המחלקה למתמטיקה

Department of mathmatics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.cS) במתמטיקה שימושית

מודלים מתמטיים להתפשטות מחלת המלריה

מאת:
ולאא פרג
315730721

מנחה:
פרופ"ח חגי כתריאל
Prof Hagai katriel

20 בפברואר 2020

תוכן עניינים

1 הקדמה

בעבודה זו נחקור את התפשטות מחלת המלריה ואת קצב הגידול שלה באזורים שונים באמצעות פיתוח שני מודלים מתמטיים שונים המודל הפשוט של רוס והמודל המורכב של צ׳יטניס.
מטרת המודל המתמטי היא לספק תיאור מופשט של המציאות, שיהיה מספיק ריאלי ומספיק גמיש כדי לבצע ניתוחים, הערכות, חיזוי והסקת מסקנות על המערכת במציאות.
המודלים שנבנה אינם מדמים את המציאות בצורה מדויקת אך הם מהווים הפשטה מסויימת של המציאות שבאמצעותה ניתן לקבל תובנות חשובות להבנה של המערכת.
המוטיבציה לבניית מודלים אלו היא שמחלת המלריה היא אחת מגורמי המוות המשמעותיים בעולם, בפרט בקרב ילדים באזורים הטרופיים.
נבנה מודלים מתמטיים שיעזרו לנו לנבא את התפשטות המחלה ולקבל אומדן לשיעור התחלואה במצב שיווי משקל ולענות על שאלות חשובות המסייעות במאבק להכחיד את המחלה.
לדוגמא האם חיסונים ותרופות מורידים את מספר האנשים החולים, האם צריך להכחיד את היתושים שמעבירים את המחלה לבני אדם כדי להכחיד את המחלה או צריך רק להקטין את מספרם עד מספר קריטי מסויים, באיזה מידה שימוש ברשתות עוזר בהקטנת מספר החולים.
את התשובות האלו אנו נחקור ונדע בהמשך .
נתאר את המודלים באמצעות מערכות שונות של משוואות דיפרנציאליות רגילות ונחקור את השפעת הפרמטרים השונים על התוצאות.
בעבודה זו ביצענו שימוש בתוכנת $insightmaker$ שבעזרתה קיבלנו מידע ע״י חקירות נומריות וחקירות אנליטיות שונות.
נתחיל בפרק של מודל רוס,נסביר את מטרתו לבניית מודל זה ואת התוצאות המעניינות שהגיע אליהם רוס.
ונסיים בפרק המודל של צ׳יטניס בו נסביר את ההבדלים בין שני המודלים ונראה איך נשתמש במודל לצורך חקירת דרכי מאבק במחלה.

2 רקע על מחלת המלריה

מלריה היא מחלה קשה מאוד שנפוצה לרוב במדינות העולם השלישי .
[5] התסמינים של המחלה יכולים להופיע אחרי שבוע מהחשיפה לטפיל והם כוללים :
חום גבוה מלווה בצמרמורות, ירידה חדה בחום שיכולה להילווה בהזעה מוגברת,
כאבי ראש ועייפות, כאבי שרירים, רגישות בטנית וקשיי עיכול בחילה הקאות ועוד...

המלריה נגרמת על ידי טפיל חד־תאי בשם פלסמודיום, שמתפתח בגופה של נקבת יתוש האנופלס ומוחדר לגוף האדם כשהיא מוצצת את דמו.
תחילה חודר הטפיל לכבד ועובר שם תהליכי התבגרות, לאחר מכן הוא חודר לתאי דם אדומים, מתרבה בתוכם ומחסל אותם. [11]
דרך עקיצותם היתושים מעבירים את האדם מבריא לחולה אחרי תקופת דגירה בגופו של האדם, נציין כי המחלה עוברת מיתוש לאדם ומאדם ליתוש ואינה יכולה לעבור מאדם לאדם או מיתוש ליתוש.
יתושי האנופלס עוקצים בעיקר בשעות החשכה וחיים באזורים נמוכים מתחת לגובה של אלפיים מטרים. [4]
המלריה הייתה נפוצה בעבר גם בישראל, בעיקר באזורי הביצות שהיו בצפון הארץ ובשרון, ונקראה קדחת הביצות.
המחלה הודברה לבסוף בשנות ה־50 עם השלמת ייבוש הביצות, שהביא לחיסול בתי הגידול של יתוש האנופלס. [11]
האמצעי היעיל ביותר להילחם במלריה המתפשטת בקרב האוכלוסייה הוא לחסל את הדגירה של יתושי האנופלס על ידי ריסוס מקומות הדגירה, ייבוש הביצות, החדרת דגי גמבוזיה למקווי המים על מנת שיטרפו את הרימות והביצים של היתושים או כמוצא אחרון, כיסוי הביצות בשכבת נפט שאינה מאפשרת לרימות היתושים לנשום וקוטלת אותם.

עובדות על מחלת המלריה [13] :
* בשנת 2018 היו 228 מיליון חולים במחלת המלריה בעולם.
* בשנת 2018 היו 405000 מקרי מוות מהמחלה , כאשר 67% ממקרי המוות הם ילדים מתחת לגיל 5.
* כמעט 85% ממקרי מחלת המלריה התרחשו ב 20 מדינות בעולם מהם אפריקה הודו וניגריה שהיוו 24% מהם.

3 המודל הפשוט של רוס

רונלד רוס נולד בשנת 1857 בהודו התחיל ללמוד בבית ספר לרפואה בלונדון לפי רצונו של אביו.
הוא החליט להתמחות בתחום הרוקחות הרפואית ולאחר הכשרה התחיל לעבוד בבית חולים בריטי בהודו. [6]
אחת הבעיות הקשות שעמדו בפני רופאים באזורים הטרופיים הייתה מחלת המלריה.
בסוף המאה ה ־ 19 ידעו כי גורם המחלה הוא הטפיל החד תאי פלסמודיום אך לא הבינו כיצד טפיל זה מועבר מאדם לאדם [6] רוס עבר במקומות שונים בהודו כאשר חקר את מחלת המלריה והבחין כי התחלואה גבוהה יותר ליד ביצות ומקווי מים מתוקים.

במחקריו רוס גילה כי טפיל המלריה מועבר ע"י זן ספיציפי של יתוש האנופלס.
ב־1898 רוס הדביק ציפורים במלריה באמצעות יתושים מודבקים וכך הוכיח באופן חד משמעי שיתושים הם המעבירים של הטפיל [9] .
בשנת 1902 זכה רוס בפרס נובל על מחקריו למחלת המלריה.
[1] אחרי שרוס הוכיח במחקריו שמחלת המלריה מועברת ע"י זן מסויים של יתוש, הוא טען כי על מנת להכחיד את מחלת המלריה מהעולם או מאזור מסויים לא צריך להכחיד את יתושי האנופלס, אלא צריך להקטין את מספר יתושים אלו עד למספר קריטי מסויים ובכך נוודא שהמחלה תיכחד.
וכדי להוכיח את טענתו רוס בנה מודל מתמטי, מודל זה מורכב מארבעה משוואות דיפרנציאליות המייצגות חלקים שונים באוכלוסיות בני האדם והיתושים שאותו אנו נתאר ונחקור בפרק זה.

3.1 מודל התפשטות בסיסי למחלת המלריה

המודל שנבנה מתאר את תהליך העברת המחלה מאדם ליתוש ומיתוש לאדם בצורה פשוטה ומורכב מארבעה משוואות דיפרנציאליות כך שכל משוואה מתארת חלק שונה באוכלוסיה.
כמו שהסברנו רוס בנה מודל זה על מנת לתמוך בטענתו כך שאם נקטין את מספר היתושים עד למספר קריטי מסויים תיכחד המחלה.
נתאר כעת את המודל שבנה רוס [1]

הפרמטרים של המודל:
N- גודל אוכלוסיית בני האדם .
n- גודל אוכלוסיית היתושים.
b- מספר עקיצות ביחידת זמן ליתוש אחד , יחידות:**1/זמן**
p- ההסתברות להעברת המחלה מבן אדם נגוע ליתוש במהלך עקיצה, חסר יחידות.
p'- ההסתברות להעברת המחלה מיתוש נגוע לבן אדם במהלך עקיצה, חסר יחידות.
α- שיעור ההחלמה של בן אדם מהמחלה, יחידות:**1/זמן**
m- שיעור התמותה של היתושים מהמחלה, יחידות:**1/זמן**

המשתנים:
S-מספר בני אדם בריאים .
I-מספר בני אדם חולים .
R-מספר יתושים בריאים .
i-מספר יתושים חולים .

הערה: כל הפרמטרים אי שליליים.

הנחות המודל:
*אין שיעור ילודה ותמותה לבני אדם במודל.
*שיעור התמותה והילודה של יתושים שווה.

המודל מורכב מארבעה משוואות דיפרנציאליות:

$$\frac{dI}{dt} = bp'i\frac{N-I}{N} - \alpha I = bp'i\frac{s}{N} - \alpha I \qquad \textbf{(1)}$$

משוואה זו מתארת את השתנות מספר בני האדם החולים במחלת המלריה בזמן.

$$\frac{dS}{dt} = -bp'i\frac{N-I}{N} + \alpha I = -bp'i\frac{S}{N} + \alpha I \tag{2}$$

משוואה זו מתארת את השתנות מספר בני האדם הבריאים בזמן.

$$\frac{di}{dt} = bp(n-i)\frac{I}{N} - mi = bpR\frac{I}{N} - mi \tag{3}$$

משוואה זו מתארת את השתנות מספר היתושים הנגועים במחלה בזמן.

$$\frac{dR}{dt} = -bp(n-i)\frac{I}{N} + mn - mR = -bpR\frac{I}{N} + mn - mR = -bpR\frac{I}{N} + mi \tag{4}$$

משוואה זו מתארת את השתנות מספר היתושים הבריאים בזמן.

הסבר המשוואות:

משוואה (1)

מתארת את קצב השינוי במספר האנשים החולים במחלה בזמן מסויים ומורכבת משני חלקים:

$$bp'i\frac{S}{N}$$

בחלק זה מחשבים את מספר האנשים הבריאים שנעקצו ונהיו חולים ביחידת זמן כך שהוא מחושב בצורה הבאה:
רוס הכפיל את מספר היתושים שנושאים את המחלה במספר העקיצות b שיתוש אחד עוקץ בפרק זמן, כך שמספר העקיצות הכללי שבני אדם מקבלים לפרק זמן את המספר הזה הכפיל בהסתברות שהאדם שנעקץ הוא בריא $\frac{S}{N}$ והסתברות להעברת המחלה מיתוש לאדם p'.

חלק שני:

$$\alpha I$$

בחלק זה מפחיתים ממספר האנשים החולים את מספר האנשים שהבריאו ביחידת זמן כלומר בשיעור ההבראה של בני אדם כפול מספר בני אדם חולים.

משוואה (2) מתארת את קצב שינוי אוכלוסיית בני האדם הבריאים. במשוואה זו רוס מוריד ממספר בני האדם הבריאים את מספר בני האדם שחלו במחלה, והוסיף למספרם את מספר בני האדם שהבריאו מהמחלה וחזרו להיות בריאים.

משוואה (3) מתארת את קצב השינוי במספר היתושים הנושאים את המחלה בפרק זמן מסויים ומורכבת גם היא משני חלקים.

חלק ראשון:

$$bpR\frac{I}{N}$$

במשוואה זו רוס חישב את כמות היתושים הבריאים שעוקצים אדם חולה והמחלה והועברה אליהם בצורה הבאה:
הוא הכפיל את מספר העקיצות שיתוש אחד עוקץ b במספר היתושים הבריאים R כך מקבלים את מספר העקיצות הכללי של יתושים בריאים בפרק זמן, ביטוי זה הוכפל בהסתברות שהיתוש עקץ אדם שנושא את המחלה $\frac{I}{N}$ כפול ההסתברות שהמחלה תעבור ליתוש ברגע עקיצה p.
חלק שני:

$$mi$$

בחלק זה מורידים את מספר היתושים המתים ביחידת זמן מאוכלוסיית היתושים.

משוואה (4)
מתארת את קצב שינוי כמות היתושים הבריאים.
במשוואה זו רוס מוריד את מספר היתושים שהועברה אליהם המחלה מאוכלוסיית היתושים הבריאים מוסיף את כמות היתושים שנולדו, ששווה לשיעור הילודה m כפול גודל אוכלוסיית היתושים n.
אחר כך הוא מחסיר את מספר היתושים המתים מוות טבעי שזה שווה לשיעור התמותה m כפול מספר היתושים הבריאים R.
מאחר ומתקיים:

$$mn - ms = m(n - s) = mi$$

מקבלים את המשוואה הסופית (4).

3.2 חקירה אנליטית

שיווי משקל של מערכת משוואות דיפרנציאליות מתקיים כאשר המשתנים המגדירים את התנהגות המערכת או התהליך אינם משתנים בזמן, במלים אחרות הנגזרת ביחס לזמן שווה לאפס.
בחקירת מודל מתמטי חשוב למצוא נקודות שיווי משקל כי באמצעותו ניתן להבין את התנהגות המערכת אותה אנו חוקרים בטווח הארוך.
המודל של רוס מורכב משתי משוואות דיפרנציאליות כי לפי ההנחות שלו הוא בנה מודל סגור ולכן אין השתנות במספרי האוכלוסיות עם הזמן ולכן לחישוב מספר בני האדם הבריאים והיתושים הבריאים פשוט מחסירים ממספר האוכלוסייה הכללי את מספר היתושים או בני האדם החולים.

כדי למצוא את שיווי המשקל אנו בודקים מתי מתקיים כי :
האגף הימני של משוואה (1) שווה לאפס.
והאגף הימני של משוואה (3) שווה לאפס.

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{dt} = 0$$

כלומר:

$$bp'i\frac{N-I}{N} - aI = 0 \quad \textbf{(5)}$$

$$bp(n-i)\frac{I}{N} - mi = 0 \quad \textbf{(6)}$$

ממשוואה (5) מקבלים כי:

$$i = \frac{\alpha NI}{bp'(N-I)}$$

מציבים ביטוי זה במשוואה (6) ומקבלים שני פתרונות
פתרון 1 ־הפתרון הטריוויאלי:

$$I = 0$$

$$i = 0$$

הפתרון הזה מייצג מצב בו המחלה אינה קיימת באוכלוסייה .
פתרון 2 ־הפתרון האנדמי:

$$I = N\frac{1 - \frac{amN}{b^2pp'n}}{1 + \frac{aN}{bp'n}} \tag{7}$$

$$i = n\frac{1 - \frac{amN}{b^2pp'n}}{1 + \frac{m}{bp}} \tag{8}$$

הפתרון הזה מייצג מצב בו המחלה נמצאת באוכלוסייה ברמה קבועה, ונותן הערכה למספר בני האדם החולים והיתושים הנושאים את המחלה בשיווי משקל.

3.3 חישוב תנאי ההיכחדות למחלה

כעת באמצעות שני הביטויים (7) ו (8) עבור שיווי המשקל האנדמי נקבל אומדן על המספר הקריטי של היתושים על מנת להגיע להכחדת המחלה.
כדי לבדוק מתי תיכחד המחלה או לא תיכחד נבדוק את התקיימות התנאים:

$$I > 0$$

$$i > 0$$

כלומר:

$$N\frac{1-\frac{amN}{b^2pp'n}}{1+\frac{aN}{bp'n}} > 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \frac{1-\frac{amN}{b^2pp'n}}{1+\frac{aN}{bp'n}} > 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; 1-\frac{amN}{b^2pp'n} > 0$$

$$\Leftrightarrow \;\; \frac{amN}{b^2pp'n} > 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; amN < b^2pp'n \;\;\Leftrightarrow\;\; n > \frac{am}{b^2pp'}.N$$

מסקנות:
אם תנאי זה מתקיים אז המחלה לא תיכחד.
מכאן רוס הוכיח את טענתו שאם נוריד את מספר היתושים עד למספר קריטי מסויים אז מובטח לנו היכחדות המחלה כאשר המספר הקריטי הוא:

$$n < n^* = \frac{am}{b^2pp'}.N$$

מובן שמסקנה זו היא חשובה מאוד כי בזמנו מדענים רבים חשבו כי מחלת המלריה לא תיכחד מהעולם אלא אם נכחיד את היתושים שמעבירים את המחלה.
רוס הוכיח אחרת וזו תגלית חשובה מאוד שמראה שיש להשקיע מאמץ במציאת פתרונות שונים שבעזרתם נוכל להקטין את מספר היתושים עד למספר קריטי זה ולהכחיד את מחלת המלריה .

נתבונן בערך הקריטי שמצאנו :

$$n^* = \frac{am}{b^2pp'}.N$$

רואים כי אם b מספר העקיצות ליתוש ליחידת זמן גדל אז הערך הקריטי n^* קטן וזה הגיוני כי אם מספר העקיצות גדל עלינו להקטין את אוכלוסיית היתושים למספר קטן ממש על מנת להכחיד את המחלה.

רואים גם כי אם a גדל אז הערך הקריטי n^* גדל וזה נכון כי אם שיעור ההחלמה גדל אז מספר החולים באוכלוסייה קטן.

