב מסדר d . לפי משפט הסנגולריות התואמות, $h_{D(0)}(w)$ הינה בעלת סינגולריות מיוחדת בראשית, כאשר גם זו הינה קוטב מסדר d . לכן, הטענה נכונה גם עבור $h_{D(t)}(w)$ לכל t . מכאן, f_t גם בעלת סינגולריות יחידה, כאשר זהו קוטב באינסוף מסדר d . מכך ניתן להסיק כי f_t הינה פולינום ממעלה d .

ריצ'רדסון הראה כי $f(\zeta)$ הינה פולינום ממעלה d אם ורק אם $M_k(D) = 0$ לכל $k \geq d$, ו- $M_{d-1} \neq 0$.

נרשום את המשוואות עבור המקרה בו כל הנקודות הסינגולריות של טרנספורמציות קושי הינן קטבים פשוטים:

$$(3.5) \quad h_D(z) = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{z - B_j}.$$

נרשום את הפונקציה f בצורה הבאה:

$$(3.6) \quad f(\zeta) = \sum_{j=1}^m \frac{C_j \zeta}{1 - E_j \zeta}.$$

צורה זו של הפונקציה f נועדה להבטיח ש- $f(0)=0$ (בהנחה כי $0 \in D$) ולאפשר קיום של קוטב באינסוף, כלומר $E_j = 0$ עבור איזשהו j . מתוך (3.6) ניתן לקבל את השוויון הבא:

$$f^*(\zeta) = \sum_{j=1}^m \frac{\bar{C}_j}{\zeta - \bar{E}_j}.$$

להלן המשוואות:

1. קטבי הפונקציה $f^*(\zeta)$ מתואמים עם קטבי הפונקציה $h_D(f(\zeta))$:

$$(3.7) \quad f(E_j) = B_j, \quad j=1,2,\dots,m.$$

2. שאריות הפונקציה $f^*(\zeta)$ מתואמים עם שאריות הפונקציה $h_D(f(\zeta))$:

$$(3.8) \quad A_j = f'(\bar{E}_j)\bar{C}_j, \quad j=1,2,\dots,m.$$

מערכת המשוואות של (3.7) ו- (3.8) מכילה $2m$ משוואות עם $2m$ נעלמים C_j, E_j . אולם, משוואות אלה אינן בלתי תלויות. אכן, אם C_j, E_j הינם פתרונות, אזי גם $C_j e^{i\theta}, E_j e^{i\theta}$ הינם פתרונות של אותה המערכת היות וקבוצת פרמטרים זו מתייחסת לאותו התחום.

4. סימולציה

על מנת להדגים בצורה ויזואלית את פתרון הבעיה, נשתמש בדוגמא של פולוברינובה – קופרב (Polubarinova - Kufarev) ובתוכנת MATLAB:

נתון תחום D כך ש- $D(0)$ הינו מעגל ברדיוס R ומרכזו בנק' $(a,0)$. נניח כי המקור היחיד נמצא בראשית ועוצמתו q . אזי:

$$h_{D(0)}(w) = \frac{R^2}{w-a}, \quad h_{D(t)}(w) = \frac{qt}{\pi w} + \frac{R^2}{w-a}.$$

לפונקציה $h_{D(t)}$ ישנם שני קטבים פשוטים ב- 0 וב- a , לכן לפונקציה f_t ישנם שני קטבים ב- ∞ ובאיזשהי נקודה α_t . מכאן:

$$f_t(\zeta) = \frac{\beta_t \zeta}{1 - \alpha_t \zeta} + \gamma_t \zeta.$$

מתוך הרשום לעיל ניתן להסיק כי $\partial D(t)$ הינה עקום כך שמעלתו המקסימלית הינה ארבע.
 מתוך הסימטריה ביחס לציר האופקי ניתן להניח כי $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ הינם ממשיים ואז ניתן
 לראות כי $\overline{f_t(\zeta)} = f_t(\bar{\zeta})$. בנוסף נניח כי $\alpha_t > 0$.

מתוך המשוואות (3.7) ו- (3.8) מתקבלת מערכת משוואות עבור מקדמי ההעתקה:

$$\begin{cases} \frac{\beta_t \alpha_t}{1 - \alpha_t^2} + \gamma_t \alpha_t = a \\ \frac{\beta_t^2}{(1 - \alpha_t^2)^2} + \gamma_t \beta_t = R^2 \\ (\beta_t + \gamma_t) \gamma_t = \frac{qt}{\pi} \end{cases}$$

מתוך המערכת הנ"ל, ניתן להגיע לצורה הבאה של המערכת עבור מציאת המקדמים:

$$\begin{cases} (1) \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 \alpha_t^6 - \left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4 \right) \alpha_t^2 + 2a^4 = 0 \\ (2) \beta_t = \frac{1 - \alpha_t^2}{2} \left[\frac{a}{\alpha_t} + \frac{\alpha_t}{a} \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) \right] \\ (3) \gamma_t = \frac{1}{2} \left[\frac{a}{\alpha_t} - \frac{\alpha_t}{a} \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) \right] \end{cases}$$

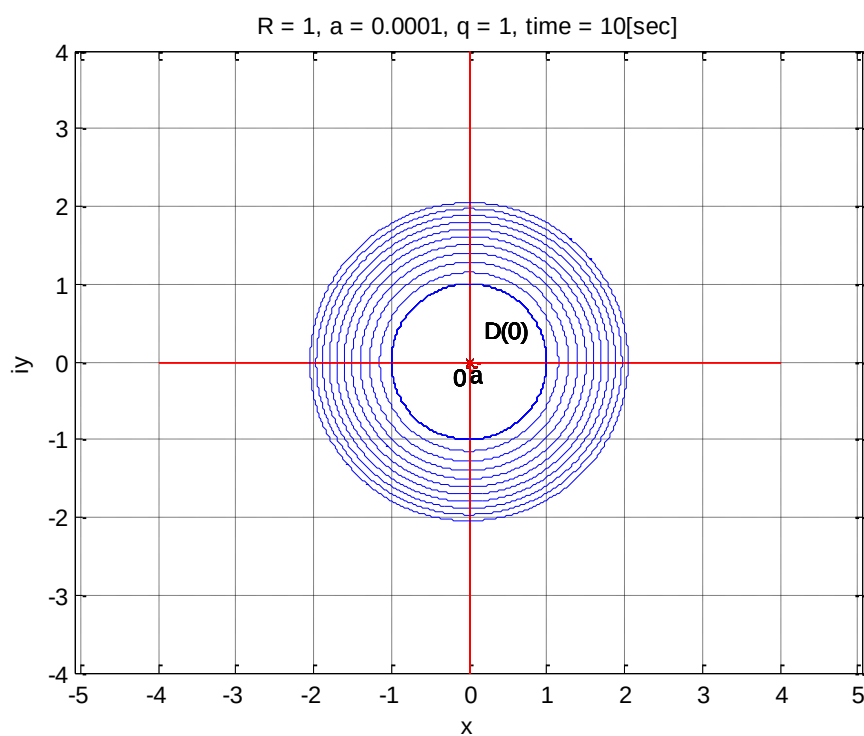
פתרון משוואה (1) הינו פתרון של פולינום ממעלה שישית. בהתבסס על התנאים
 למקדמים שפורטו מעלה ועבור $t = 0$ מקבלים כי שורש אחד הינו שלילי לכן אינו מתאים.
 מתוך שני השורשים הנוטרים, השורש המתאים הינו הקטן יותר. כלומר, α_t הינו השורש
 האמצעי של משוואה (1). לתוצאה זו מגיעים מתוך חישובים וסימולציה במטל"ב.
 לאחר פתרון משוואה (1), מציבים את ה- α_t שמצאנו במשוואות (2) ו- (3) ומקבלים
 פתרון למערכת. פעולה זו ניתן לבצע עבור סדרה של זמנים וכך לקבל סדרות של מקדמים
 שמתוכם ניתן לבנות סדרה של פונקציות f_t . סדרת התחומים המתקבלת ע"י הפונקציות
 f_t הינה בעצם ההתפתחות של שפת התחום D בזמן בהינתן מקור יניקה ($q < 0$) או
 מקור הזרקה ($q > 0$).

4.1 סימולציה של הזרקה

עבור הזרקה ($q > 0$) ישנו צורך להגדיר את משך זמן ההזרקה, אחרת התהליך מתבצע
 ללא עצירה.
 נבחן את השפעת מיקום המקור על אופי התפתחות התחום של הטיפה על ידי שינוי a
 ומתן זמן עצירה t . לשם הפשטות, נבחר $R = 1, q = 1$.

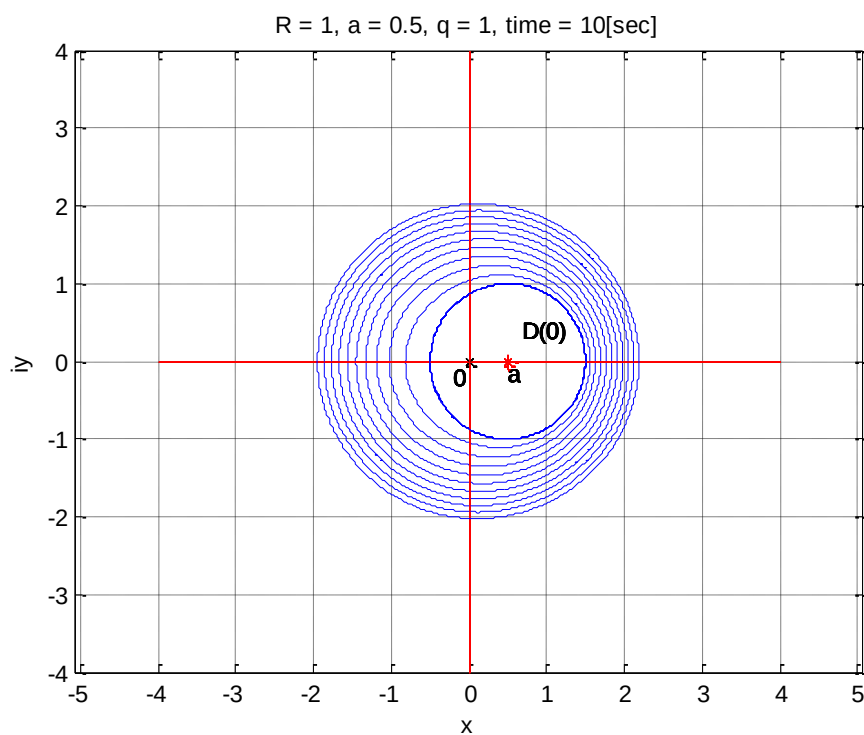
הערה: אחוז הנוזל המוזרק תלוי אך ורק בזמן כאשר R, q קבועים.

: $a = 0.0001$



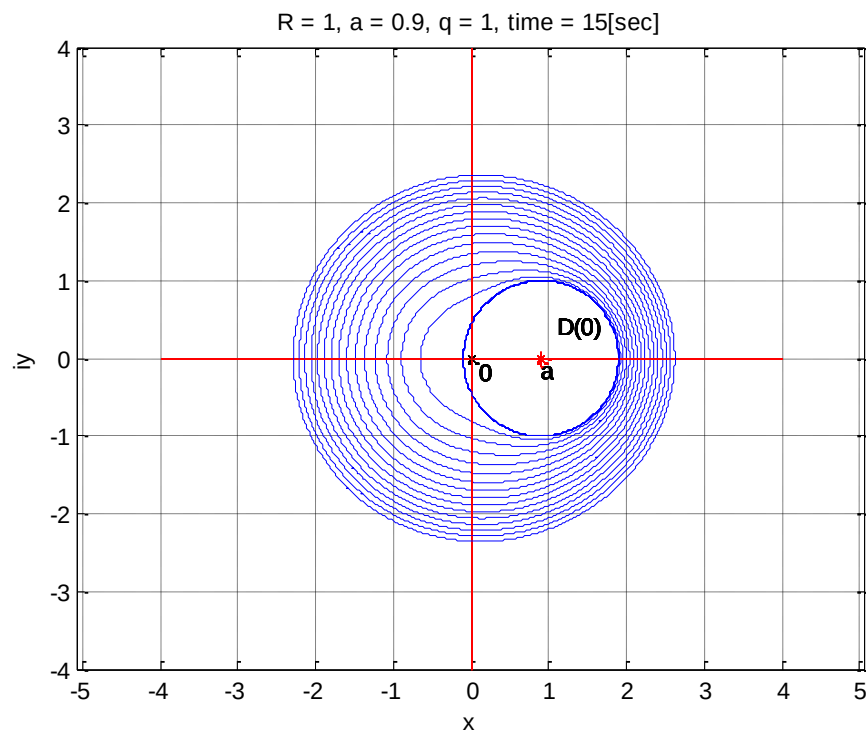
זמן ההזרקה הינו 10 שניות לכן אחוז הנוזל שהוזרק הינו 318%.