3.4 חקירות נומריות של המודל

כעת נבצע סימולציה למודל ונדגים את תוצאותו של רוס.
נשתמש בתוכנת $insightmaker$ כדי להמחיש את מסקנותיו רוס חיפש ערכים לפרמטרים הנומריים של המודל והניח על סמך הידע שלו:

* שיעור התמותה של היתושים מהמחלה m:

לפי טענתו של רוס רק שליש מהיתושים נשארים בחיים עשרה ימים לאחר הידבקותם במחלה ולכן מתקיים כי:

$$e^{-10m} = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{log3}{10} = 0.109\frac{1}{day}$$

* שיעור החלמה של בן אדם α

לפי טענתו של רוס רק חצי מבני האדם מחלימים מהמחלה אחרי שלושה חודשים כלומר תשעים ימים ולכן מתקיים כי:

$$e^{-90\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{log2}{90} = 0.0077\frac{1}{day}$$

* יתוש אחד מתוך שמונה יתושים עוקץ בכל יום לכן מתקיים כי:

$$e^{-b} = 1 - \frac{1}{8}$$

אז מתקיים כי

$$b = log\frac{8}{7} = 0.13\frac{1}{day}$$

יתושים שנושאים את המחלה בדרך כלל אינם מדבקים בעשרת הימים הראשונים כי יתושים עוברים כמה שלבים עד שיחלו במחלה ומכיוון ששליש מהיתושים ישרדו תוך עשרה ימים רוס הניח כי שליש מהיתושים יהפכו למדבקים ולכן ההסתברות להעברת המחלה היא:

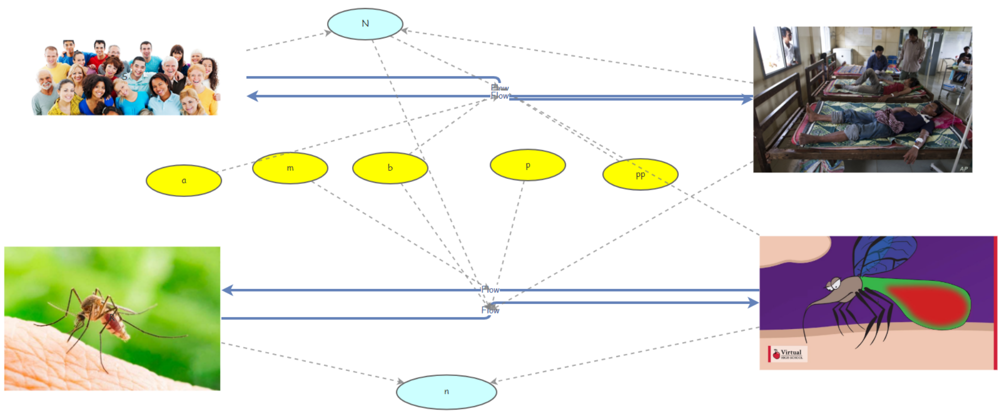
$$P = \frac{1}{4}$$

את ההסתברות להעברת המחלה מבן אדם ליתוש העריך:

$$p' = \frac{1}{3}$$

בניית המודל בתוכנה:

נבנה את המודל בתוכנת $insightmaker$ [7] ונציב את ערכי הפרמטרים שהעריך רוס:
$m = \frac{log3}{10}$,$a = \frac{log2}{90}$,$P' = \frac{1}{3}$,$P = \frac{1}{4}$,$b = log\frac{8}{7}$



המודל של רוס

ניתן לראות את המודל בקישור הבא:

https://insightmaker.com/insight/175230/ross-model-new
נציב את הפרמטרים בתנאי של היכחדות המחלה ונקבל

$$n < \frac{am}{b^2pp'} \cdot N \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{(\frac{log2}{90}) \cdot (\frac{log3}{10})}{((log(\frac{8}{7}))^2) \cdot (\frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{3})} \cdot N \quad \Leftrightarrow \quad n < 0.5694 \cdot N$$

קיבלנו:

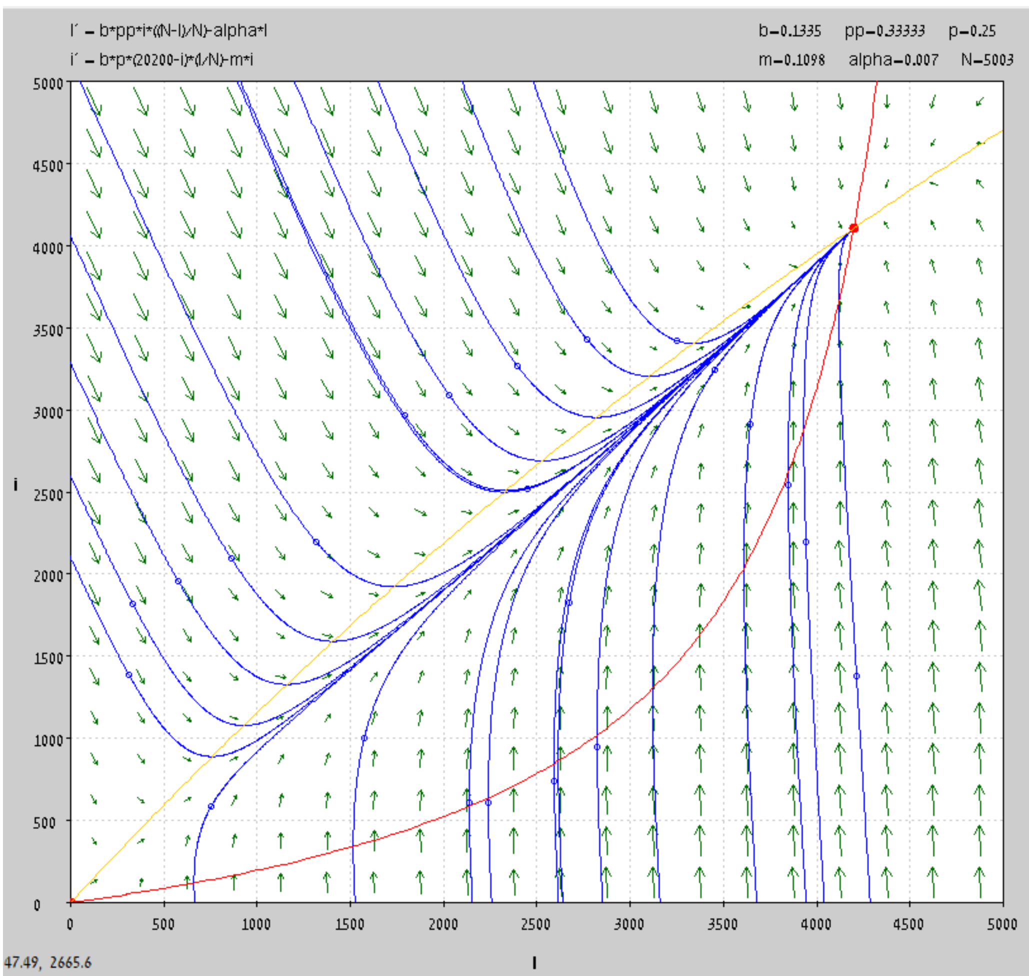
$$n < 0.5694 \cdot N \tag{9}$$

אם תנאי זה מתקיים מחלת המלריה תיכחד, נבצע כמה סימולציות שמציגות את התוצאה.

הערה: כמובן שתנאי (9) תקף אך ורק לפרמטרים שקבענו לעיל ופרמטרים אלו

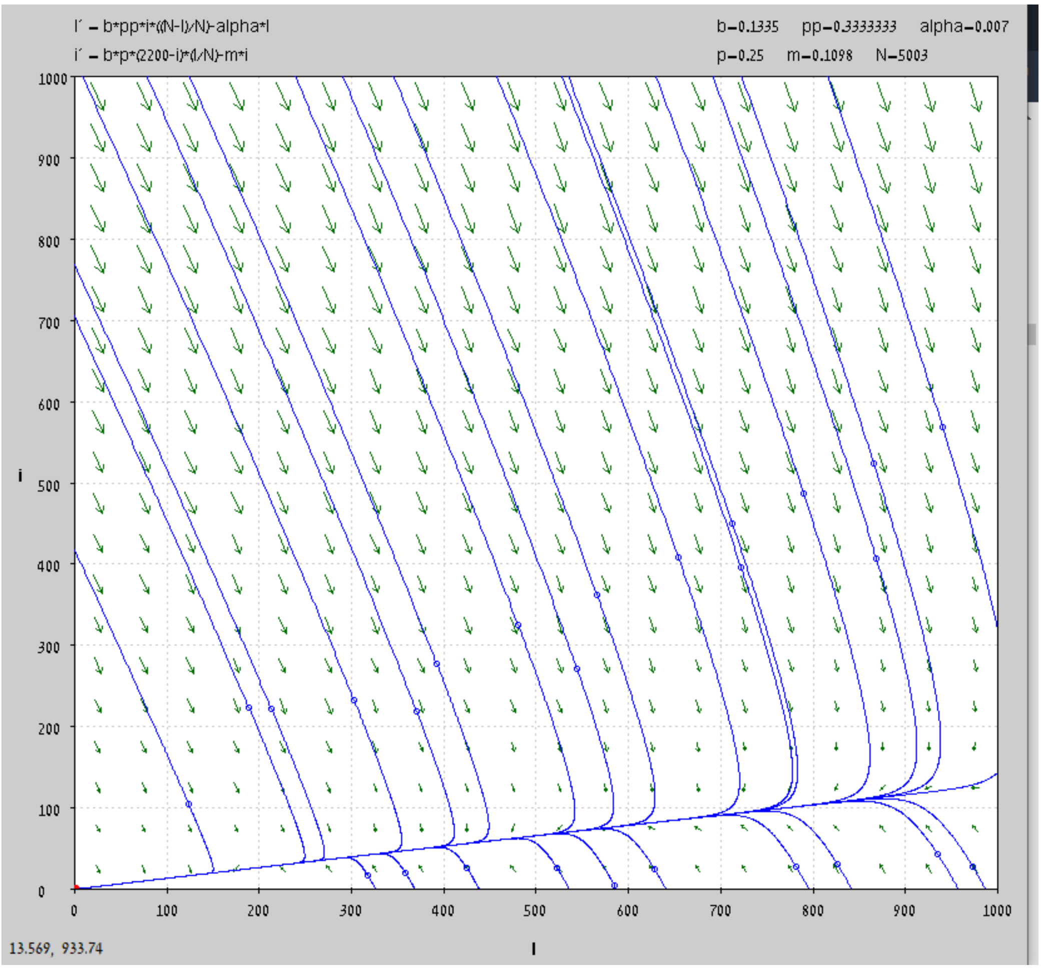
ומשתנים לפי האזור הנחקר.
אחרי שחישבנו את התנאי לקיום שיווי משקל אנדמי נבדוק באמצעות מישור הפאזה את יציבות נקודות שיווי המשקל כך שבכל תנאי התחלה נגיע לשיווי המשקל שחושב וזאת אנו רואים בבירור בפלטים המצורפים:

*הצבת גודל אוכלוסיות המתאים לאי קיום היכחדות למחלה לפי התנאי שמצאנו.



מישור הפאזה ויציבות שיווי המשקל האנדמי

הצבת גודל אוכלוסיות המתאים לקיום היכחדות למחלה.



מישור הפאזה ויציבות שיווי המשקל הטריוויאלי

3.4.1 סימולציות

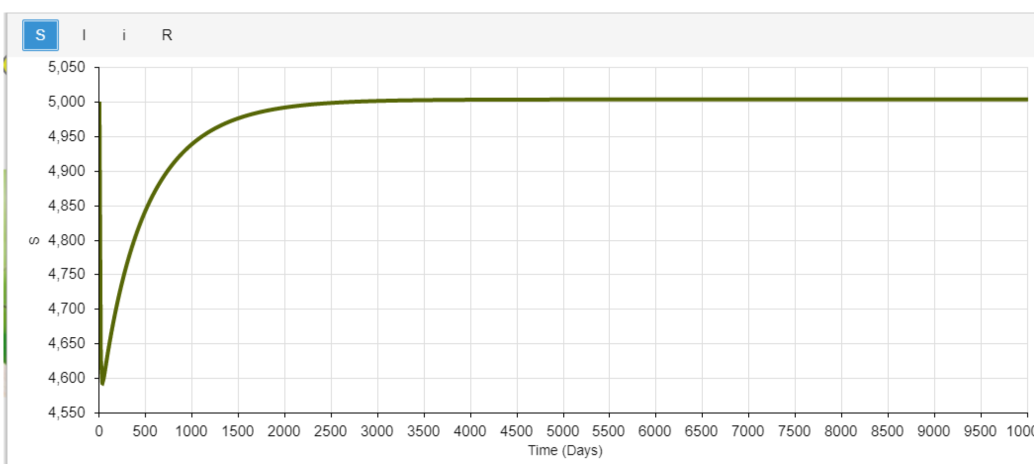
נבדוק מקרה שבו מתקיים תנאי ההיכחדות של המחלה:
נציב ערכים התחלתיים:

$$I = 3, S = 5000, i = 1200, R = 1000$$

כאשר מתקיים כי: $N = 5003, n = 2200$ מכאן לפי תנאי (9) מתקיים

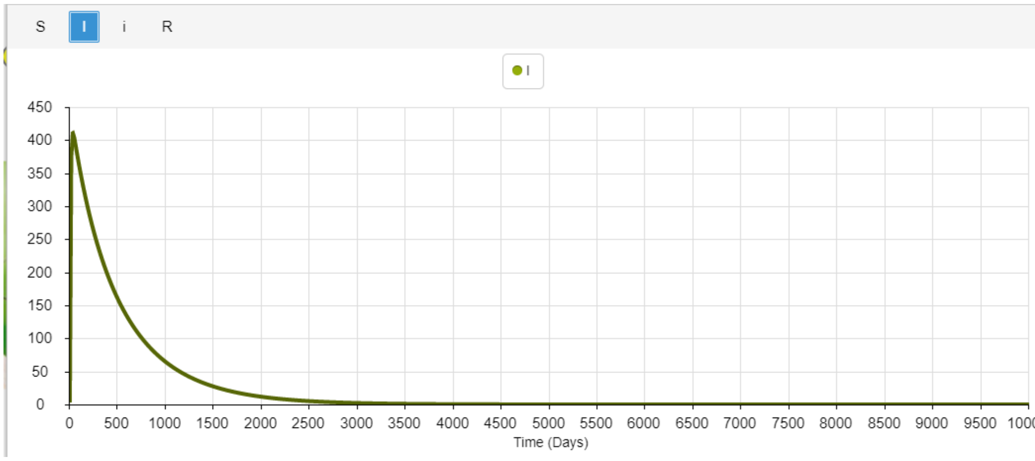
$$(1000 + 1200) < 0.5694 * (5000 + 3)$$

פלטי התוכנה:



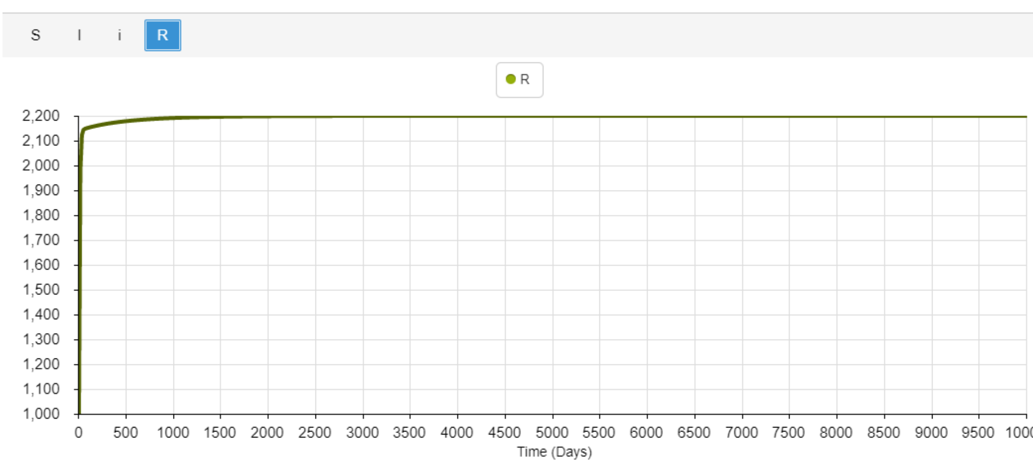
בני אדם בריאים

מכאן אנו רואים כי מספר בני האדם הבריאים חוזר למספרו ההתחלתי כי המחלה נכחדה וכפי שאמרנו כי במודל של רוס גודל האוכלוסיה נשאר קבוע.

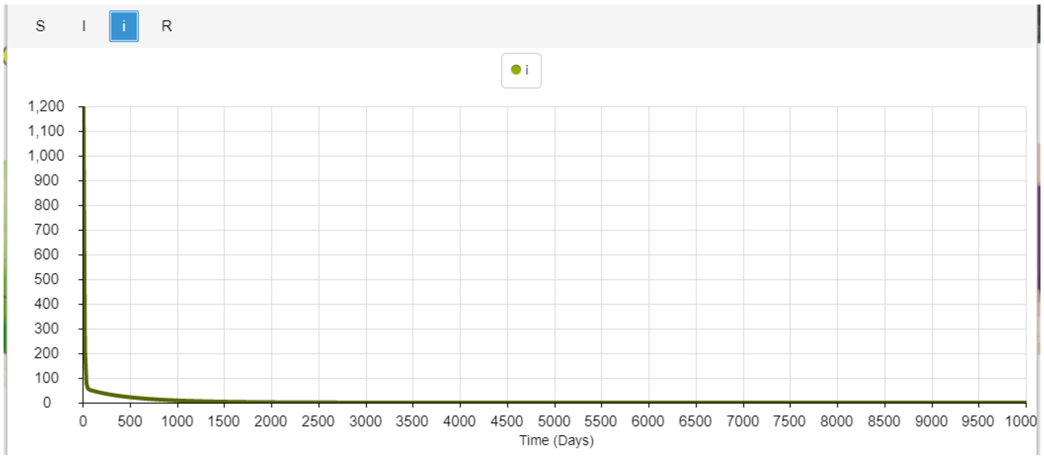


בני אדם חולים

* רואים כי בשיא המגפה היו 410 בני אדם חולים במחלה וזה קרה אחרי חודש מתחילת המגפה .
* המחלה נכחדה אחרי עשר שנים .



יתושים בריאים



יתושים חולים

אנו רואים ירידה ניכרת לאורך כל השנים במספר היתושים החולים וזה מעיד על היכחדות המחלה עם הזמן.

לפי מה שראינו התקיימה היכחדות למחלה כי התנאי של רוס התקיים.
תוצאות המודל אחרי עשר שנים.

$$I = 0, S = 5002.9999, i = 0, R = 2199.9999$$

ושתי האוכלוסיות הגיעו לשיווי משקל.

נציג כעת מקרה שבו תנאי ההיכחדות למחלה לא מתקיים נבחר:
$N = 5003, n = 20200$.
מכאן לפי תנאי (9) מתקיים

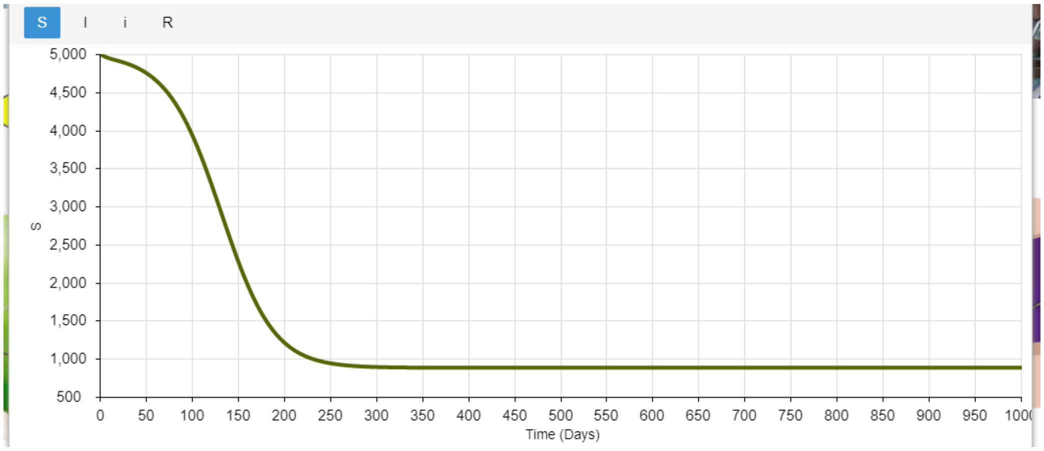
$$(20200) > 0.5694 * (5003)$$

ולכן המחלה לא תיכחד.