: $a = 0.5$



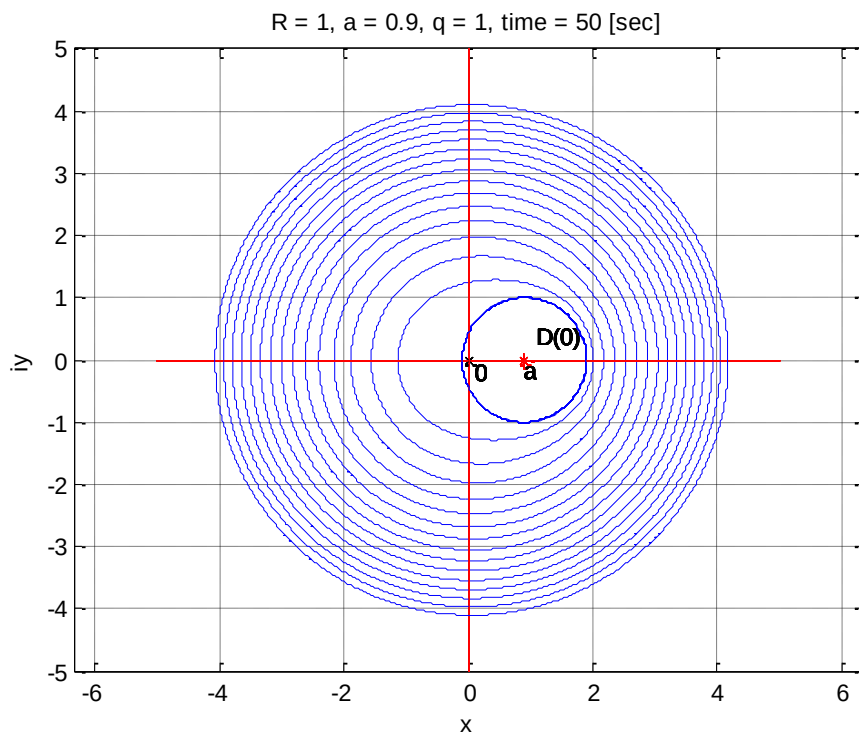
זמן ההזרקה הינו 10 שניות לכן אחוז הנוזל שהוזרק הינו 318%.

$a = 0.9$



במקרה זה זמן ההזרקה הינו 15 שניות לכן אחוז הנוזל שהוזרק הינו 477%.

$a = 0.9$



במקרה זה זמן ההזרקה הינו 50 שניות לכן אחוז הנוזל שהוזרק הינו 1590%.

ניתוח תוצאות עבור הזרקה:

לפי תוצאות הסימולציה ניתן לראות כי כאשר מקור ההזרקה נמצא קרוב מאוד למרכז התחום, התפתחות טיפת השמן הינה מעגלית סביב המקור כבר לאחר זמן קצר מאוד. כאשר ישנה הזזה של המקור שמאלה ניתן לראות כי ישנה פריצה של הנוזל לכיוון השמאלי ולאחר זמן מספיק ארוך ישנה התייצבות ותחום טיפת השמן ממשיך להתפתח בצורה מעגלית סביב המקור כאילו שלא היה מוזז כלל.

4.2 סימולציה של יניקה

בעת יניקה ($q < 0$), לאחר זמן מסוים, שפת התחום מפתחת סינגולריות חצי-ריבועית בצורת חוד המכוון לפנים התחום. סינגולריות זו מפורשת כחדירת מים לתוך המקור. ניתן לחשב את הזמן ואת כמות השמן הנשאבת עד התפתחות החוד על ידי השוואת הדיסקרימיננטה של משוואה (1) לאפס. בדוגמה זו נתייחס לאחוז השמן אשר נשאב עד הופעת החוד.

כדי למצוא את הזמן עד התפתחות החוד (נקרא לזמן זה זמן חדירה), נוריד את סדר משוואה (1): נסמן $p = a_t^2$, נציב: $\left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2 p^3 - \left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4\right)p + 2a^4 = 0$. ונקבל פולינום ממעלה 3.

דיסקרימיננטה של פולינום ממעלה 3: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, נתונה בצורה מפורשת:

$$\Delta = b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd,$$

במקרה שלנו המקדמים הינם:

$$\begin{aligned} a &= \left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2, \\ b &= 0, \\ c &= -\left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4\right), \\ d &= 2a^4. \end{aligned}$$

לכן, הדיסקרימיננטה מקבלת צורה הבאה:

$$\begin{aligned} \Delta_p &= -4ac^3 - 27a^2d^2, \\ \Delta_p &= -4\left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2 \left[-\left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4\right)\right]^3 - 27\left[\left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2\right]^2 (2a^4)^2 \\ &= 4\left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^2 \left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4\right)^3 - 108a^8 \left(R^2 - \frac{qt}{\pi}\right)^4. \end{aligned}$$

נשווה את הדיסקרימיננטה לאפס ונמצא את זמן החדירה:

$$\Delta_p = 4 \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 \left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4 \right)^3 - 108a^8 \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^4 = 0,$$

או בצורה שקולה:

$$\left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 \left[\left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4 \right)^3 - 27a^8 \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 \right] = 0.$$

מתקבלות שתי אפשרויות:

$$(a) \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 = 0, \quad \text{or} \quad (b) \left(2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4 \right)^3 - 27a^8 \left(R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 = 0.$$

פתרון של (a) אינו מתאים מכיוון ש- $q < 0$ ולכן נקבל כי $t < 0$.

עבור (b), לאחר פישוטם, נקבל פולינום ממעלה 3:

$$t^3 + (8R^2 - 5a^2) \frac{3\pi}{8q} t^2 + (4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4) \frac{3\pi^2}{4q^2} t + (8R^2 + a^2) (R^2 - a^2)^2 \frac{\pi^3}{8q^3} = 0.$$

זהו פולינום ממעלה 3 ולכן יש לו לפחות שורש אחד ממשי. נוכיח כי שני השורשים הנוטרים הינם מרוכבים. נציב:

$$P(t) = t^3 + (8R^2 - 5a^2) \frac{3\pi}{8q} t^2 + (4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4) \frac{3\pi^2}{4q^2} t + (8R^2 + a^2) (R^2 - a^2)^2 \frac{\pi^3}{8q^3}.$$

ונמצא נקודות קריטיות של P :

$$P'(t) = 3t^2 + (8R^2 - 5a^2) \frac{3\pi}{4q} t + (4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4) \frac{3\pi^2}{4q^2} = 0,$$

או

$$t^2 + (8R^2 - 5a^2) \frac{\pi}{4q} t + (4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4) \frac{\pi^2}{4q^2} = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-(8R^2 - 5a^2) \frac{\pi}{4q} \pm \sqrt{(8R^2 - 5a^2)^2 \frac{\pi^2}{16q^2} - (4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4) \frac{\pi^2}{q^2}}}{2},$$