נציב כעת ערכים התחלתיים המתאימים למספרי האוכלוסיות שציינו לעיל

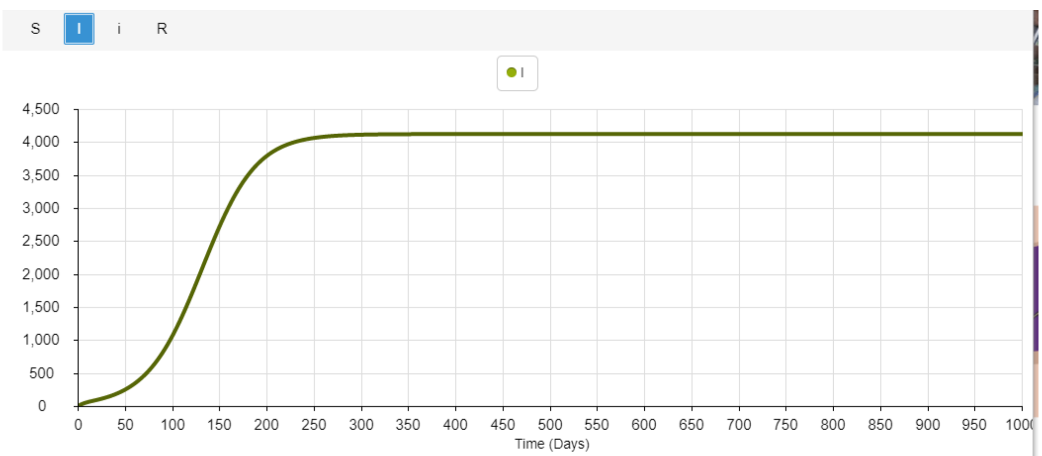
$$I = 3, S = 5000, i = 200, R = 20000$$

פלטי התוכנה:



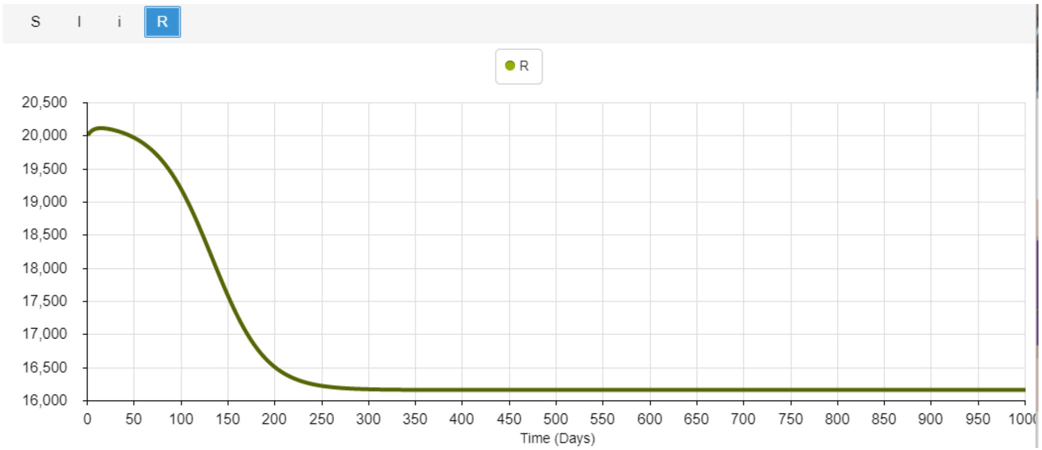
בני אדם בריאים

* כפי שרואים לפי הפלט מספר בני האדם הבריאים הגיע לשיווי משקל אחרי כ- 350 יום כלומר אחרי שנה בערך ומספרם 882.

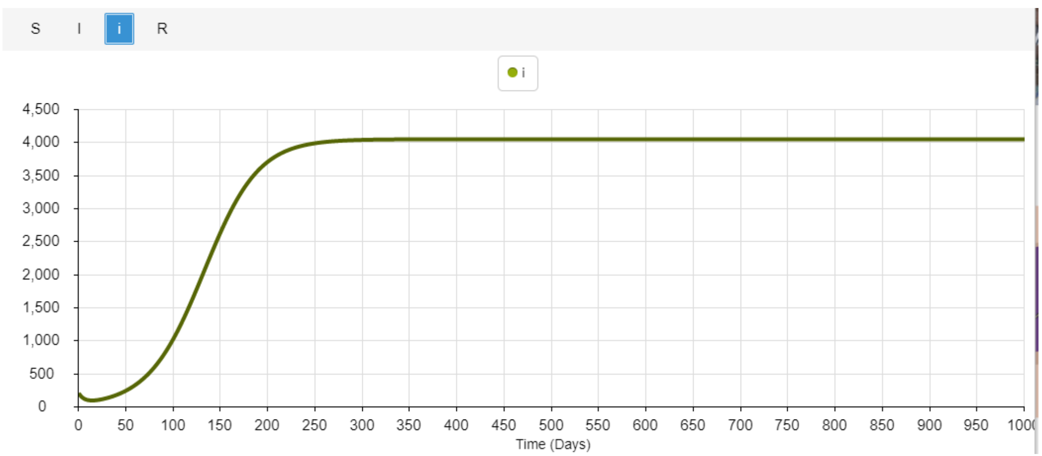


בני אדם חולים

* מספר בני האדם החולים הגיע לשיווי משקל אחרי שנה וערכו 4120 .



יתושים בריאים



יתושים חולים

כפי שרואים אין היכחדות למחלה והגיעה לשיווי משקל :

$$I = 4120.81, S = 882.18, i = 4043.65, R = 16,156.34$$

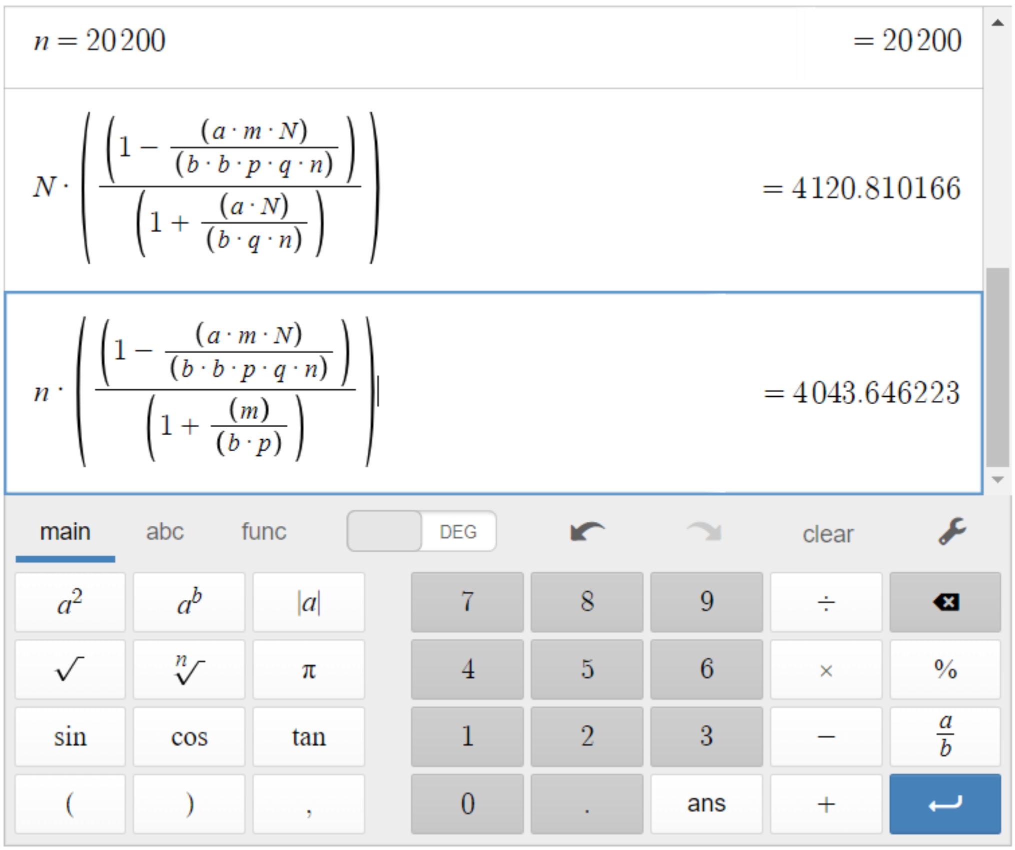
מכאן מתקיים כי :

$N = 5002.99, n = 20199.99$

* נבחין כי שתי האוכלוסיות שמרו על מספרם הקבוע ההתחלתי וזה כמובן יקרה אך ורק במודל סגור כמו המודל שאנו חוקרים.
כעת נבצע בדיקת נכונות התשובה ונציב את ערכי הפרמטרים במשוואות שיווי המשקל (7) ו (8) שמצאנו ונשווה את הערכים שיצאו.

נבצע חישוב מתמטי בעזרת תוכנת $desmos$ ונקבל את אותם הערכים שיצאו בסימולציות:
נסמן:

$$p' = q$$



בדיקת נכונות התשובה בתוכנת דיסמוס

4 מודל התפשטות מחלת המלריה של צ׳יטניס המודל המורכב

ד״ר נאקול צ׳יטניס הוא מדען ומתמטיקאי העובד וחוקר במכון רפואי בשוויץ הנקרא

Swiss Tph -Swiss Tropical and Public Health Institute. [10]

צ׳יטניס למד מתמטיקה שימושית וחקר בעיות רפואיות שונות מהם מחלת המלריה.
בחקירתו על מחלת המלריה בדק את השפעתם של פרמטרים שונים על המחלה כדי לבדוק באילו תנאים היא תיכחד [3] :
הפרמטרים שחקר הם:
*מספר עקיצות יתוש ליום.
*ההסתברות להעברת המחלה מיתוש לאדם.
*ההסתברות להעברת המחלה מאדם ליתוש.
*שיעור ילודה של יתושים.
*שיעור ההחלמה של בן אדם.
במסגרת עבודה זו בחרתי במודל בו צ׳יטניס חקר שני איזורים שונים המייצגים איזור בו כמות חולים גבוהה ואיזור בו כמות חולים נמוכה, כדי לבדוק את ההבדלים ביניהם.

צ׳יטניס חקר שתי קבוצות שונות של ערכי הפרמטרים, אחת עבור איזורים עם העברה גבוהה למחלה והשניה עבור העברה נמוכה, הוא העריך חלק מהפרמטרים באמצעות מחקרים שפורסמו ומנתונים של אזורי החקירה כגון שיעור ילודה ותמותה של בני אדם, שיעור הגירה וכו׳.
הוא בחן נתונים המייצגים כפרים עיירות קטנות או אזורים קטנים והניח כי באפריקה מתקיימת העברת מחלה גבוהה ובאסיה ובאמריקה העברת מחלה נמוכה ולכן הנתונים מותאמים לאזורים האלו.

במאמר זה צ׳יטניס לא חישב שיווי משקל של המערכת שבנה וזו הייתה אחת החקירות שאני עשיתי במודל זה.
המודל של צ׳יטניס יותר מציאותי מהמודל של רוס מהסיבות הבאות:

1- צ׳יטניס הניח כי יש תמותה וילודה של בני אדם ויתושים אך רוס הניח כי יש תמותה וילודה רק לאוכלוסיית היתושים.

2- צ׳יטניס הוסיף למודל שלו הגירה שלא קיימת במודל של רוס ומכאן אוכלוסיות בני האדם והיתושים לא נשארות קבועות כמו במודל של רוס.

3- פרמטרים של הילודה והתמותה שונים תחת ההנחה כי זה מדמה יותר טוב את המציאות ומבטיחה שהאוכלוסיות לא נשארות קבועות לאורך זמן.

4- צ'יטניס חילק את אוכלוסיית בני האדם לארבעה חלקים שונים.
*בני אדם בריאים
*בני אדם שנושאים במחלה אך עדיין לא חלו בה
*בני אדם חולים
*בני אדם שהבריאו
בשונה מרוס שחילק אותה לשניים
*בני אדם בריאים
*בני אדם חולים
חלוקת האוכלוסייה של צ'יטניס יותר מציאותית מרוס וככה אנו יכולים לקבל תוצאות יותר מדויקות לגבי התפשטות המחלה מאשר במודל של רוס.

5- צ'יטניס הוסיף פונקציה חדשה למודל שמחשבת את מספר בני האדם המתים ומחולקת לשני חלקים, בני אדם שמתים כתוצאה מהמחלה ובני אדם שמתים מוות טבעי.
מצד שני במודל של רוס לא היה פרמטר תמותה בקרב בני אדם, תחת ההנחה כי האוכלוסיה סגורה ומספרה נשאר קבוע.

6- צ'יטניס הניח במודל שלו כי בני אדם שהבריאו מהמחלה יהיו חסינים ממנה לתקופה מסויימת עד שהם יחזרו להיות חשופים למחלה ויוכלו לחלות בה שוב.
במודל של רוס, אין חסינות לבני אדם מהמחלה.

7- צ'יטניס הניח כי בני אדם גם מדביקים יתושים במחלה ברגע העקיצה שזה גם פרמטר חשוב מאוד במערכת שלו.

8- צ'יטניס הניח כי אחרי שבני האדם מבריאים הם עדיין נושאים את המחלה ויכולים להדביק יתושים.

9- הביטויים עבור מספר בני האדם שנעקצים ומועברת אליהם המחלה מחושבים בצורה שונה ויותר מציאותית מרוס שאותה אנו נסביר בהמשך.

ישנם עוד כמה הבדלים בין שני המודלים שאותם אנו נסביר בהמשך.

4.1 המודל

במודל שלו צ׳יטניס מחלק את אוכלוסיית בני האדם לארבע קבוצות שונות:

S_h -בני אדם חשופים למחלה כלומר בריאים
E_h -בני אדם שנעקצו ונושאים את המחלה אבל עדיין לא חולים ולכן גם אינם מדביקים יתושים.
I_h -בני אדם חולים במחלה
R_h - בני אדם שהבריאו מהמחלה אך עדיין נושאים אותה

מודל זה אינו מדמה אוכלוסיה סגורה כמו המודל של רוס כי צ׳יטניס הוסיף ילודה ותמותה לשתי האוכלוסיות וגם הגירה פנימה והחוצה מהאזור הנחקר ובכך הוא הפך את המודל שלו ליותר מציאותי.
כתוצאה מכך אוכלוסיות בני האדם והיתושים לא קבועות ומספרם משתנה עם הזמן.

צ׳יטניס חילק את אוכלוסיית היתושים לשלושה חלקים שונים והם:

S_v- יתושים חשופים למחלה
E_v-יתושים שעקצו בני אדם חולים ועברה אליהם המחלה אך עדיין לא חולים
I_v-יתושים חולים
אנו רואים כי במודל זה אין מחלקת יתושים שהבריאו מהמחלה וזה נובע מהנחה שתקופת החיים של היתושים היא קצרה מאוד ולכן כל יתוש שחלה במחלה מת עם המחלה ללא הבראה.

4.1.1 משוואות ופרמטרים

נציג כעת את המשוואות של המודל ונסביר את משמעותן:

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h + \Psi_h N_h + \rho_h R_h - \lambda_h(t) S_h - f_h(N_h) S_h \quad \textbf{(10)}$$

$$\frac{dE_h}{dt} = \lambda_h(t) S_h - V_h E_h - f_h(N_h) E_h \quad \textbf{(11)}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = V_h E_h - \gamma_h I_h - f_h(N_h) I_h - \delta_h I_h \quad \textbf{(12)}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \rho_h R_h - f_h(N_h) R_h \quad \textbf{(13)}$$

$$\frac{dS_v}{dt} = \Psi_v N_v - \lambda_v(t) S_v - f_v(N_v) S_v \quad \textbf{(14)}$$

$$\frac{dE_v}{dt} = \lambda_v(t) S_v - V_v E_v - f_v(N_v) E_v \quad \textbf{(15)}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = V_v E_v - f_v(N_v) I_v \quad \textbf{(16)}$$

כאשר:

$$N_h = S_h + E_h + I_h + R_h$$

אוכלוסיית בני אדם

$$N_v = S_v + E_v + I_v$$

אוכלוסיית יתושים

פונקציות המתארות תמותה של בני אדם ויתושים :

$$f_h(N_h) = \mu_{1h} + \mu_{2h}N_h$$

$$f_v(N_v) = \mu_{1v} + \mu_{2v}N_v$$

עוצמת ההדבקה מיתושים לבני אדם מתואר ע"י הביטוי:

$$\lambda_h = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} \cdot \beta_{hv} \cdot \frac{I_v}{N_v}$$

עוצמת ההדבקה מבני אדם ליתושים מתואר ע"י הביטוי:

$$\lambda_v = \frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} \cdot (\beta_{vh}\frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h})$$

הפרמטרים :

Λ_h - קצב ההגירה של בני אדם -יחידות –בני אדם/זמן

Ψ_h - שיעור ילודה לבני אדם - יחידות 1/זמן

Ψ_v - שיעור ילודה ליתושים - יחידות 1/זמן

σ_v - מספר עקיצות מקסימלי שיתוש אחד ירצה לעקוץ בני אדם ביחידת זמן - יחידות 1/זמן

σ_h - מספר עקיצות מקסימלי שאדם מקבל ביחידת זמן -יחידות 1/זמן

β_{hv} - ההסתברות שתעבור מחלה מיתוש חולה לבן אדם בריא עם העקיצה -חסר יחידות

β_{vh} - ההסתברות שתעבור מחלה מבן אדם חולה ליתוש בריא עם העקיצה - חסר יחידות

$\widehat{\beta_{vh}}$ - ההסתברות שתעבור מחלה מבן אדם שהבריא מהמחלה אך עדיין נושא אותה עם העקיצה - חסר יחידות

V_h - השיעור לבן אדם לעבור מנשא של המחלה לבן אדם חולה - יחידות 1/זמן

V_v - השיעור ליתוש אחד לעבור מנשא של המחלה ליתוש חולה - יחידות 1/זמן

γ_h - שיעור ההבראה לבן אדם - יחידות-1/זמן

δ_h - שיעור תמותה מהמחלה -יחידות 1/זמן

ρ_h - שיעור אבדן חסינות מהמחלה -יחידות 1/זמן
כך האדם מסיים את תקופת חסינותו מהמחלה וחוזר להיות חשוף עם האופציה לחזור לחלות בה

μ_{1h} - הגירה של בני אדם ללא תלות במחלה או בכמות האוכלוסייה -יחידות 1/זמן

μ_{2h} - שיעור תמותה של בני אדם כתלות בכמות האוכלוסייה - יחידות 1/זמן.בני אדם

μ_{1v} - הגירה של יתושים ללא תלות במחלה או גודל האוכלוסיה -יחידות 1/זמן

μ_{2v} - שיעור תמותה של יתושים כתלות באוכלוסייה - יחידות 1/זמן.יתושים

הערה: כל הפרמטרים חיוביים

נסביר כעת את הפונקציות המתארות את התמותה ואת פונקציות עוצמת ההדבקה:

$$f_h(N_h) = \mu_{1h} + \mu_{2h}N_h$$

פונקציה זו מחשבת את שיעור ההתמותה וההגירה לאדם כתלות באוכלוסיה וחלק ללא תלות באוכלוסייה.

$$f_v(N_v) = \mu_{1v} + \mu_{2h}N_v$$

פונקציה זו מחשבת את שיעור התמותה וההגירה ליתוש כתלות באוכלוסייה וחלק ללא תלות באוכלוסייה.

$$\lambda_h = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} . \beta_{hv} . \frac{I_v}{N_v}$$

משוואה זו מחשבת את הסיכוי של אדם בריא להידבק במחלה מיתוש ביחידת זמן כאשר הביטוי:

$$\frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h} = \frac{\sigma_v \sigma_h}{\sigma_v . (\frac{N_v}{N_h}) + \sigma_h} . N_v$$

מתאר את מספר העקיצות של יתושים לאדם אחד, תלוי באוכלוסיות משני הזנים. צ'יטניס בנה ביטוי זה כך שהוא יקיים את התנאים הבאים:

	Number of bites per human, b_h	Number of bites per mosquito, b_v	Total number of bites, b
General model	$\frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$	$\frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$	$\frac{\sigma_v N_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$
As $N_h \to \infty$ or $N_v \to 0$	$\frac{\sigma_v N_v}{N_h}$	σ_v	$\sigma_v N_v$
As $N_h \to 0$ or $N_v \to \infty$	σ_h	$\frac{\sigma_h N_h}{N_v}$	$\sigma_h N_h$

מספר עקיצות יתושים לבני אדם עם שינוי מספר האוכלוסיות

כמו שהסברנו לעיל צ׳יטניס ניסה לבנות מודל יותר מציאותי מאשר רוס.
לפי רוס מספר העקיצות של יתוש הוא קבוע אך צ׳יטניס לא הניח זאת אלא בנה משוואה שמחשבת את מספר העקיצות שיתוש עוקץ בפרק זמן המקיימת את התנאים הבאים:
צ׳יטניס רצה שמספר העקיצות ליתוש ישאף לקבוע כאשר אוכלוסיית בני האדם תשאף לאינסוף ושמספר עקיצות של יתוש ישאף לאפס כאשר אוכלוסיית בני האדם תשאף לאפס.
לכן ננסה לבנות פונקציה פשוטה לקיום התנאים הנ״ל:
מספר עקיצות ליתוש:

$$f(N_h) = \frac{C \cdot N_h}{N_h + A}$$

כאשר C ו A הם קבועים כלשהם.
מכאן נובע כי מספר עקיצות כולל הוא:

$$\frac{C \cdot N_h}{N_h + A} \cdot N_v$$

ומתקיים

$$\lim_{N_h \to \infty} \frac{C \cdot N_h}{N_h + A} = C = \sigma_v$$

ולכן מספר עקיצות לאדם:

$$\frac{N_v \cdot f(N_h)}{N_h} = \frac{C \cdot N_h}{N_h + A} \cdot \frac{N_v}{N_h} = \frac{C \cdot N_v}{N_h + A}$$

מצד שני צ׳יטניס רצה שכאשר אוכלוסיית היתושים תשאף לאינסוף אז מספר העקיצות לאדם ישאף לקבוע σ_h , כי לפי הטענה שלו כאשר אוכלוסיית היתושים תגדל אז ליתושים לא יהיה מספר רב של בני אדם לעקוץ ולכן יהיה מספר קבוע של בני אדם לכל יתוש שהוא יוכל לעקוץ.