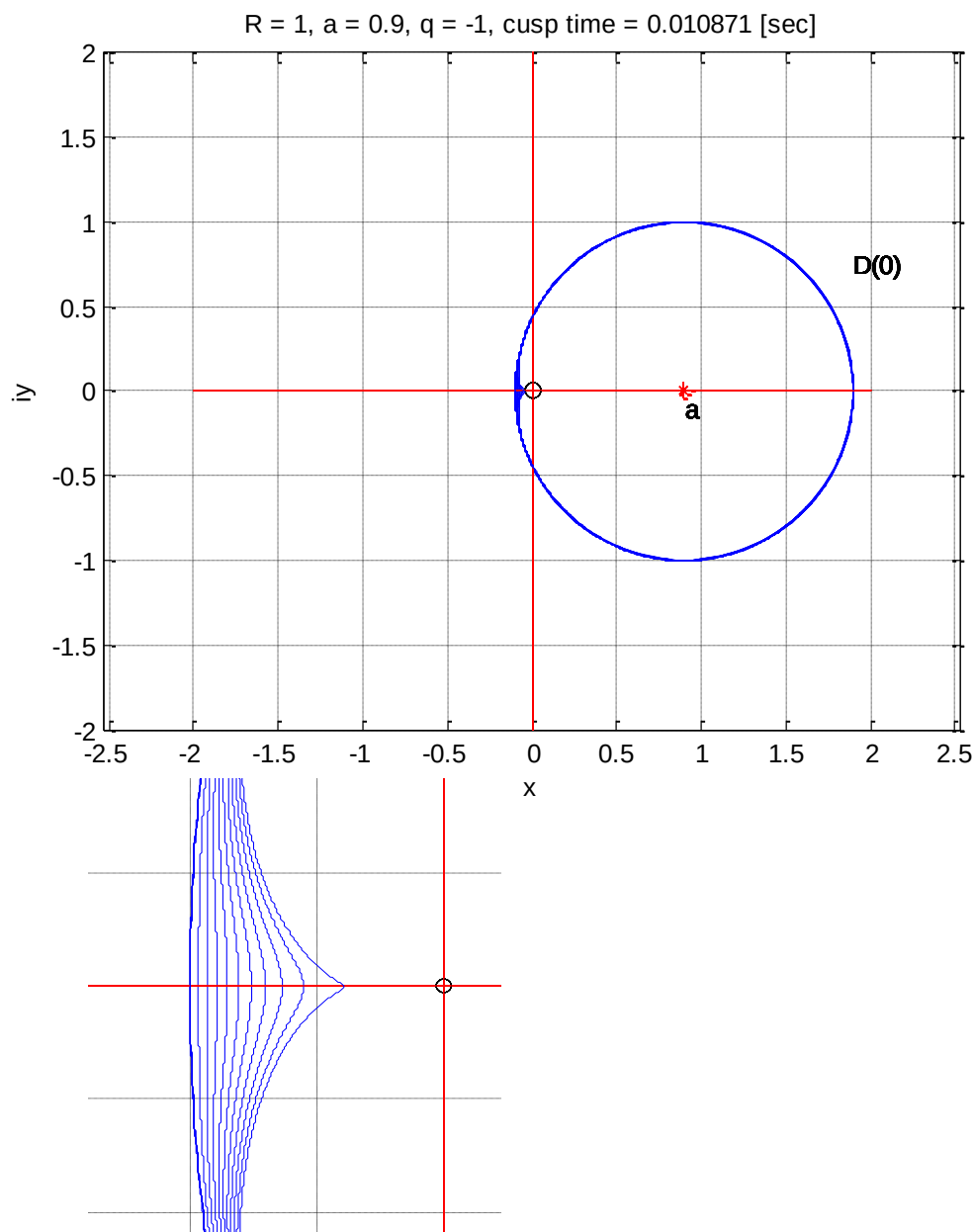
$$t_{1,2} = \left(\frac{\pi}{8|q|} \right) \left((8R^2 - 5a^2) \pm \sqrt{(8R^2 - 5a^2)^2 - 16(4R^4 + 13R^2 a^2 + a^4)} \right),$$

$$t_{1,2} = \left(\frac{\pi}{8|q|} \right) \left((8R^2 - 5a^2) \pm 3a\sqrt{a^2 - 32R^2} \right).$$

מכיוון ש $a < R$, אין פתרונות ממשיים עבור הנגזרת לכן אינה מתאפסת. כלומר, לפולינום $P(t)$ אין נקודות קיצון מקומיות או נקודות קריטיות אחרות. מכך ניתן להסיק כי הפונקציה עולה או יורדת ולכן יש לה נקודת חיתוך אחת עם ציר t . כלומר, לפולינום $P(t)$ יש רק שורש ממשי אחד.

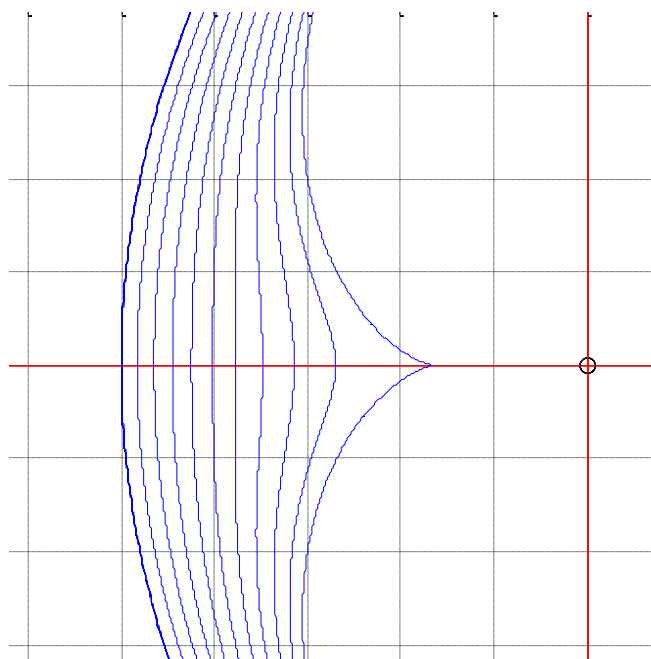
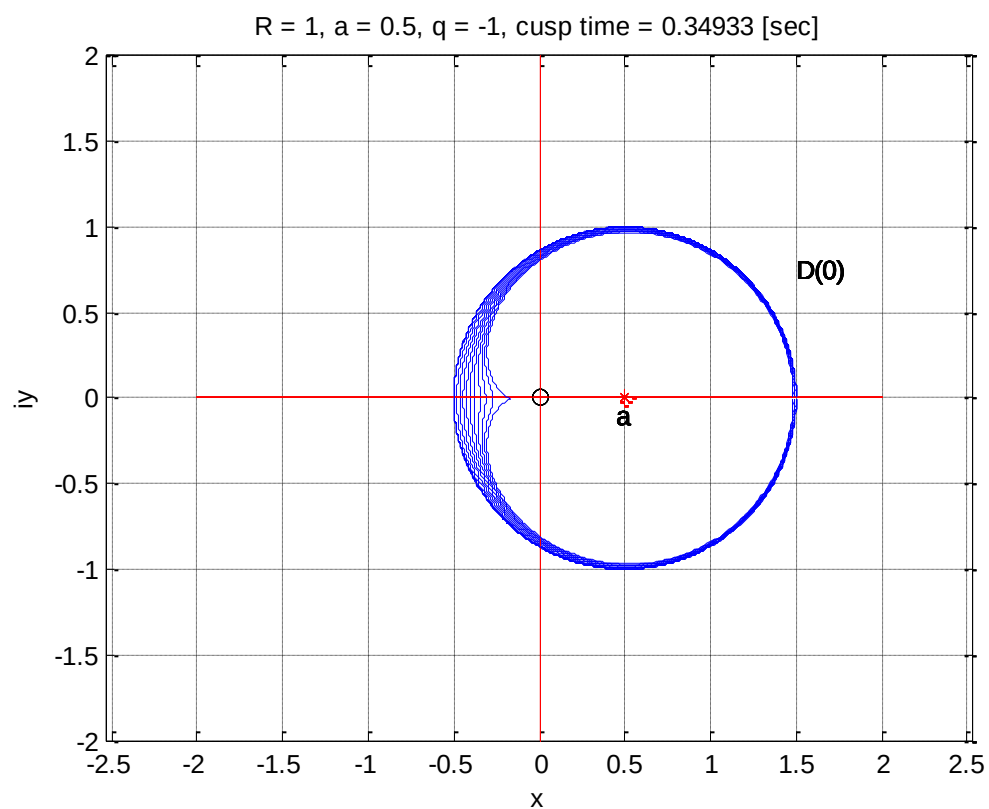
זמן החדירה מחושב על ידי התוכנה לכן אין צורך לחשב אותו מראש. נבחן את השפעת מיקום המקור על אופי התפתחות התחום של הטיפה על ידי שינוי a . לשם הפשטות, נבחר $R=1, q=-1$.

$a = 0.9$:



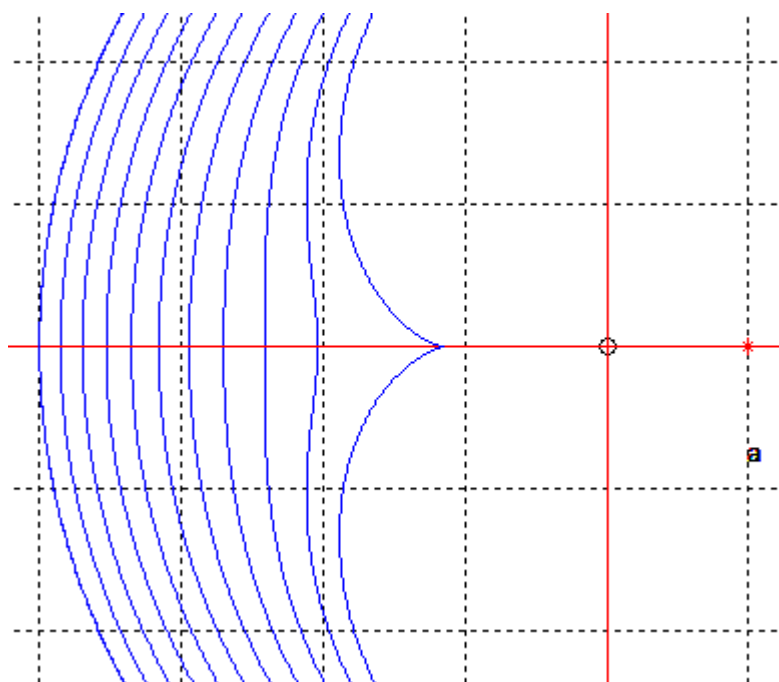
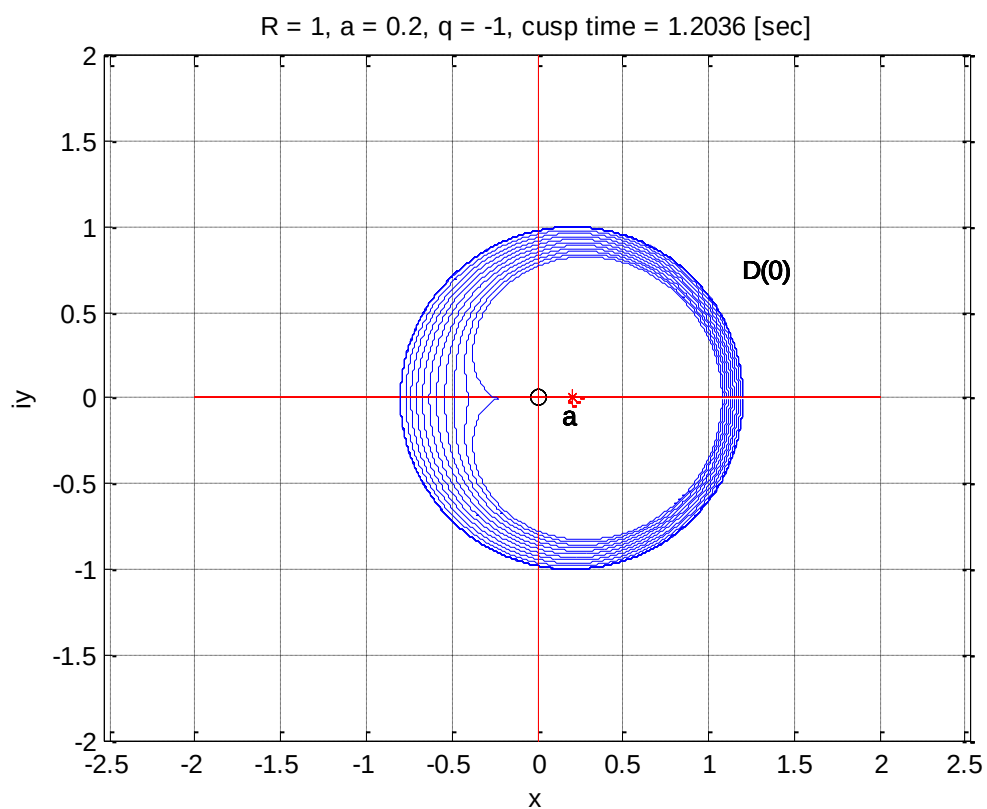
זמן עד להיווצרות החוד הינו 0.3493 שניות ואחוז הנזל שנשאב בזמן זה הינו 0.52%.