נזכיר כי אצל רוס מספר העקיצות ישאף לאינסוף כי אצלו ישנו מספר קבוע לעקיצות של יתוש ואם מספר היתושים ישאף לאינסוף אז גם מספר העקיצות ישאף לאינסוף.
לכן צריך ש A יהיה פרופורציונלי ל - N_v ומכאן מתקיים:

$$A = \alpha \cdot N_v$$

ולכן מתקיים כי מספר העקיצות לאדם :

$$\frac{C \cdot N_v}{N_h + \alpha \cdot N_v} \tag{17}$$

ומתקיים:

$$\frac{C}{\alpha} = \sigma_h \longrightarrow \alpha = \frac{\sigma_v}{\sigma_h} = \lim_{N_v \to \infty} \frac{C \cdot N_v}{N_h + \alpha \cdot N_v} = \frac{C}{\alpha} = \sigma_h$$

נציב בחזרה בביטוי (17) ונקבל כי מספר עקיצות לאדם הוא :

$$\frac{\sigma_v \cdot N_v}{N_h + \frac{\sigma_v}{\sigma_h} \cdot N_v} = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$\lambda_v = \frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}.(\beta_{vh}\frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}}.\frac{R_h}{N_h})$$

משוואה זו מחשבת את הסיכוי של יתוש בריא להידבק במחלה ליחידת זמן מאדם חולה או אדם שהבריא אך עדיין נושא את המחלה.
כאשר:

$$\frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

מספר עקיצות שיתוש אחד עוקץ ביחידת זמן

$$\frac{I_h}{N_h}$$

ההסתברות שהאדם שנעקץ הוא חולה.

$$\beta_{vh}$$

ההסתברות להעברת המחלה מאדם חולה ליתוש בריא.

$$\frac{R_h}{N_h}$$

ההסתברות שהאדם שנעקץ נושא את המחלה

$$\widehat{\beta_{vh}}$$

ההסתברות שתעבור המחלה מאדם שהבריא אך נושא את המחלה ליתוש בריא .

4.1.2 הסבר המשוואות הדיפרנציאליות

משוואה (10):

$$\frac{dS_h}{dt} = \Lambda_h + \Psi_h N_h + \rho_h R_h - \lambda_h(t) S_h - f_h(N_h) S_h$$

משוואה זו מחשבת את השתנות מספר בני האדם הבריאים ומורכבת מחמישה איברים:
האיבר הראשון הוא ההגירה כלומר צ׳יטניס מוסיף את מספר האנשים המהגרים לאזור הנחקר כאנשים בריאים.
איבר שני הוא ילודה: שיעור הילודה כפול מספר האנשים באוכלוסייה.
איבר שלישי מוסיף את מספר האנשים שאיבדו חסינות מהמחלה וחוזרים להיות חשופים לה.
איבר רביעי מוריד ממספרם את בני האדם הנעקצים ועברה אליהם מחלת המלריה.
איבר חמישי ואחרון מוריד את מספר בני האדם המהגרים מהאוכלוסיה או מתים.

משוואה (11):

$$\frac{dE_h}{dt} = \lambda_h(t) S_h - V_h E_h - f_h(N_h) E_h$$

משוואה זו מחשבת את השתנות מספר האנשים הנגועים במחלה כלומר אנשים שנעקצו ע״י יתושים והמחלה הועברה אליהם אך המחלה עדיין בתקופת דגירה והם עדיין לא חולים, משוואה זו מורכבת משלושה איברים:
איבר ראשון מספר האנשים שהועברו מקבוצת הבריאים, האיבר השני מוריד את מספר האנשים שסיימו את תקופת דגירת המחלה ועברו לקבוצת האנשים החולים, איבר שלישי מוריד את מספר האנשים המהגרים או מתים מקבוצת בני אדם זו.

משוואה (12):

$$\frac{dI_h}{dt} = V_h E_h - \gamma_h I_h - f_h(N_h) I_h - \delta_h I_h$$

משוואה זו מחשבת את מספר האנשים החולים באוכלוסייה והיא מורכבת מארבעה איברים:
איבר ראשון מוסיף את מספר האנשים שהפכו להיות חולים אחרי תקופת הדגירה, איבר שני מורידים את מספר בני האדם שהבריאו מהמחלה, איבר שלישי מוריד את מספר בני האדם שמתו מוות טבעי לא כתוצאה מהמחלה וכמובן גם מי שהיגר מחוץ

לאוכלוסייה בתקופת מחלתו, איבר רביעי ואחרון מוריד את מספר בני האדם שמתו כתוצאה מהמחלה.

משוואה (13):

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \rho_h R_h - f_h(N_h)R_h$$

משוואה זו מחשבת את מספר בני האדם שהבריאו מהמחלה אך עדיין נושאים אותה והיא מורכבת משלושה איברים:
איבר ראשון הוא מספר האנשים שהבריאו מהמחלה, איבר שני מספר בני האדם שאיבדו את חסינותם מהמחלה וחזרו להיות חשופים לה ואיבר שלישי מספר בני האדם שמתים או מהגרים מהאזור הנחקר.

משוואה (14):

$$\frac{dS_v}{dt} = \Psi_v N_v - \lambda_v(t)S_v - f_v(N_v)S_v$$

משוואה זו מחשבת את מספר היתושים החשופים למחלה והיא מורכבת משלושה איברים:
איבר ראשון הוא שיעור הילודה של יתושים כפול גודל האוכלוסיה, איבר שני מוריד את מספר היתושים שעברה אליהם המחלה, איבר שלישי מספר היתושים המתים או מהגרים מהאזור הנחקר.

משוואה (15):

$$\frac{dE_v}{dt} = \lambda_v(t)S_v - V_v E_v - f_v(N_v)E_v$$

משוואה זו מחשבת את מספר היתושים הנושאים את המחלה אך עדיין לא חלו בה והיא מורכבת משלושה איברים:
איבר ראשון מספר היתושים שעקצו בן אדם חולה ועברה אליהם המחלה, איבר שני מורידים את מספר היתושים שהסתיימה תקופת הדגירה בגופם והפכו להיות חולים, באיבר שלישי מוריד את מספר היתושים המתים או המהגרים מהאזור הנחקר.

משוואה (16):

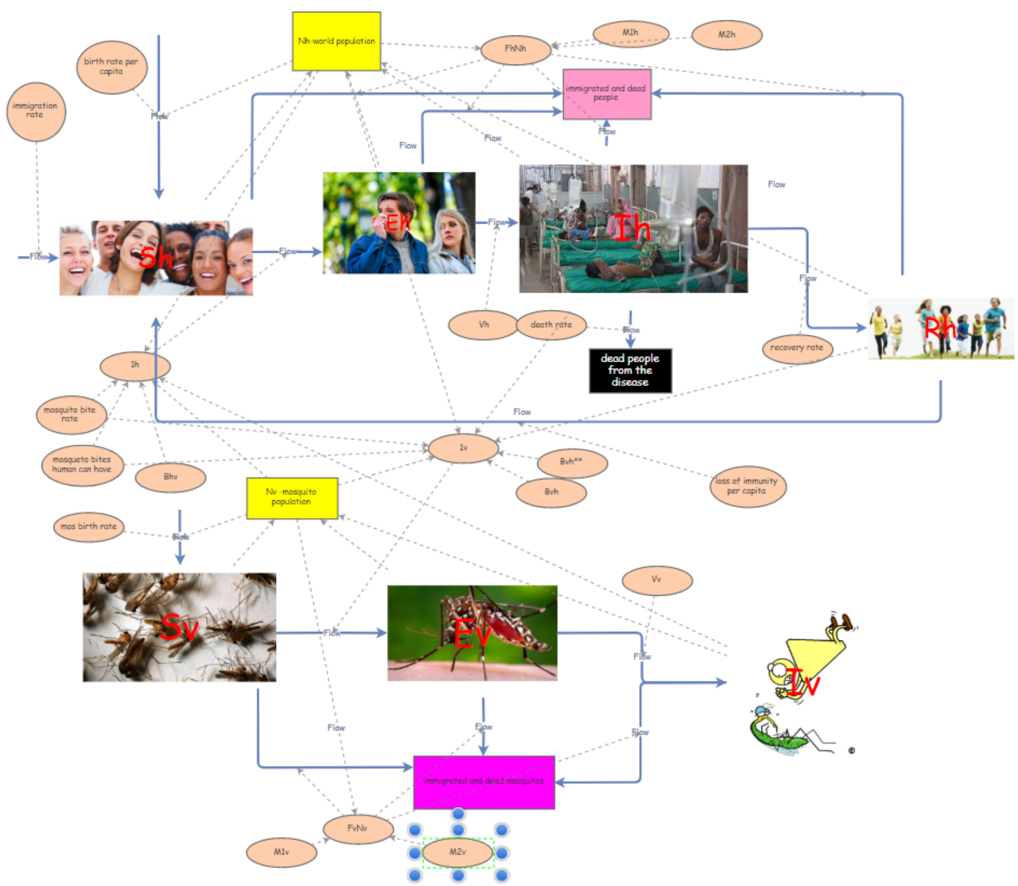
$$\frac{dI_v}{dt} = V_v E_v - f_v(N_v)I_v$$

משוואה זו מחשבת את מספר היתושים החולים באוכלוסייה ומורכבת משני איברים: איבר ראשון מוסיפים את מספר היתושים שהפכו להיות חולים אחרי תקופת דגירה של המחלה ואיבר שני מורידים את מספר היתושים המתים או המהגרים מהאזור הנחקר .

4.2 סימולציות של המודל של צ'יטניס

בחקירתו צ'יטניס ניתח שני סוגי אזורים שונים:
סוג ראשון אשר בו העברת המחלה גבוהה והסוג השני שבו כהעברת המחלה נמוכה.
מטרתו היא לבדוק את התפשטות המחלה באזורים אלו ולבדוק את השפעת הפרמטרים על התפשטות המחלה.
הוא העריך חלק מהפרמטרים באמצעות מחקרים שפורסמו ומנתונים באזורים הנחקרים כגון שיעור ילודה ותמותה של בני אדם, שיעור הגירה וכו'.
הוא בחן נתונים המייצגים כפרים עיירות קטנות או אזורים קטנים והוא הניח כי:
באפריקה מתקיימת העברת מחלה גבוהה ובאסיה ובאמריקה העברת מחלה נמוכה, ולכן הנתונים מותאמים לאזורים אלו.

נבנה את המודל בתוכנה:



המודל של צ'יטניס

ניתן לראות את המודל בקישור הבא:

https://insightmaker.com/insight/152820/malaria-model-low-transmission

4.2.1 סימולציות עבור אזור עם העברה נמוכה

ערכי הפרמטרים :

PARAMETER	VALUE	DIMENSION
Λ_h	**0.041**	$\frac{humans}{day}$
Ψ_h	**(5.5).10^{-5}**	$\frac{humans}{day}$
Ψ_v	**0.13**	$\frac{1}{day}$
σ_v	**0.33**	$\frac{1}{day}$
σ_h	**4.3**	$\frac{1}{day}$
β_{hv}	**0.022**	DIMENSIONLESS
β_{vh}	**0.24**	DIMENSIONLESS
$\widehat{\beta_{vh}}$	**0.024**	DIMENSIONLESS
$\mathbf{V}_h$	**0.10**	$\frac{1}{day}$
$\mathbf{V}_v$	**0.083**	$\frac{1}{day}$
γ_h	**0.0035**	$\frac{1}{day}$
δ_h	**(1.8).10^{-5}**	$\frac{1}{day}$
ρ_h	**(2.7).10^{-3}**	$\frac{1}{day}$

μ_{1h} - $(8.8).10^{-7}\frac{1}{day}$

μ_{2h} - $(2.0).10^{-7}\frac{humans}{day}$

μ_{1v} - $0.033\frac{1}{day}$

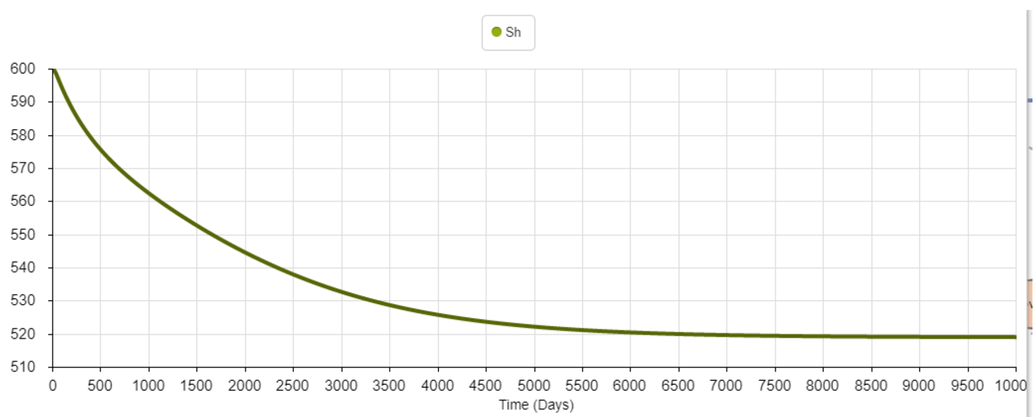
μ_{2v} - $(4.0).10^{-5}\frac{mosquitoes}{day}$

תנאי התחלה:

פה צ׳יטניס לקח תנאי התחלה שמתאימים לכפרים קטנים באסיה או דרום אמיריקה כך שמספר החולים בהם הוא קטן.

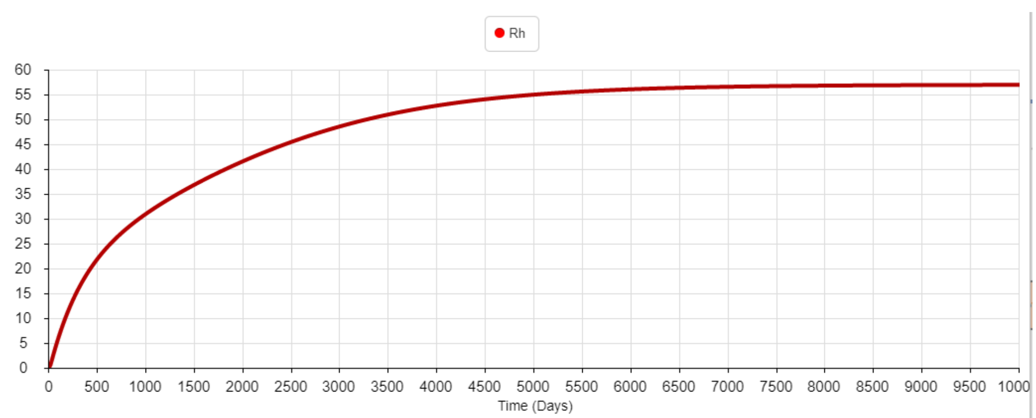
$S_h = 600, E_h = 20, I_h = 3, R_h = 0, S_v = 2400, E_v = 30, I_v = 5$
ומכאן מתקיים כי:
$N_h = 623, N_v = 2435$

פלטי התוכנה :
כאשר נציב:
$\Lambda_h = 0$ כלומר מאפסים את ההגירה.
$\delta_h = 0$ כלומר מאפסים את התמותה מהמחלה.
פלט עבור S_h