: $a = 0.5$



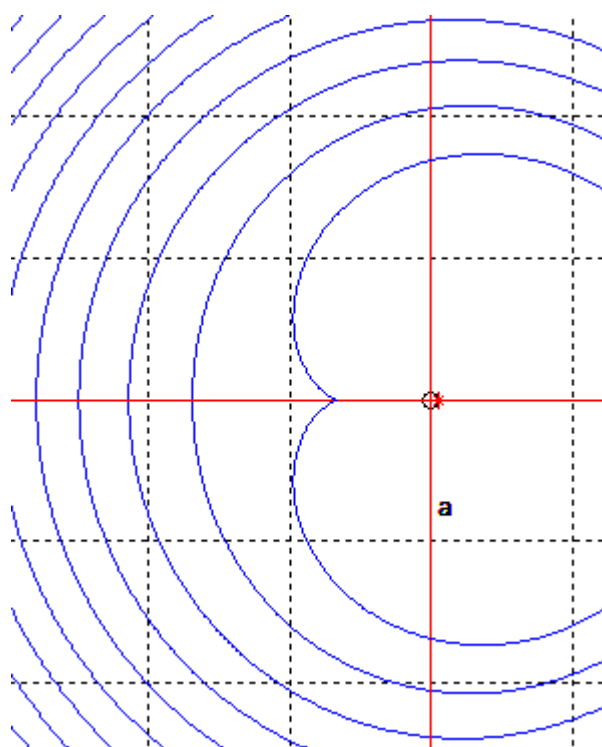
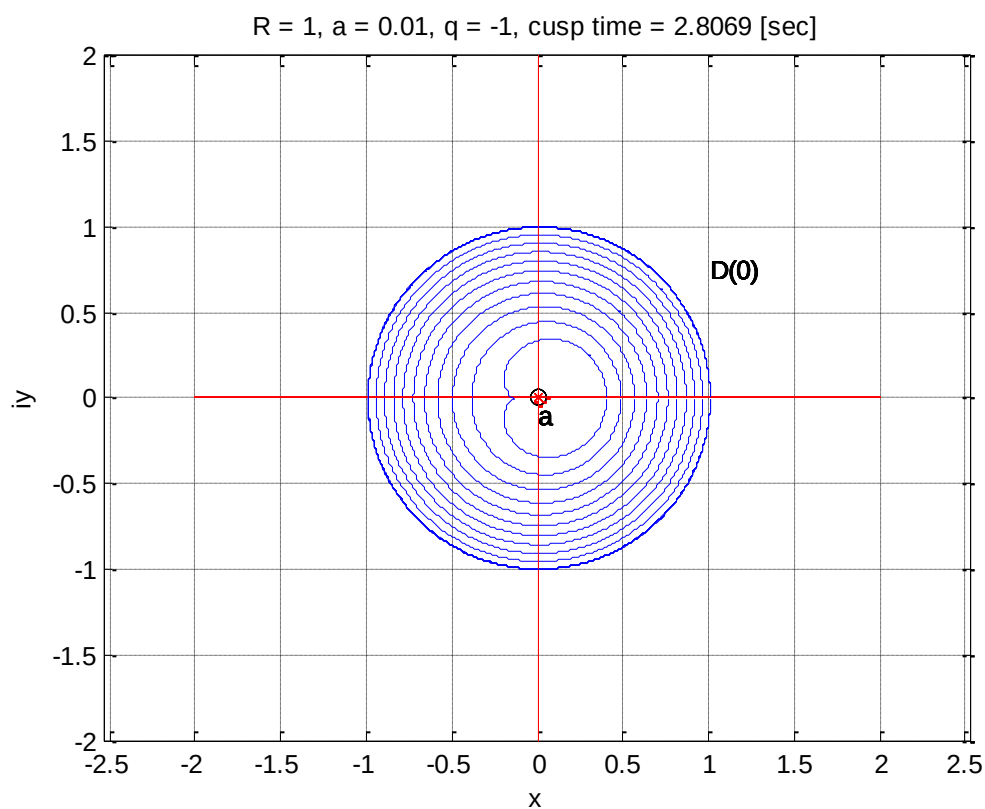
זמן עד להיווצרות החוד הינו 0.3493 שניות ואחוז הנזל שנשאב בזמן זה הינו 11%.

$a = 0.2$



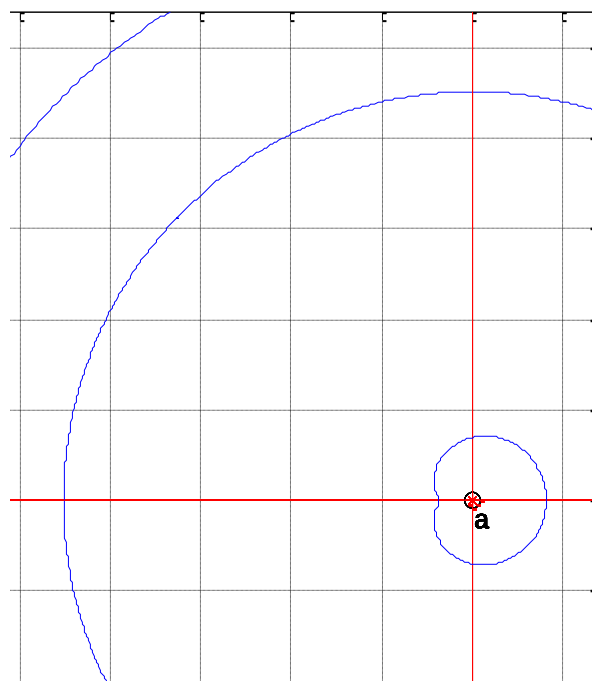
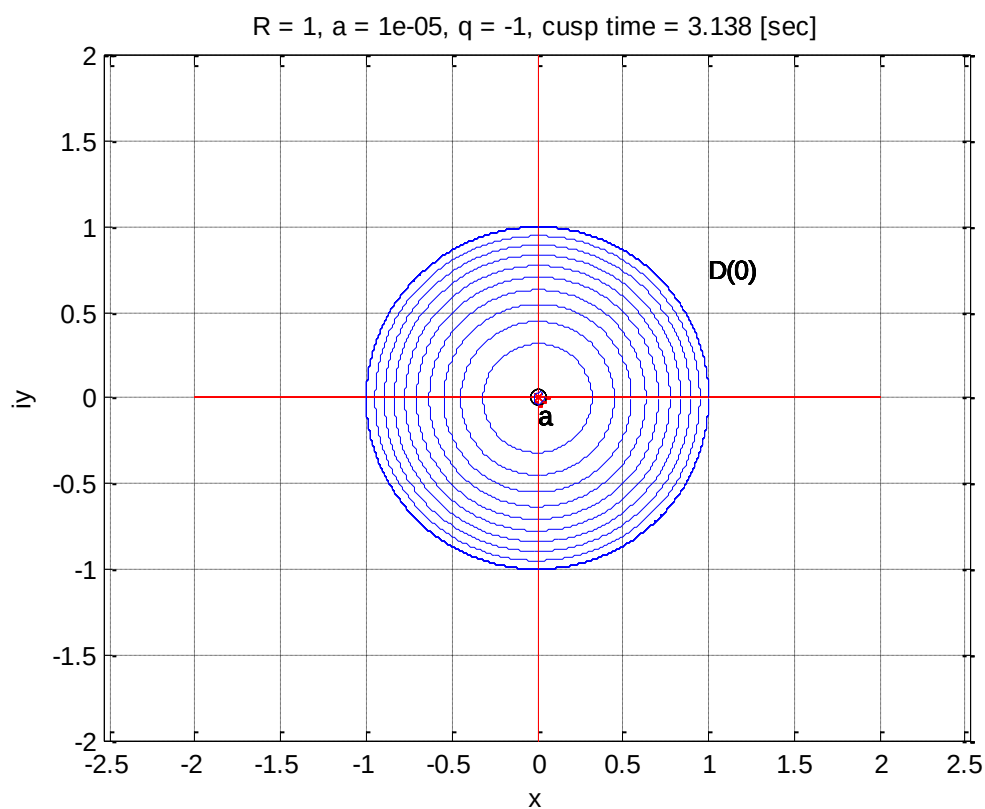
זמן עד להיווצרות החוד הינו 1.2036 שניות ואחוז הנזל שנשאב בזמן זה הינו 38%.

: $a = 0.01$



זמן עד להיווצרות החוד הינו 2.8069 שניות ואחוז הנוזל שנשאב בזמן זה הינו 89%.

$$: a = 0.00001$$



זמן עד להיווצרות החוד הינו 3.138 שניות ואחוז הנזל שנשאב בזמן זה הינו 99.9%.

ניתוח תוצאות עבור יניקה

לפי תוצאות הסימולציה ניתן לראות כי ככל שמקרבים את המקור למרכז הטיפה, כך זמן החדירה של המים לתוך המקור גדל ויותר שמן יכול להישאב עד שמתפתח החוד.

5. סיכום

בפרויקט זה עסקנו בזרימת הלי-שו כאשר בתור מקרה פרטי של זרימה זו התבססנו על עבודתם של פלגיה פולוברינובה-קושינה (Pelageya Polubarinova-Kochina) ופבל קופרב (Pavel Kufarev) אשר עסקה בהתפתחות של טיפת שמן עגולה המוקפת במים, כאשר בתוך הטיפה ישנו מקור של יניקה או הזרקה.

לבעיית ההתפתחות של נוזל צמיג ובלתי דחיס המוקף בנוזל בלתי צמיג קיימים פתרונות רבים. בפרויקט זה התמקדנו באחד מהם אשר נקרא "הפתרון האלגברי".

מטרת הפרויקט הייתה לתאר את התפתחות התחום עם הזמן של טיפת שמן, המייצגת נוזל צמיג ובלתי דחיס, בהינתן צורת התחום ההתחלתית, מיקום המקורות ועוצמתם. בנוסף, נבנתה תוכנית MATLAB אשר הציגה בצורה ויזואלית את התפתחותה של טיפת השמן לפי פרמטרים שהוגדרו.

בשלב הראשון של הפרויקט הגדרנו את המודל המתמטי אשר מתבסס על חוק דרסי ועל זרימה פוטנציאלית של נוזל צמיג ובלתי דחיס. מתוך תנאי הבעיה בנינו מערכת הבאה:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -q_j \delta_{z_j}, & z_j \in D \\ \Phi|_{\partial D} = 0 \\ \text{grad}\Phi \cdot \hat{n}|_{\partial D} = v_b \end{cases}$$

מתוך פתרון של המערכת הנ"ל קיבלנו את פונקציית הפוטנציאל של מהירות הנוזל. בעצם, אם ידוע לנו הפוטנציאל בכל רגע אז ניתן למצוא את מהירות שפת הנוזל בכל רגע וכך למצוא את צורת התפתחות התחום. מכיוון שתהליך זה מורכב מאוד, היה צורך לבנות כלי אשר יספק פתרון יעיל ופשוט יותר לבעיית התפתחות התחום.

בשלב השני הצגנו את המומנטים של ריצ'רדסון שהם:

$$\int_{D(t)} u dx dy = \int_{D(0)} u dx dy + \sum_{j=1}^n u(z_j) \int_0^t q_j(\tau) d\tau,$$

לכל פונקציה הרמונית בסביבת $D(t)$.

בשלב השלישי בנינו את הפתרון האלגברי. השתמשנו במשפט ריצ'רדסון וקופרב שטען שתחום $D(t)$ אלגברי אם תחום $D(0)$ אלגברי. בהמשך, הצגנו את טרנספורמצית קושי ותכונותיה:

$$C_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx dy}{w - z},$$

כאשר $C_D(w)$ הינה בעצם המומנט של תחום D ביחס לפונקציה הרמונית $\frac{1}{\pi(w-z)}$,

עבור $w \notin D$. לאחר מכן, היה עלינו למצוא העתקה קונפורמית מצורה $f(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)}$

אשר מעתיקה עיגול יחידה על תחום D . בעזרת משפט הסינגולריות התואמות, משפט המומנטים של ריצ'רדסון ותכונות של טרנספורמצית קושי, הראנו כי ניתן למצוא את מקדמי ההעתקה הקונפורמית f לכל זמן t על ידי פתרון של מערכת משוואות לא

לינאריות כאשר המקדמים של טרנספורמציות קושי ידועים. בעצם, ההעתקה הקונפורמית f הינה ייחודית לכל זמן t , ובניית התפתחות התחום בפועל נעשית על ידי הפעלת העתקה f_t במרווחי זמן קצובים.

בשלב הרביעי והאחרון של הפרויקט, ביצענו סימולציה של התפתחות התחום של טיפת שמן עגולה. עבור מקור הזרקה ראינו כי תחום הטיפה גדל כשלאחר זמן רב המקור עובר להיות במרכז העיגול אליו מתפתח התחום ההתחלתי. עבור מקור יניקה ראינו תופעה בה שפת התחום מפתחת סינגולריות בצורת חוד והתחום מקבל צורה של קרדיואיד. בנוסף, ראינו כי ישנו קשר בין מרחק המקור מהשפה לבין זמן ההתפתחות של החוד.

ישנן שאלות פתוחות רבות הקשורות לנושא הפרויקט. להלן אחת מהן: האם קיימים פתרונות הדומים לפתרון האלגברי עבור תחום אוקלידי N -מימדי, כך ש $N > 2$? תשובה זו חיובית עבור $N=4$. קבוצת פתרונות מפורשת עבור מרחב 4-מימדי, התגלתה על ידי קרפ לביא (ראה [4]). עבור שאר מימדים שאלה זו נותרת להיות פתוחה.

לסיכום, אציין כי עבודה זו והחקירה שביצעתי העשירה מאוד את ידיעותי בתחום. עבודה זו הייתה הזדמנות מצויינת ליישום מעשי של ידע שניתן בקורסים מכניקת רצף, פונקציות מרוכבות ומערכות דינאמיות ואשר נתן את רב הכלים להבנה עמוקה יותר של נושא העבודה.

ברצוני להודות לד"ר אוסטרובסקי ויקטור על הההנחיה המסורה, על התמיכה והעזרה ועל ההפניה למקורות מידע רלוונטיים. בנוסף, ברצוני להודות לפרופ' קרפ לביא על הייעוץ וההנחיה.

ביבליוגרפיה

1. A. N. Varchenko and P. I. Etingof, *Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.
2. B. Gustafsson and A. Vasil'ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw Cells*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2006, 17.
3. P. S. Novikov, *On the uniqueness for the inverse problem of potential theory*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **18** (1938), 165-168. (Russian)
4. L. Karp, *Construction of quadrature domains in $\mathbb{R}^n$ from quadrature domains in $\mathbb{R}^2$* , Complex Variables: Theory Appl. 17 (1992), 179-188.
5. בן ציון קון, *פונקציות מרוכבות*, הוצאת בק – ספרי לימוד.