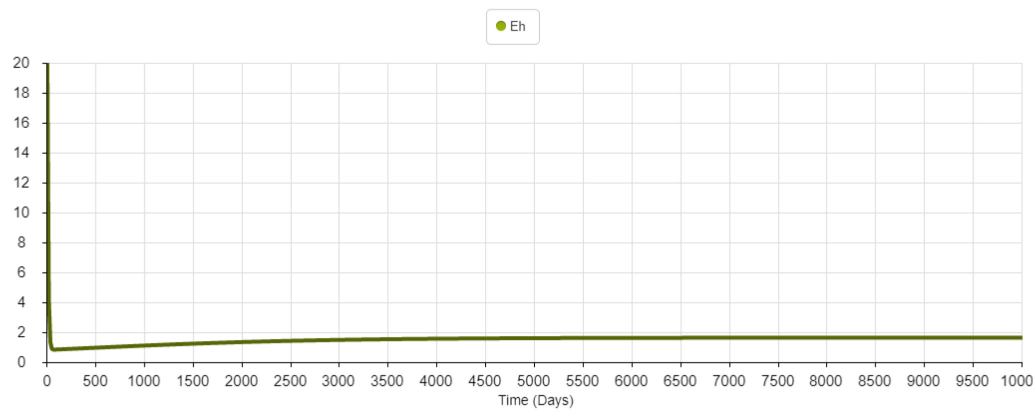
בני אדם בריאים

פלט עבור R_h



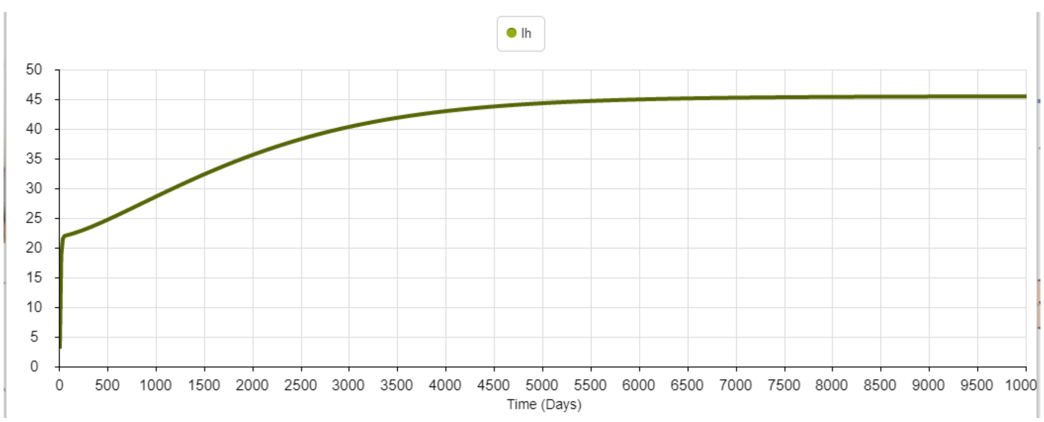
בני אדם שהבריאו מהמחלה

פלט עבור E_h



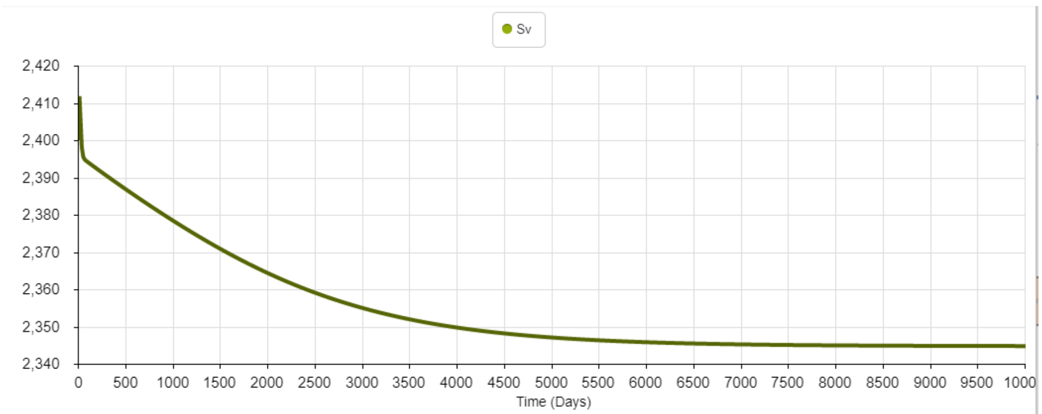
בני אדם נושאים את המחלה

פלט עבור I_h



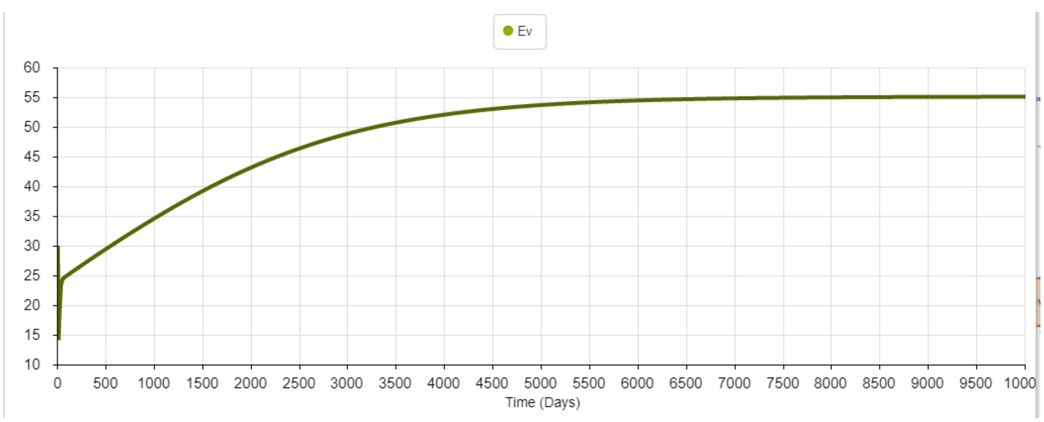
בני אדם חולים

פלט עבור S_v



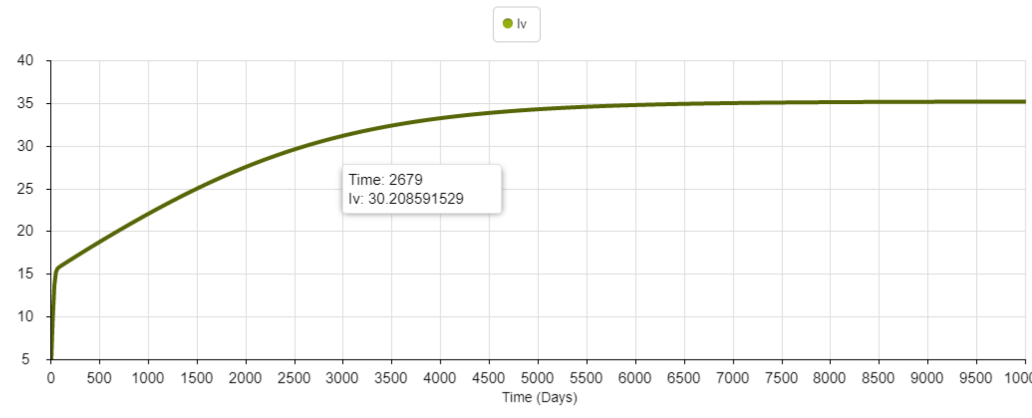
יתושים בריאים

פלט עבור E_v



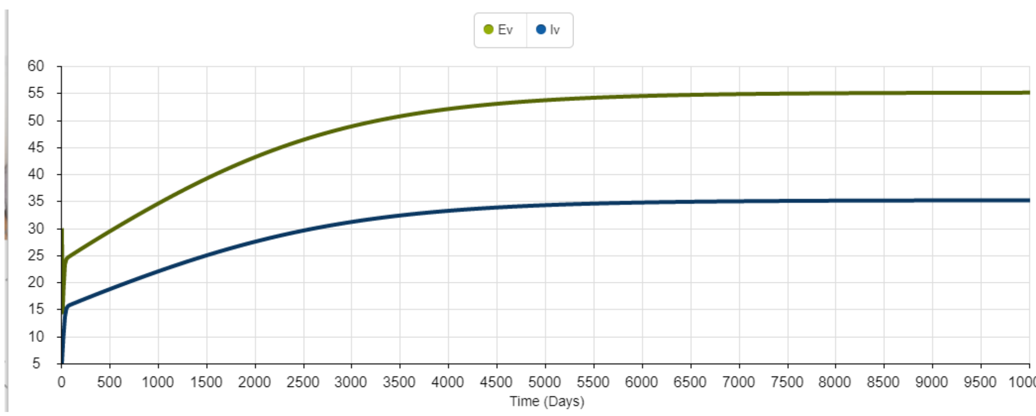
יתושים נושאים את המחלה

פלט עבור I_v



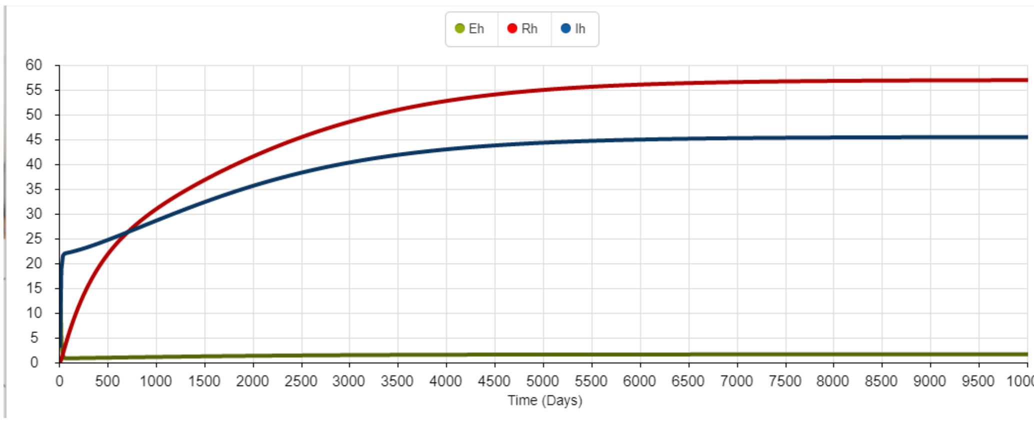
יתושים חולים

פלט עבור $I_v - -E_v$



פלט לאוכלוסיית היתושים כנגד זמן

פלט עבור $I_h - -E_h - -R_h$



פלט לאוכלוסיית בני אדם עם הזמן

קיבלנו כי :

$$S_h = 518.96, E_h = 1.63, I_h = 45.46, R_h = 56.93, S_v = 2344.76, E_v = 55.07$$

$$I_v = 35.16$$

ומכאן מתקיים:

$$N_h = 622.98, N_v = 2434.99$$

רואים כי האוכלוסייה נשארה קבועה וזה אמור להתקיים כי איפסנו את ההגירה ואת התמותה מהמחלה וקיימנו את כל התנאים למודל סגור ולכן האוכלוסייה הכוללת לא השתנתה.

סיכום תוצאות הסימולציות :

* כמו שרואים לפי הפלטים המערכת הגיעה לשיווי משקל אחרי כ 8000 ימים כלומר כמעט אחרי 21 שנה אך המחלה לא נכחדה וכמות החולים שואפת לקבוע

* אחוז האנשים החולים בכל רגע נתון בשיווי משקל מחושב בצורה הבאה:

$$\frac{45.46}{623} * 100 = 7.29\%$$

4.2.2 סימולציות עבור אזור עם העברה גבוהה

ערכי הפרמטרים לפי הערכתו של צ׳יטניס:

PARAMETER	VALUE	DIMENSION
Λ_h	**0.033**	$\frac{humans}{day}$
Ψ_h	$\mathbf{(1.1).10^{-4}}$	$\frac{humans}{day}$
Ψ_v	**0.13**	$\frac{1}{day}$
σ_v	**0.50**	$\frac{1}{day}$
σ_h	**19**	$\frac{1}{day}$
β_{hv}	**0.022**	DIMENSIONLESS
β_{vh}	**0.48**	DIMENSIONLESS
$\widehat{\beta_{vh}}$	**0.048**	DIMENSIONLESS
$\mathbf{V}_h$	**0.10**	$\frac{1}{day}$
$\mathbf{V}_v$	**0.091**	$\frac{1}{day}$
γ_h	**0.0035**	$\frac{1}{day}$
δ_h	$\mathbf{(9.0).10^{-5}}$	$\frac{1}{day}$
ρ_h	$\mathbf{(5.5).10^{-4}}$	$\frac{1}{day}$

μ_{1h}-$(1.6).10^{-5}\frac{1}{day}$

μ_{2h}-$(3.0).10^{-7}\frac{human}{day}$

μ_{1v}-$0.033\frac{1}{day}$

μ_{2v}-$(2.0).10^{-5}\frac{mosquitoes}{day}$

לפי מה שרואים רוב הפרמטרים השתנו חוץ מארבעה שנשארו אותו דבר והם:
$\psi_v = 0.13, \beta_{hv} = 0.022, \gamma_h = 0.0035, \mu_{1v} = 0.033$

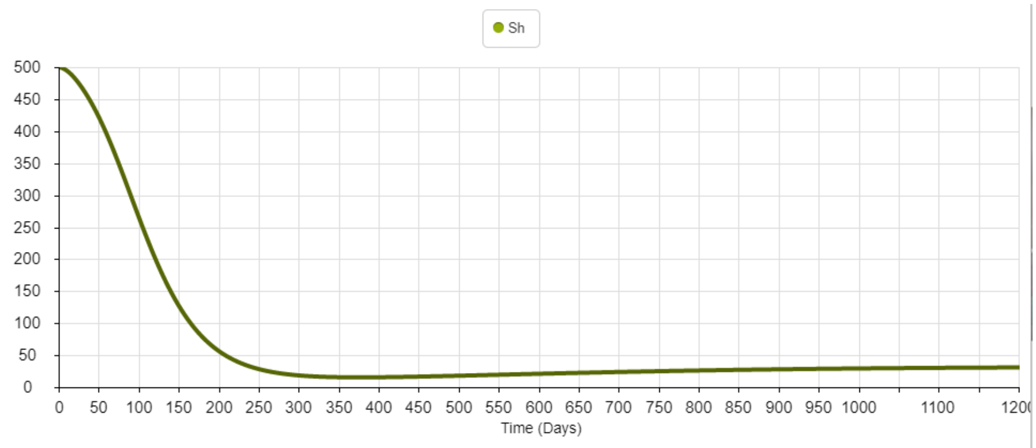
כאשר תנאי ההתחלה:
$S_h = 500, E_h = 10, I_h = 30, R_h = 0, S_v = 4000, E_v = 100, I_v = 50$
פה צ׳יטניס לקח נתונים של כפר באפריקה אזור עם העברה גבוהה למחלה

פלטי התוכנה :

כאשר נציב:

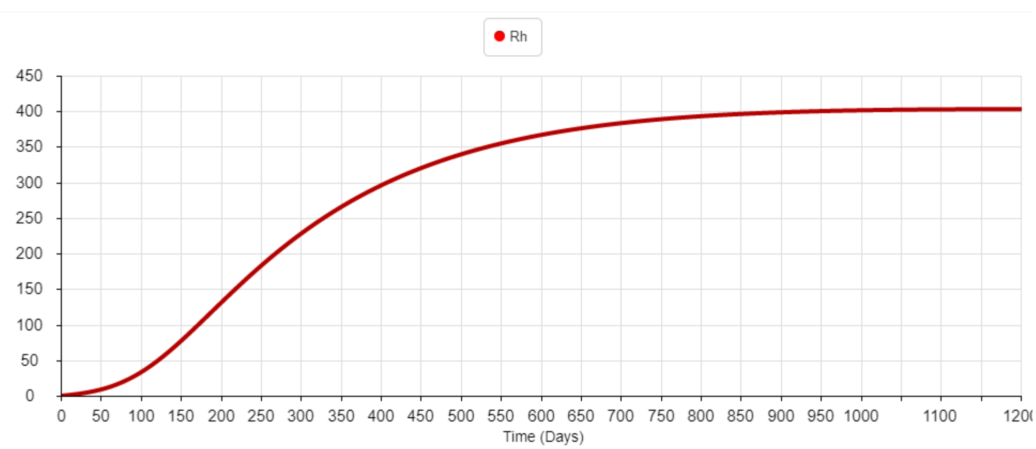
$\delta_h = 0$, $\Lambda_h = 0$

פלט עבור S_h



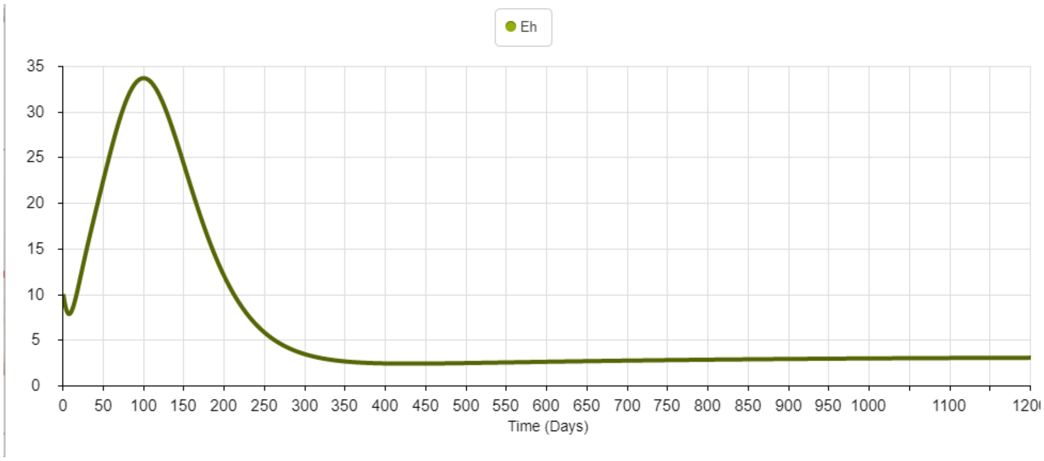
בני אדם בריאים

פלט עבור R_h



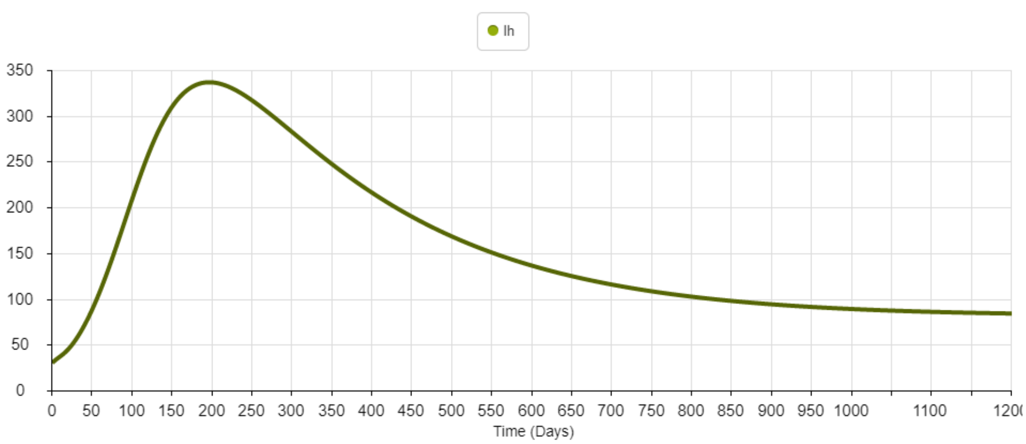
בני אדם שהבריאו מהמחלה

פלט עבור E_h



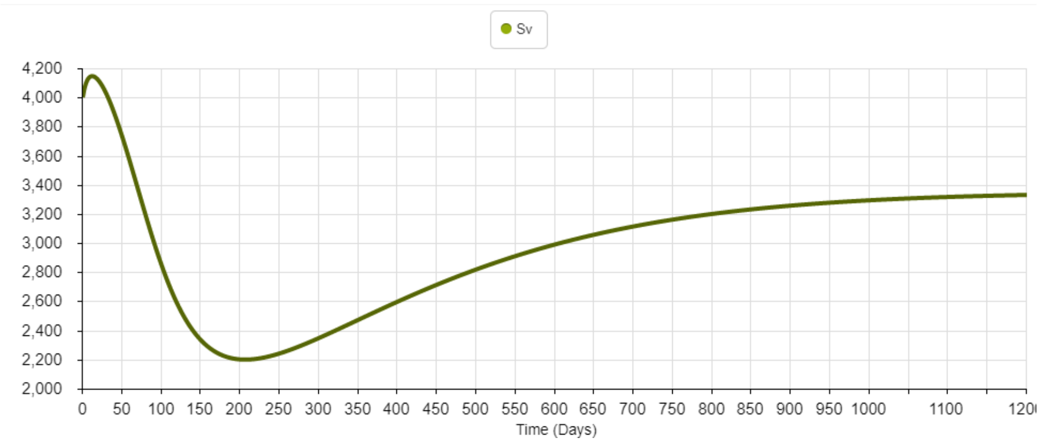
בני אדם נושאים את המחלה

פלט עבור I_h



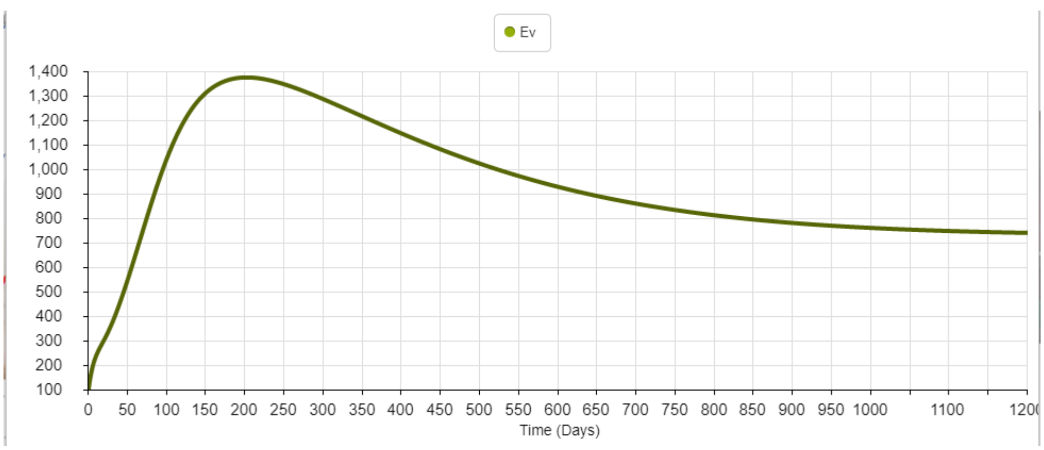
בני אדם חולים

פלט עבור S_v



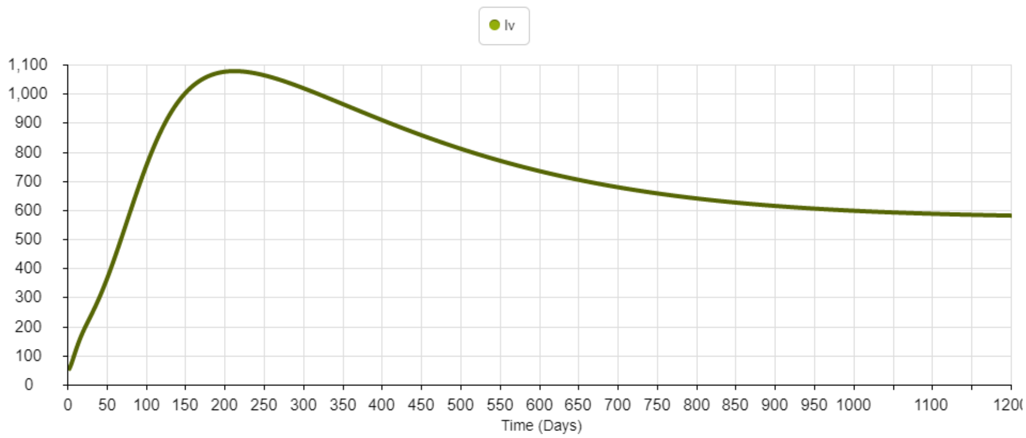
יתושים בריאים

פלט עבור E_v



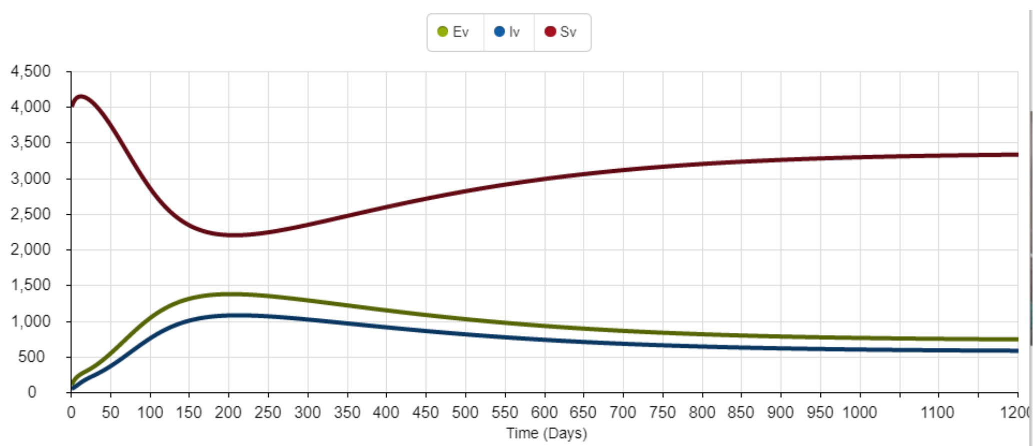
יתושים נושאים את המחלה

פלט עבור I_v



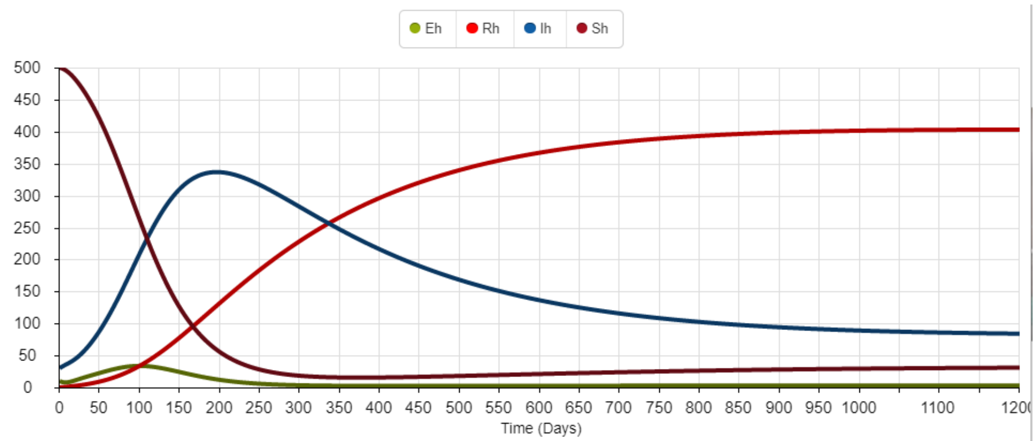
יתושים חולים

פלט עבור $I_v - -E_v - -S_v$



פלט לאוכלוסיית היתושים כנגד זמן

פלט עבור $I_h - -E_h - -R_h - -S_h$



פלט לאוכלוסיית בני אדם עם הזמן

קיבלנו כי:

$$S_h = 39.85, E_h = 2.99, I_h = 82.19, R_h = 414.93$$

$$S_v = 3070.104, E_v = 635.25, I_v = 444.67$$

ומכאן מתקיים:

$$N_h = 539.96, N_v = 4150.024$$

סיכום תוצאות:

רואים כי שיא המגפה קרה אחרי 228 יום וברגע השיא היו 315 חולים כי לפי הגרף אחרי זמן זה המספר יורד עם הזמן.
אחוז האנשים החולים בכל רגע נתון בשיווי משקל נחשב בצורה הבאה:

$$\frac{82}{540}.100 = 15.18\%$$

בהשוואה עם אזור העברה נמוך אחוז החולים גדול פי שניים מאזור עם העברה גבוהה.

4.3 חישוב אנליטי של שיווי משקל של המודל

כעת נחשב בצורה אנליטית שיווי משקל של המודל תחת ההנחות הבאות:

1.נניח כי שיעור ילודה שווה לשיעור תמותה של בני אדם ונסמנו ב p
כלומר:

$$\psi_h = p, f_h(N_h) = p$$

כלומר נניח כי מתקיים:

$$\mu_{1h} = p, \mu_{2h} = 0$$

2.נניח כי שיעור תמותה שווה לשיעור ילודה של יתושים ונסמנו ב q
כלומר: $\psi_v = p, f_v(N_v) = q$
כלומר נניח כי מתקיים:

$$\mu_{1v} = q, \mu_{2v} = 0$$

3. נאפס את ההגירה תחת ההנחה כי גודל האוכלוסיה קבוע כלומר $\Lambda_h = 0$

4. נאפס את התמותה מחמחלה כלומר נציב $\delta_h = 0$

5. נסמן ב:

$$\lambda_h = M = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$\lambda_v = W = \frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

אחרי הצבת חמשת ההנחות לעיל במשוואות המודל נקבל את מערכת המשוואות הנ"ל עבור שיווי המשקל:

$$pN_h + \rho_h R_h - M(\frac{\beta_{hv}}{N_v} \cdot I_v) \cdot S_h - pS_h = 0 \qquad (18)$$

$$M \cdot (\frac{\beta_{hv}}{N_{v\ v}}) \cdot S_h - V_h \cdot E_h - p \cdot E_h = 0 \qquad \textbf{(19)}$$

$$V_h \cdot E_h - \gamma_h \cdot I_h - p \cdot I_h = 0 \qquad \textbf{(20)}$$

$$\gamma_h \cdot I_h - \rho_h \cdot R_h - p \cdot R_h = 0 \qquad \textbf{(21)}$$

הערה: קל לראות כי אם סוכמים את ארבעת המשוואות הנ"ל אנו מקבלים אפס ובכך אנו מקבלים מודל סגור כמו במודל של רוס ומתקיים כי שתי האוכלוסיות N_v, N_h נשארות קבועות ולא משתנות עם הזמן.

פתרון המערכת :
ממשוואה (21) **מקבלים:**

$$R_h = \frac{\gamma_h}{\rho_h + p} \cdot I_h$$

ממשוואה (20) **מקבלים:**

$$E_h = \frac{\gamma_h + p}{V_h} \cdot I_h$$

ממשוואה (19) **מקבלים:**

$$S_h = \frac{(V_h + P) \cdot N_v}{M \cdot I_v \cdot \beta_{hv}} \cdot \frac{\gamma_h + P}{V_h} \cdot I_h$$

נציב את התוצאות של שלושת המשוואות בתוך משוואה (18) **ומקבלים:**

$$P \cdot N_h + \frac{\rho_h \cdot \gamma_h}{\rho_h + P} \cdot I_h - (V_h + P) \cdot \left(\frac{\gamma_h + P}{V_h}\right) \cdot I_h - P \cdot \left(\frac{(V_h + P) \cdot N_v}{M \cdot I_v \cdot \beta_h - v} \cdot \frac{\gamma_h + P}{V_h} \cdot I_h\right) = 0$$

מסקנה:
קבלנו משוואה עם שני נעלמים והם I_h **ו** I_v

כעת ננתח את מערכת המשוואות של אוכלוסיית היתושים:

$$q \cdot N_v - W\left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h}\right) \cdot S_v - q \cdot S_v = 0 \tag{22}$$

$$W\left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h}\right) \cdot S_v - V_v \cdot E_v - q \cdot E_v = 0 \tag{23}$$

$$V_v E_v - q I_v = 0 \tag{24}$$

ממשוואה (24) **מקבלים:**

$$E_v = \frac{q}{V_v} \cdot I_v$$

ממשוואה (23) **מקבלים:**

$$I_v = \frac{W\left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h}\right) \cdot V_v}{(V_v + q) \cdot q} \cdot S_v$$

ממשוואה (22) **מקבלים:**

$$S_v = \frac{q \cdot N_v}{q + W \cdot \left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h}\right)}$$

נציב את (22) **בתוך** (23) **ומקבלים:**

$$I_v = \frac{W\left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{(\frac{\gamma_h}{\rho_h + P} \cdot I_h)}{N_h}\right) V_v}{(V_v + q) \cdot q} \cdot \frac{q.N_v}{q + W \cdot \left(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{(\frac{\gamma_h}{\rho_h + P} \cdot I_h)}{N_h}\right)}$$

מסקנה:
קבלנו משוואה עם שני נעלמים והם I_h ו I_v.
קיבלנו מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים:

$$1) p\cdot N_h+\frac{\rho_h\cdot\gamma_h}{\rho_h+p}\cdot I_h-(V_h+p)\cdot(\frac{\gamma_h+p}{V_h})\cdot I_h-p\cdot\left(\frac{(V_h+p)\cdot N_v}{M\cdot I_v\cdot\beta_{hv}}\cdot\frac{\gamma_h+p}{V_h}\cdot I_h\right)=0$$

$$2) I_v=\frac{W\left(\beta_{vh}\cdot\frac{I_h}{N_h}+\widehat{\beta_{vh}}\cdot\frac{(\frac{\gamma_h}{\rho_h+p}\cdot I_h)}{N_h}\right)V_v}{(V_v+q)\cdot q}\cdot\frac{q\cdot N_v}{q+W\cdot\left(\beta_{vh}\cdot\frac{I_h}{N_h}+\widehat{\beta_{vh}}\cdot\frac{(\frac{\gamma_h}{\rho_h+p}\cdot I_h)}{N_h}\right)}$$

כדי לפתור אותן נסמן ראשית:

$$X=\frac{W\cdot\beta_{vh}}{N_h}+\frac{W\cdot\widehat{\beta_{vh}}\cdot\gamma_h}{(\rho_h+p)N_h}$$

$$Y=\frac{(V_h+p)\cdot(\gamma_h+p)}{V_h}$$

ומכאן נקבל שתי משוואות חדשות:

$$1) p\cdot N_h\cdot M\cdot\beta_{hv}+(\frac{\rho_h\cdot\gamma_h}{\rho_h+p}-Y)\cdot M\cdot\beta_{hv}\cdot I_h-p\cdot N_v\cdot Y\cdot\frac{I_h}{I_v}=0$$

$$2) (V_v\cdot q^2+q^3)+(V_v\cdot q\cdot X+q^2\cdot X)\cdot I_h-(V_v\cdot q\cdot X\cdot N_v)\cdot\frac{I_h}{I_v}=0$$

פותרים שתי משוואות עם שני נעלמים.

מקבלים שני פתרונות אפשריים:
פתרון טריוויאלי כאשר: $I_h=0, I_v=0$
פתרון לא טריוויאלי:

$$I_h=\frac{V_v\cdot q\cdot N_v\cdot X\cdot p\cdot N_h.M\cdot\beta_{hv}-(p\cdot Y\cdot N_v)\cdot(V_v\cdot q^2+q^3)}{p\cdot Y\cdot N_v\cdot(V_v\cdot q\cdot X+q^2\cdot X)-(V_v\cdot q\cdot N_v\cdot X)\cdot(\frac{\rho_h\cdot\gamma_h}{\rho_h+P}-Y)\cdot M\cdot\beta h_v}$$

אחרי צמצום נקבל סופית כי :

$$I_h = \frac{V_v \cdot X \cdot p \cdot N_h \cdot M \cdot \beta_{hv} - p \cdot Y \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{p \cdot Y \cdot (V_v \cdot X + q \cdot X) - V_v \cdot X \cdot (\frac{\rho_h \cdot \gamma_h}{\rho_h + p} - Y) \cdot M \cdot \beta h_v}$$

$$I_v = \frac{(V_v \cdot q \cdot N_v \cdot X) \cdot I_h}{(V_v \cdot q^2 + q^3) + (V_v \cdot q \cdot X + q^2 \cdot X) \cdot I_h}$$

שיווי משקל של המודל עם אוכלוסייה סגורה:
נחקור את המודל כאשר האוכלוסייה תהיה סגורה כלומר אין הגירה ואין תמותה מהמחלה.
נבדוק את נקודת שיווי המשקל בעזרת תוכנת $insightmaker$, נבנה כלי שמחשב את שיווי המשקל של המערכת בעזרת הנוסחה שמצאנו:

$$I_h = \frac{(V_v \cdot X).(p \cdot N_h \cdot M \cdot \beta_{hv}) - (p \cdot Y) \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{(p \cdot Y) \cdot (V_v \cdot X + q \cdot X) - (V_v \cdot X) \cdot (\frac{\rho_h \cdot \gamma_h}{\rho_h + p} - Y) \cdot M \cdot \beta h_v}$$

$$I_v = \frac{(V_v \cdot q \cdot N_v . X) \cdot I_h}{(V_v \cdot q^2 + q^3) + (V_v \cdot q \cdot X + q^2 \cdot X) \cdot I_h}$$

$$R_h = \frac{\gamma_h}{\rho_h + P} \cdot I_h$$

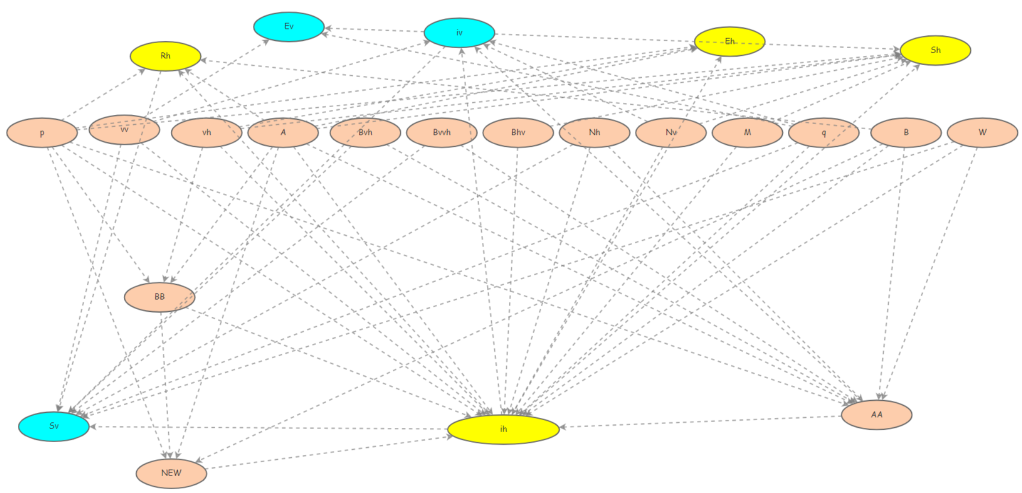
$$E_h = \frac{\gamma_h + P}{V_h} \cdot I_h$$

$$S_h = \frac{(V_h + P) \cdot N_v}{M \cdot I_v \cdot \beta_{hv}} \cdot \frac{\gamma_h + P}{V_h} \cdot I_h$$

$$E_v = \frac{q}{V_v} \cdot I_v$$

$$S_v = \frac{q \cdot N_v}{q + W(\beta_{vh} \cdot \frac{I_h}{N_h} + \widehat{\beta_{vh}} \cdot \frac{R_h}{N_h})}$$

כלי לחישוב שיווי משקל :



כלי לחישוב שיווי משקל עם העברה גבוהה למחלה

https://insightmaker.com/insight/166465/
steady-state-chitnis-high-malaria-transmission#

נציב את הפרמטרים המייצגים איזור עם העברה גבוהה למחלה כאשר:
$q = 0.13$ $p = 1.44 \cdot 10^{-4}$

נזכיר כי:
p , שיעור ילודה ותמותה לאדם.
q , שיעור ילודה ותמותה ליתוש.
כאשר תנאי ההתחלה הם:

$$S_h = 500, E_h = 10, I_h = 30, R_h = 0$$

$$S_v = 4000, E_v = 100, I_v = 50$$

הערה:

כמובן שתנאי ההתחלה אינם משפיעים על שיווי משקל של המערכת אלא גודל האוכלוסיות עצמם כאשר גודל כל אוכלוסייה הוא סכום של תנאי ההתחלה של כל אטכלוסייה כאשר מתקיים :

$$N_h = S_h + E_h + I_h + R_h$$

$$N_v = S_v + E_v + I_v$$

כאשר מתקיים:

$N_h = 540, N_v = 4150$

מכאן מקבלים כי נקודת שיווי המשקל היא:

$$S_h = 39.83, E_h = 2.99, I_h = 82.26, R_h = 414.89$$
$$S_v = 3069.68, E_v = 635.47, I_v = 444.83$$

כאשר מתקיים:

$$N_h = 539.97 \approx 540, N_v = 4149.98 \approx 4150$$

נבדוק את נכונות החישוב על ידי השוואת התוצאות בסימולציות, נאפס את ההגירה ואת התמותה מהמחלה ונציב $p = 1.44 \cdot (10^-4)\frac{1}{day}$ **,** $q = 0.13\frac{1}{day}$ **ונקבל:**

$$S_h = 39.85, E_h = 2.99, I_h = 82.20, R_h = 414.94$$
$$S_v = 3070.10, E_v = 635.26, I_{,v} = 444.66$$

כאשר מתקיים:

$$N_h = 539.98 \approx 540, N_v = 4150.02 \approx 4150$$

ראינו כי התוצאות של הסימולציות ושל הנוסחאות שקיבלנו לשיווי משקל תואמות ולכן ווידאנו כי הפתרון הוא נכון .

נציב במודל את הפרמטרים המייצגים העברה נמוכה למחלה:

כאשר:

$q = 0.13$ $p = 9.42 \cdot 10^{-5}$

כאשר תנאי ההתחלה הם:

$S_h = 600, E_h = 20, I_h = 3, R_h = 0$

$S_v = 2400, E_v = 30, I_v = 5$

כאשר מתקיים:

$N_h = 623, N_v = 2435$

מכאן מקבלים כי נקודת שיווי המשקל היא:

$$S_h = 515.55, E_h = 1.68, I_h = 46.95, R_h = 58.8$$
$$S_v = 2341.95, E_v = 56.8, I_v = 36.25$$

כאשר מתקיים:

$N_h = 623623, N_v = 2435$

נבדוק את נכונות החישוב על ידי השוואת התוצאות בסימולציות, נאפס את ההגירה ואת התמותה מהמחלה ונציב:

$q = 0.13 \; p = 9.42 \cdot (10^-4)$

$$S_h = 519, E_h = 1.636, I_h = 45.53, R_h = 57$$
$$S_v = 2344.6, E_v = 55.15, I_v = 35.21$$

כאשר מתקיים:

$N_h = 623.166 \approx 623, N_v = 2434.96 \approx 2435$

ראינו כי התוצאות של הסימולציות ושל הנוסחאות שקיבלנו לשיווי משקל תואמות ולכן וידאנו כי הפתרון הוא נכון.