נספחים

הפונקציה Polubarinova_Kufarev.m מוצאת את המקדמים $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ לכל t על ידי פתרון מערכת משוואות למציאת המקדמים ובונה ויזואליזציה של התפתחות התחום D לפי הפונקציה f_t . בנוסף, הפונקציה מחשבת את אחוז כמות הנוזל שנשאב או הוזרק ביחס לכמות הנוזל ההתחלתית ויוצרת קובץ *.avi של הויזואליזציה. להלן תוכנית הפעלה ושתי תוכניות עבור יניקה ועבור הזרקה:

תוכנית הפעלה:

```
function [at,bt,gt,f]=Polubarinova_Kufarev(R,a,q,n,myT)
% Function Polubarinova_Kufarev(R,a,q,n,myT) visualizing
evolution
% of moving boundary of incompressible viscous fluid,
surrounded by
% non-viscous fluid with respect to a well, using a
conformal map.
% R => radius of the initial circle.
% a => (a,0) is the center of the circle.
% q => rate of the source.
% n => time step.
% myT => injection time.
% Necessary conditions:
%   For extraction:
% Variables must satisfy: q<0, a<R
%   For injection:
% Variables must satisfy: q>0, a<R

if nargin~=4 && nargin~=5
    error('Number of entered variables is incorrect!')
elseif nargin==4
    if R<=a || q>0
        error('Variables were entered incorrectly! See Help
on ''Polubarinova_Kufarev''.')
    else
        [at,bt,gt,f,Pic]=Pol_Kuf_extraction(R,a,q,n);
        movie2avi(Pic,'Extraction.avi','compression',
'none');
    end
elseif nargin==5
    if R<=a || q<0
        error('Variables were entered incorrectly! See Help
on ''Polubarinova_Kufarev''.')
    else
        [at,bt,gt,f,Pic]=Pol_Kuf_injection(R,a,q,n,myT);
```

```

        movie2avi(Pic, 'Injection.avi', 'compression',
'none');
    end
end

```

תוכנית עבור הזרקת:

```

function [at,bt,gt,f,Pic]=Pol_Kuf_injection(R,a,q,n,myT)
% Rational solution of Polubarinova-Kufarev equation
% This program visualizing the process of
% insertion (q>0) of oil thru a well, based in the origin,
% for time 'myT'.
% Center of the initial domain is in point (a,0).
% Variable 'a' must satisfy the condition: a<R.
% n => time step.

teta=0:2*pi/1000:2*pi;
ksi=exp(1i*teta);
t=0:myT/n:myT;
Q=q*t/pi;

syms p
p_sol=zeros(3,length(t));
for i=1:length(t)
    At=( (R^2-Q(i))^2)*p^3-
(2*a^2*R^2+2*a^2*Q(i)+a^4)*p+2*a^4;
    Atpoly=sym2poly(At);
    p_sol(:,i)=roots(Atpoly);
end

at=find_at(p_sol);
bt=0.5*(1-at.^2).*(a./at+(at/a).*(R^2-Q));
gt=0.5*(a./at-(at/a).*(R^2-Q));

m=sqrt(R^2+myT*abs(q)/pi)+0.5;
f=zeros(1,length(t));

for i=1:length(t)
    for j=1:length(teta)
        f(i,j)=fksi(at(i),bt(i),gt(i),ksi(j));
    end
    plot(0,0,'xk',a,0,'*r',[0 0],[-m m],[-r],[-m m],[0
0],[-r]); hold on
    plot(real(R*ksi)+a,imag(R*ksi))
    plot(real(f(i,:)),imag(f(i,:)))
    grid on; axis([-m m -m m]); axis equal;
    xlabel('x'); ylabel('iy')
    title(['R = ' num2str(R) ', a = ' num2str(a) ', q =
' num2str(q) ', time = ' num2str(myT) ' [sec]'])
    text(a,-0.15,'a'); text(0.1, -0.18, '0');
    if R>=1
        text(a+0.2*R, 0.35*R, 'D(0)');
    end
end

```

```

        end
        Pic(i)=getframe;
    end
    hold off
    percent=(abs(trapz(real(f(end,:)),imag(f(end,:))))-
    pi*R^2)/(pi*R^2)*100;
    fprintf('\nPrecentage of injected oil\n')
    fprintf('with respect to initial domain is: %.3g\n\n',
    percent)

    function y=fksi(at,bt,gt,ksi)
    % defines the conformal mapping
    y=bt*ksi/(1-at*ksi)+gt*ksi;

    function at=find_at(A)
    % finds desired value of at
    sorted_A=sort(A);
    at2=sorted_A(2,:);
    at=sqrt(at2);

```

תוכנית עבור יניקה:

```

function [at,bt,gt,f,Pic]=Pol_Kuf_extraction(R,a,q,n)
% Rational solution of Polubarinova-Kufarev equation
% This program visualizing the process of
% extraction (q<0) of oil thru a well based in the origin.
% Center of the initial domain is in point (a,0).
% Variable 'a' must satisfy the condition: a<R.
% n => time step.

teta=0:2*pi/1000:2*pi;
ksi=exp(1i*teta);
t=blowup_time(R,a,q,n);
Q=q*t/pi;

syms p
p_sol=zeros(3,length(t));
for i=1:length(t)
    At=((R^2-Q(i))^2)*p^3-
    (2*a^2*R^2+2*a^2*Q(i)+a^4)*p+2*a^4;
    Atpoly=sym2poly(At);
    p_sol(:,i)=roots(Atpoly);
end

at=find_at(p_sol);
bt=0.5*(1-at.^2).*(a./at+(at/a).*(R^2-Q));
gt=0.5*(a./at-(at/a).*(R^2-Q));

m=1.5*R;
f=zeros(1,length(t));

```



```

for i=1:length(t)
    for j=1:length(teta)
        f(i,j)=fksi(at(i),bt(i),gt(i),ksi(j));
    end
    plot(0,0,'ok',a,0,'*r',[0 0],[-m m],[-r],[-m m],[0
0], '-r'); hold on
    plot(real(R*ksi)+a,imag(R*ksi))
    plot(real(f(i,:)),imag(f(i,:)))
    grid on; axis([-m m -m m]); axis equal;
    xlabel('x'); ylabel('iy')
    title(['R = ' num2str(R) ', a = ' num2str(a) ', q = '
num2str(q) ', cusp time = ' num2str(t(end)) ' [sec]'])
    text(a,-0.15,'a');
    if R>=1
        text(a+1*R,0.75*R,'D(0)');
    end
    Pic(i)=getframe;
end
hold off

percent=(pi*R^2-
abs(trapz(real(f(end,:)),imag(f(end,:)))))/(pi*R^2)*100;
fprintf('\nPrecentage of extracted oil\n')
fprintf('with respect to initial domain is: %.3g\n\n',
percent)

function y=fksi(at,bt,gt,ksi)
% defines the conformal mapping
y=bt*ksi/(1-at*ksi)+gt*ksi;

function at=find_at(A)
% finds desired value of at
sorted_A=sort(A);
at2=sorted_A(2,:);
at=sqrt(at2);

function time=blowup_time(R,a,q,n)
% Calculates the time until the cusp reaches the well.
% Interpreted as a rush of water into the oil-extracting
well
syms t
Q=q*t/pi;

A=(R^2-Q)^2;
B=-(2*a^2*R^2+2*a^2*Q+a^4);
C=2*a^4;

delta=-4*A*B^3-27*A^2*C^2; % discriminant of polinom order 3
sol=solve(delta,t);
T=double(sol(3))-0.0001;
fprintf('\nRush of water into the oil-extracting\n')

```

```
fprintf('well starts after: %.5g [sec]\n',T)
time=0:T/n:T;
```