4.4 שימוש במודל לצורך חקירת דרכים למאבק בהתפשטות המחלה

ניתחנו את מודל המלריה על ידי חישוב נקודות שיווי משקל עבור שתי קבוצות של ערכים בסיסיים, האחד מייצג אזורים עם כמות חולים גבוהה והשני מייצג איזורים עם כמות חולים נמוכה.
נקודות שיווי משקל אלו מאפשרים לנו לקבוע את חשיבותם של פרמטרים שונים להתפשטות מחלת המלריה.
חמישת הפרמטרים שצ'יטניס בדק את השפעתם על שיווי המשקל של המודל בשני האזורים השונים הם:

σ_v - מספר עקיצות מקסימלי של יתוש לבן אדם ביום - יחידות 1/זמן
β_{hv} - ההסתברות שתעבור מחלה מיתוש חולה לבן אדם בריא עם העקיצה -חסר יחידות
β_{vh} - ההסתברות שתעבור מחלה מבן אדם חולה ליתוש בריא עם העקיצה - חסר יחידות
Ψ_v - שיעור ילודה ליתושים - יחידות 1/זמן
γ_h - השיעור לבן אדם לעבור מחולה לבריא - יחידות-1/זמן

כעת נבדוק את השפעת חלק מהפרמטרים האלו על שיווי המשקל של המודל

לפי צ'יטניס טווח הערכים של הפרמטרים שהזכרנו לעיל הם:

$$\sigma_v = 0.10 - 1.0$$

$$\beta_{hv} = 0.010 - 0.27$$

$$\beta_{vh} = 0.072 - 0.64$$

$$\Psi_v = 0.020 - 0.27$$

$$\gamma_h = 0.0014 - 0.017$$

4.4.1 הקטנת מספר העקיצות

את הפרמטר הראשון, מספר עקיצות של יתוש לבן אדם ליום ניתן להקטין בעזרת מספר שיטות, אחת מהשיטות היא רשתות למיטות שבעזרתם מונעים מיתושים להתקרב לגוף האדם או מריחת משחה על הגוף שמונעת התקרבות היתושים אליו ובכך מקטינים את הפרמטר של מספר עקיצות יתוש לאדם σ_v.

רשתות למניעת מגע עם יתושים בלילה

ננסה להקטין פרמטר זה במודל ונבדוק את השפעתו על המחלה והתפשטותה:

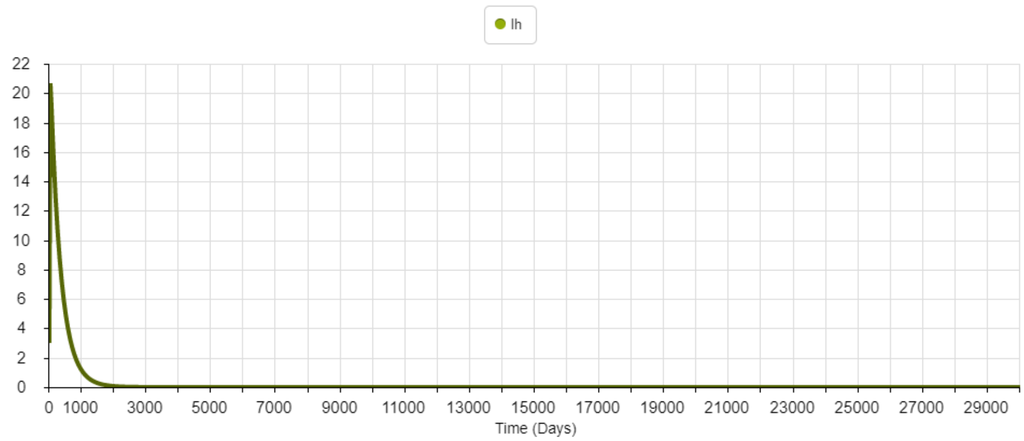
נציב במודל הראשון עם ערכי הפרמטרים להעברה נמוכה למחלה:

$$\sigma_v = 0.10$$

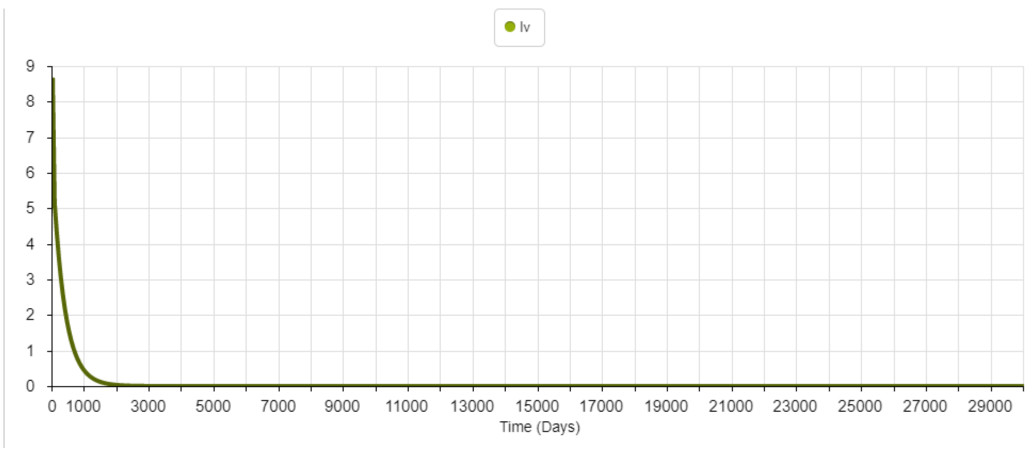
במקום:

$$\sigma_v = 0.33$$

פלטי התוכנה:



בני אדם חולים



יתושים חולים

אנו רואים כי עם הקטנת מספר העקיצות המחלה נכחדה וזה קרה אחרי 1300 יום כלומר כמעט שלוש שנים.

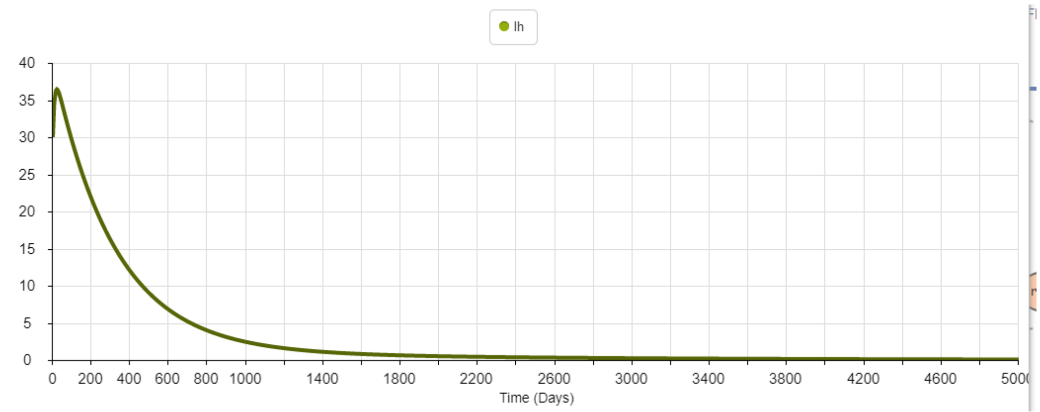
נציב במודל השני עם ערכי הפרמטרים להעברה גבוהה למחלה:

$$\sigma_v = 0.10$$

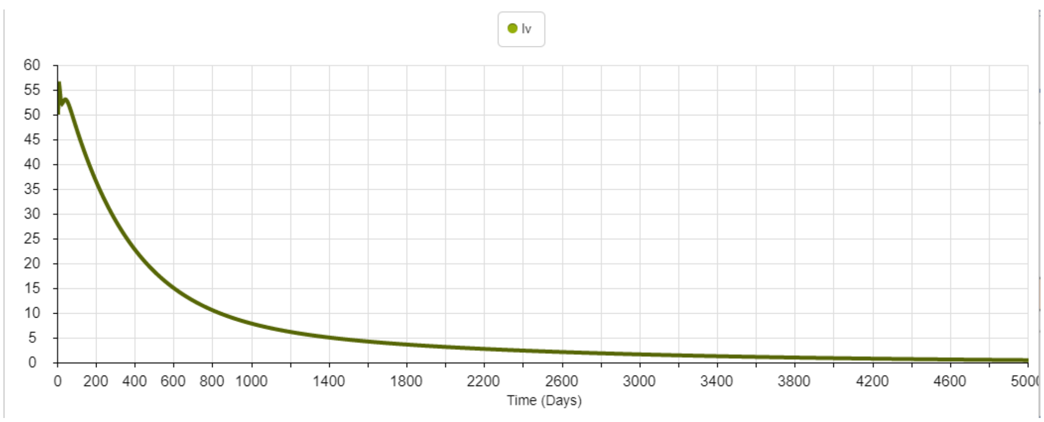
במקום:

$$\sigma_v = 0.50$$

פלטי התוכנה:



בני אדם חולים



יתושים חולים

אנו רואים שגם במקרה זה המחלה נכחדה אך זה קרה אחרי 5000 יום כלומר 13 שנה בערך.

נבדוק האם קיים ערך קריטי לפרמטר כך שאם מורידים אותו עד לערך זה תיכחד המחלה.
נשתמש במשוואת שיווי משקל לחישוב:

נבדוק מתי מתקיים כי:

$$I_h = \frac{(V_v \cdot X).(p \cdot N_h \cdot M \cdot \beta_{hv}) - (p \cdot Y) \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{(p \cdot Y) \cdot (V_v \cdot X + q \cdot X) - (V_v \cdot X) \cdot (\frac{\rho_h \cdot \gamma_h}{\rho_h + p} - Y) \cdot M \cdot \beta h_v} = 0$$

כאשר:

$$M = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$W = \frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$X = \frac{W.\beta_{vh}}{N_h} + \frac{W.\widehat{\beta_{vh}}.\gamma_h}{(\rho_h + P)N_h}$$

$$Y = \frac{(V_h + P).(\gamma_h + P)}{V_h}$$

תנאי זה יתקיים אם:

$$(V_v \cdot X).(p \cdot N_h \cdot M \cdot \beta_{hv}) - (p \cdot Y) \cdot (V_v \cdot q + q^2) = 0$$

$$M = \frac{Y \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{V_v \cdot X \cdot N_h \cdot \beta h_v}$$

ומכאן נקבל :

$$M = \frac{Y \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{V_v \cdot N_h \cdot \beta h_v \cdot W \cdot (\frac{\beta v_h}{N_h} + \frac{\widehat{\beta v_h} \cdot \gamma_h}{(\rho_h + p) \cdot N_h})}$$

$$M \cdot W = \frac{Y \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{V_v \cdot N_h \cdot \beta h_v \cdot (\frac{\beta v_h}{N_h} + \frac{\widehat{\beta v_h} \cdot \gamma_h}{(\rho_h + p) \cdot N_h})}$$

$$\frac{\sigma_v^2 \cdot \sigma_h^2 \cdot N_h \cdot N_v}{(\sigma_v \cdot N_v + \sigma_h \cdot N_h)^2} = \frac{Y \cdot (V_v \cdot q + q^2)}{V_v \cdot N_h \cdot \beta h_v \cdot (\frac{\beta v_h}{N_h} + \frac{\widehat{\beta v_h} \cdot \gamma_h}{(\rho_h + p) \cdot N_h})}$$

$$\frac{\sigma_v^2 \cdot \sigma_h^2 \cdot N_h \cdot N_v}{(\sigma_v \cdot N_v + \sigma_h \cdot N_h)^2} = 0.2020083952$$

אחרי הצבת הערכים האחרים נקבל משוואה ריבועית :

$$1.032756509 \cdot \sigma_v^2 - 0.1013634851 \cdot \sigma_v - 0.05575824233 = 0$$

מקבלים שני פתרונות אחד חיובי והשני שלילי כמובן שהפתרון הרלוונטי הוא חיובי ולכן מתקיים כי:

$$\sigma_v^* = 0.2865549$$

מכאן לסיכום תתקיים הכחדה למחלה כאשר:

$$\sigma_v < 0.2865549$$

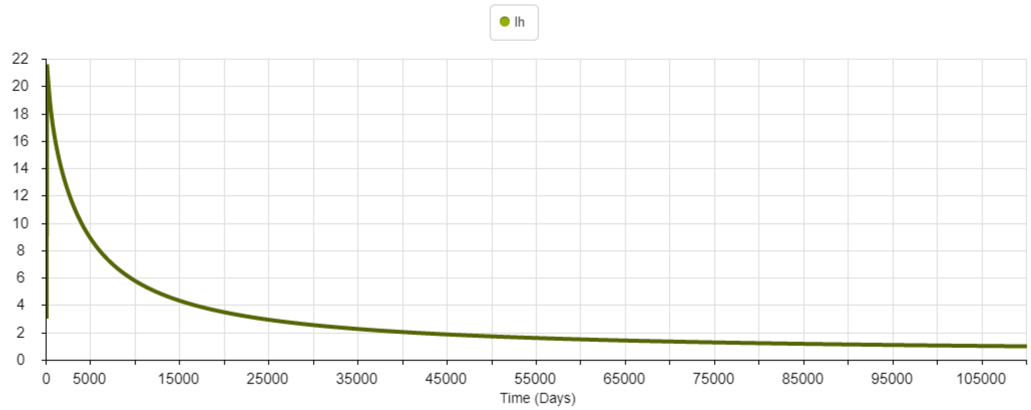
ולא תתקיים הכחדה למחלה כאשר מתקיים:

$$\sigma_v > 0.2865549$$

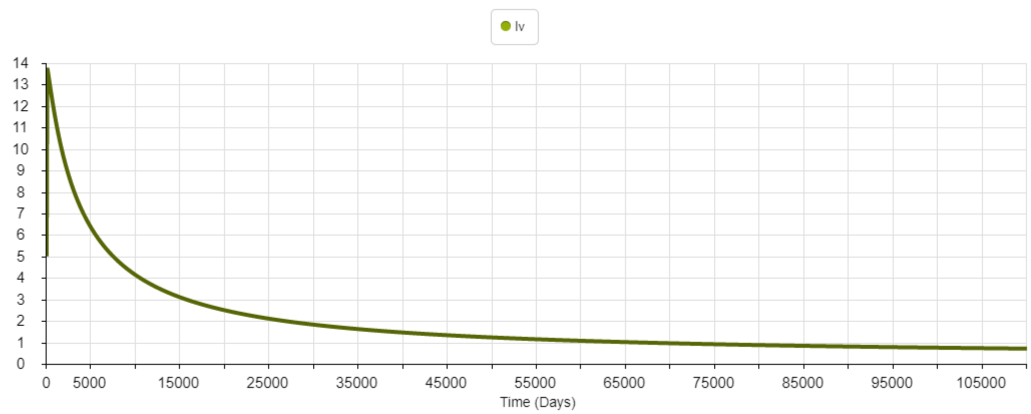
ולכן מסקנה עלינו להקטין את הפרמטר ב 14 אחוז מערכו המקורי 0.33 על מנת לוודא הכחדה למחלה
קיבלנו את הערך הקריטי להכחדת המחלה עם ערכי פרמטרים להעברה נמוכה למחלה.

נבצע סימולציה עם ערך קרוב מאוד לערך הקריטי ונבדוק את נכונות הפתרון:

$$\sigma_v = 0.287$$



בני אדם חולים

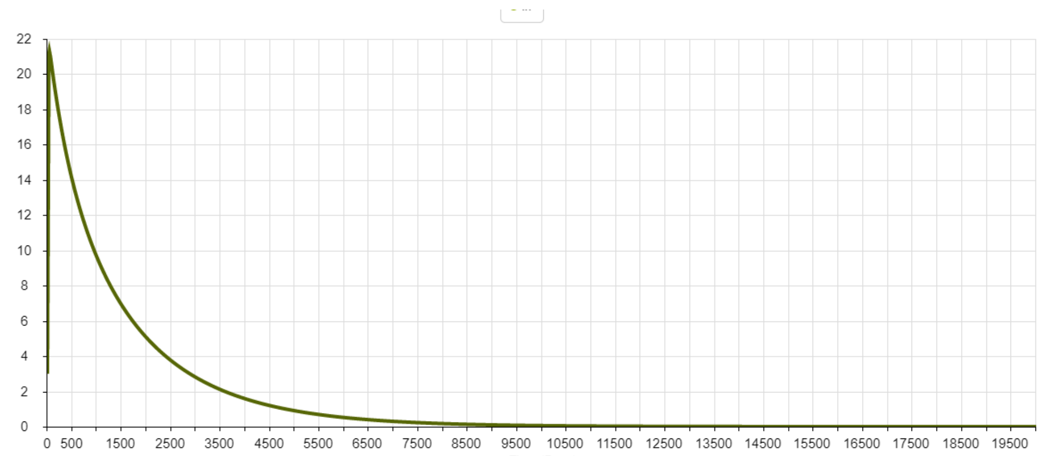


יתושים חולים

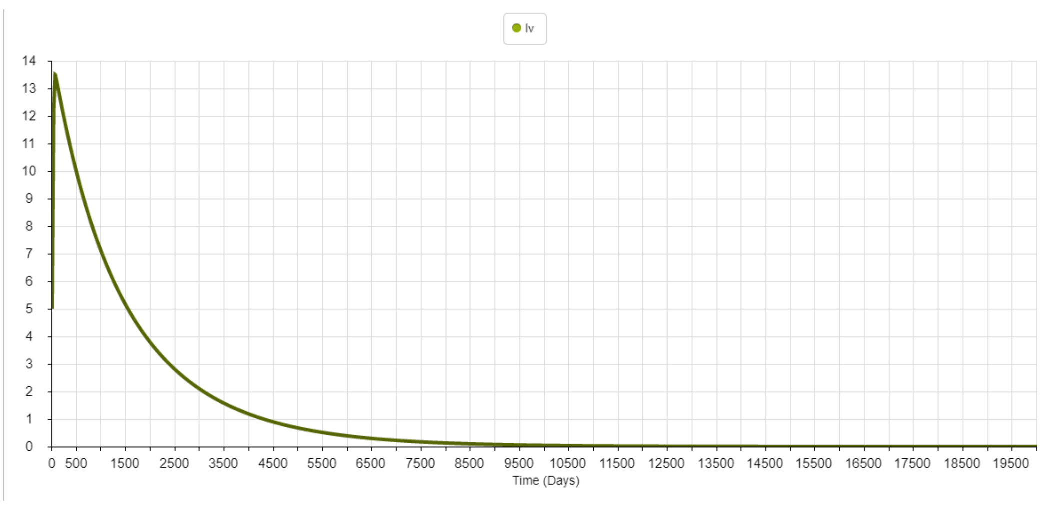
רואים כי לא התרחשה הכחדה למחלה.

נראה סימולציה בה המחלה כן נכחדת כלומר ערך הפרמטר קטן מהערך הקריטי:

$$\sigma_v = 0.286$$



בני אדם חולים



יתושים חולים

רואים כי המחלה נכחדה.
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

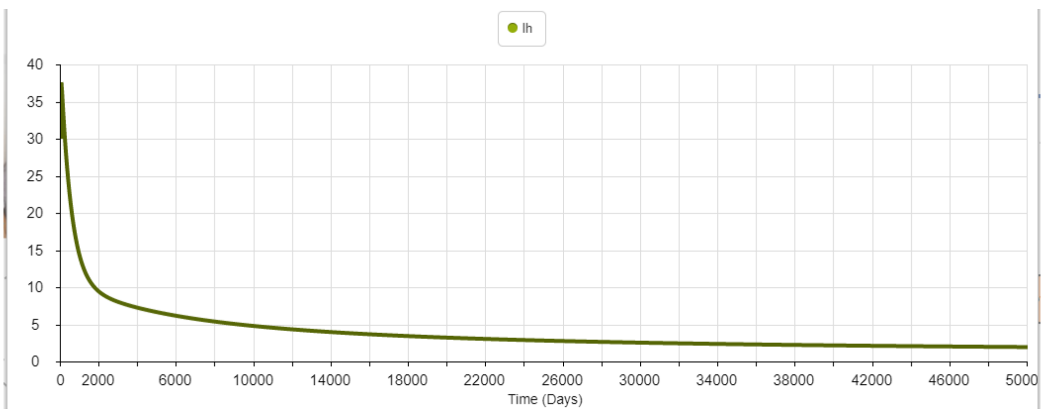
נחשב באותה דרך עם ערכי פרמטרים להעברה גבוהה למחלה ונקבל:
$\sigma_v^* = 0.10116$

רואים כי באזור עם העברה גבוהה הערך הקריטי יצא בהרבה יותר קטן מאזור עם העברה נמוכה, כמובן שזה נכון כי באזור עם העברה גבוהה מספר היתושים גדול יותר ובכך יש יותר עקיצות ועל מנת להכחיד את המחלה צריך להקטין את הסיכוי שיתוש

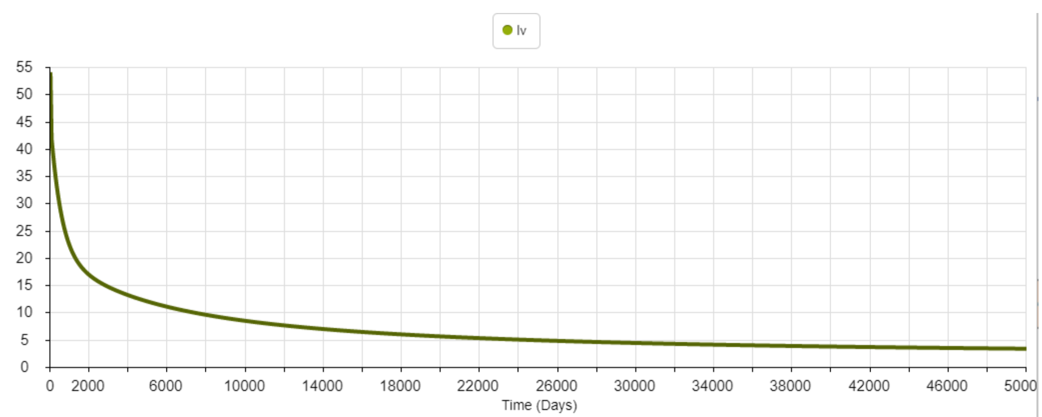
יעקוץ אדם באחוז גבוהה יחסית, גם שאר הפרמטרים באזור זה שונים מאזור עם העברה נמוכה למחלה ולכן עלינו להקטין את הפרמטר ב 80 אחוזים מערכו האמיתי 0.50 על מנת לוודא הכחדה למחלה.

נבצע סימולציה קרובה לערך הקריטי על מנת לבדוק את נכונות הפתרון:
נציב:

$$\sigma_v = 0.102$$



בני אדם חולים

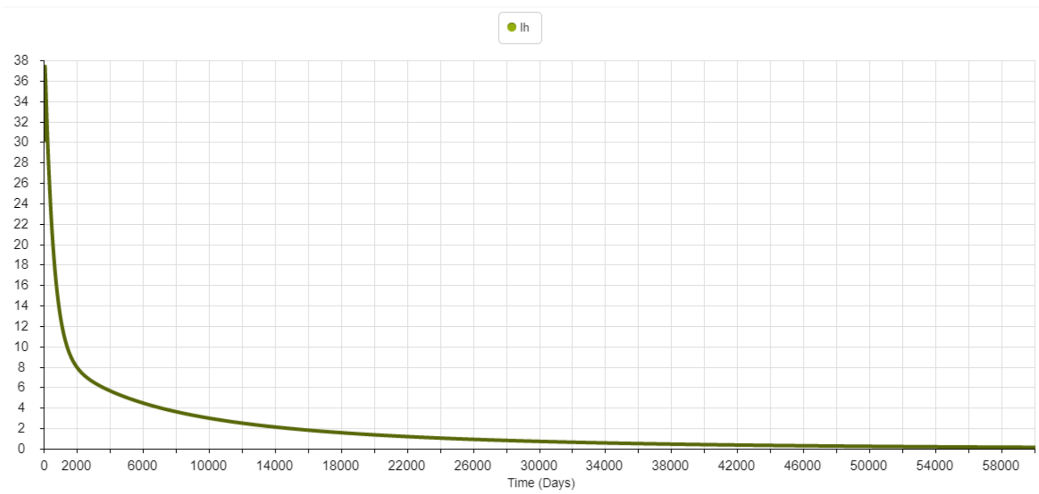


יתושים חולים

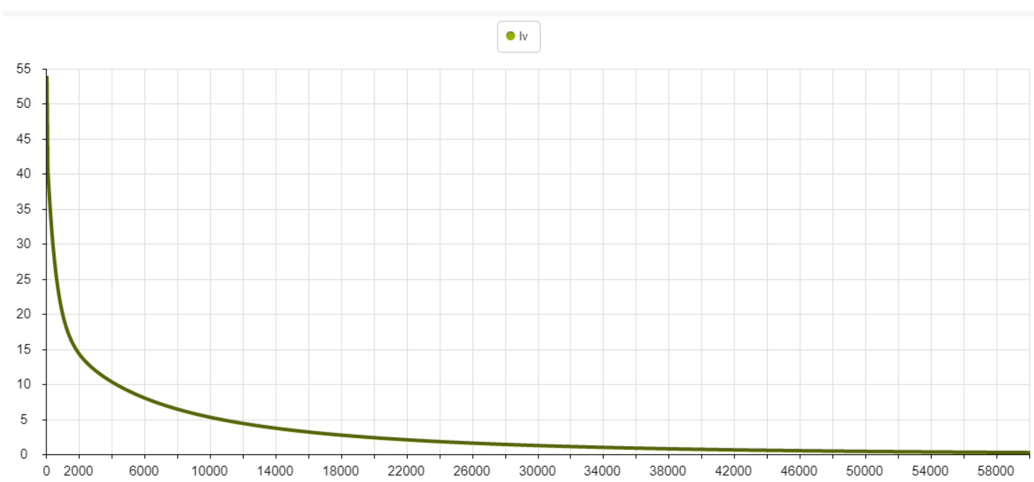
רואים כי לא התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

נציב:

$$\sigma_v = 0.1$$



בני אדם חולים



יתושים חולים

רואים כי התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

4.4.2 הפחתת הסיכוי להדבקה במחלה

הפרמטר השני שנחקור הוא ההסתברות להעברת המחלה מיתוש נגוע לאדם בריא וכדי להקטין פרמטר זה הדרך הטובה ביותר היא תרופות שמסוגלות למנוע את ההדבקה.
כגון [12] :

1- מפלוקווין
2- מלרון
3- כלורוקווין
4- דוקסילין

תרופות למניעת הידבקות במחלה

כאשר מתקיים:

$$\beta_{hv} = 0.010 - 0.27$$

נבדוק האם ישנו ערך קריטי לפרמטר זה כך שאם מורידים אותו עד לערך זה המחלה תיכחד:
נשתמש במשוואות שיווי משקל ונבדוק:
מתי מתקיים כי :

$$I_h = \frac{(V_v.q.N_v.X).(P.N_h.M.\beta_{hv}) - (P.Y.N_v).(V_v.q^2 + q^3)}{(P.YN_v).(V_v.q.X + q^2.X) - (V_v.q.N_v.X).(\frac{\rho_h.\gamma_h}{\rho_h+P} - Y).M.\beta_{hv}} = 0$$

כאשר:

$$M = \frac{\sigma_v N_v \sigma_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$W = \frac{\sigma_v \sigma_h N_h}{\sigma_v N_v + \sigma_h N_h}$$

$$X = \frac{W.\beta_{vh}}{N_h} + \frac{W.\widehat{\beta_{vh}}.\gamma_h}{(\rho_h + P)N_h}$$

$$Y = \frac{(V_h + p).(\gamma_h + p)}{V_h}$$

תנאי זה יתקיים כאשר:

$$(V_v.q.N_v.X).(p.N_h.M.\beta_{hv}) - (p.Y.N_v).(V_v.q^2 + q^3) = 0$$

$$\beta_{hv} = \frac{(p.Y.N_v).(V_v.q^2 + q^3)}{V_v.q.N_v.X.p.N_h.M}$$

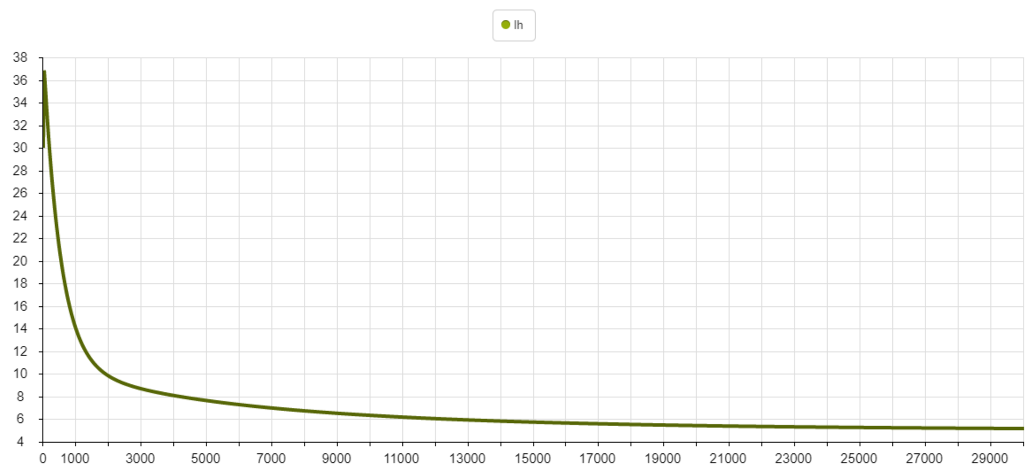
נציב כעט את הפרמטרים עבור העברה גבוהה ונקבל:

$$\beta_{hv}^* = 0.0012003$$

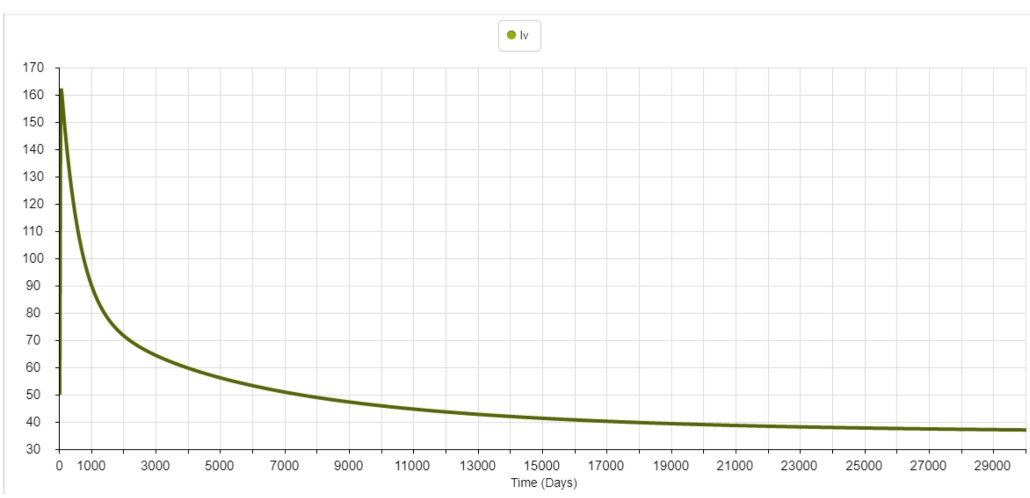
מסקנה:
באזור עם העברה גבוהה עלינו להקטין את ערך פרמטר ב־ 94.5 אחוזים מערכו האמיתי.

נבצע סימולציה קרובה לערך הקריטי על מנת לבדוק את נכונות הפתרון:
נציב:

$$\beta_{hv} = 0.0013$$



בני אדם חולים

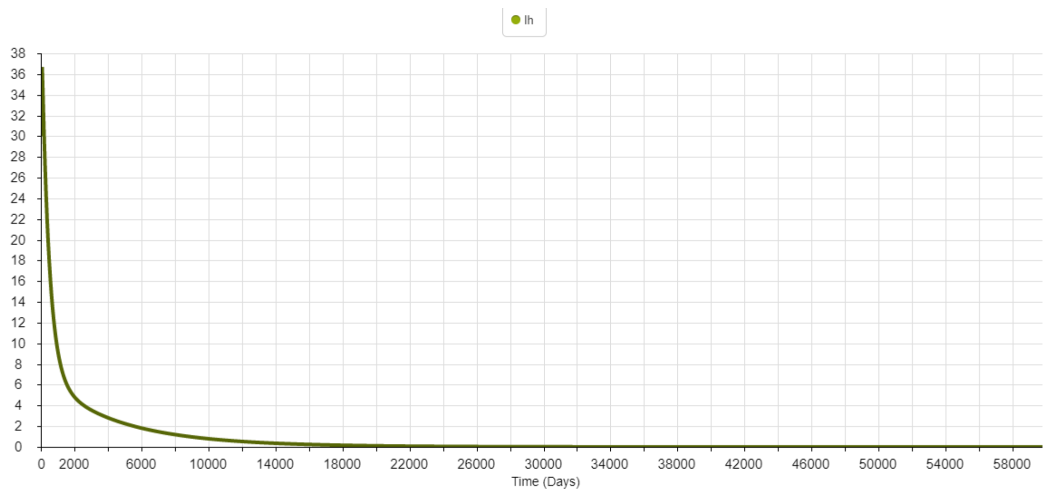


יתושים חולים

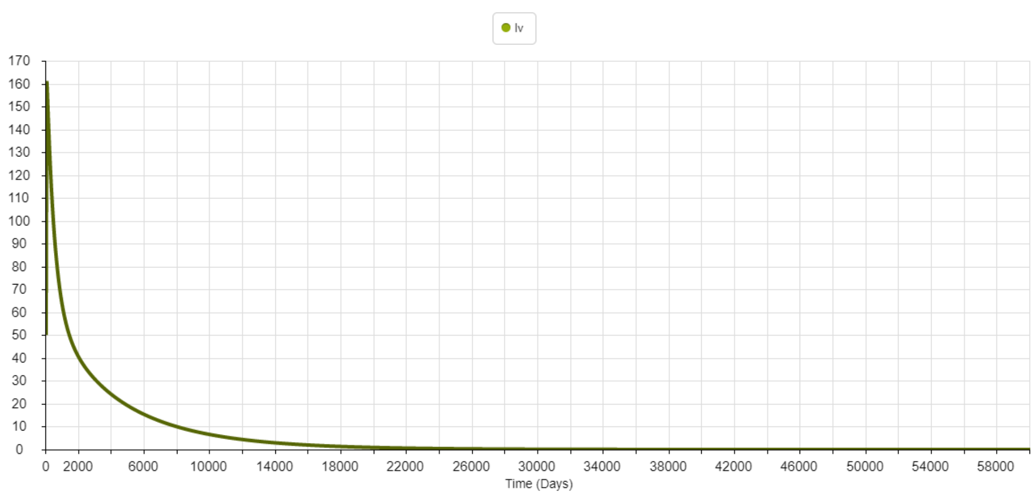
רואים כי לא התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

נציב:

$$\beta_{hv} = 0.001$$



בני אדם חולים



יתושים חולים

רואים כי התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

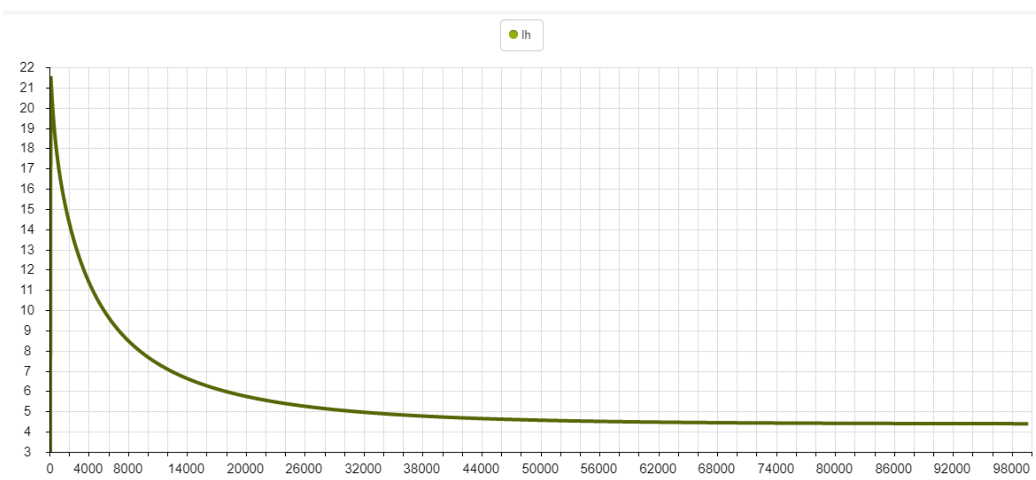
כעת נבצע חישוב לערך הקריטי אך עם פרמטרים להעברה נמוכה למחלה ונקבל:

$$\beta_{h_v}^* = 0.01793$$

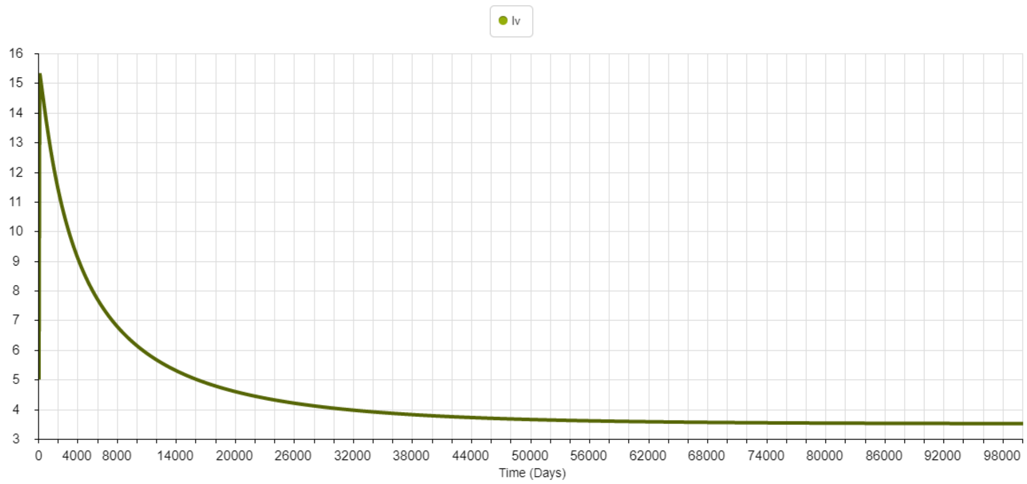
מסקנה:
באזור עם העברה נמוכה עלינו להקטין את ערך פרמטר ב־ 18.5 אחוזים מערכו האמיתי

נבצע סימולציה קרובה לערך הקריטי על מנת לבדוק את נכונות הפתרון:
נציב:

$$\beta_{hv} = 0.018$$



בני אדם חולים

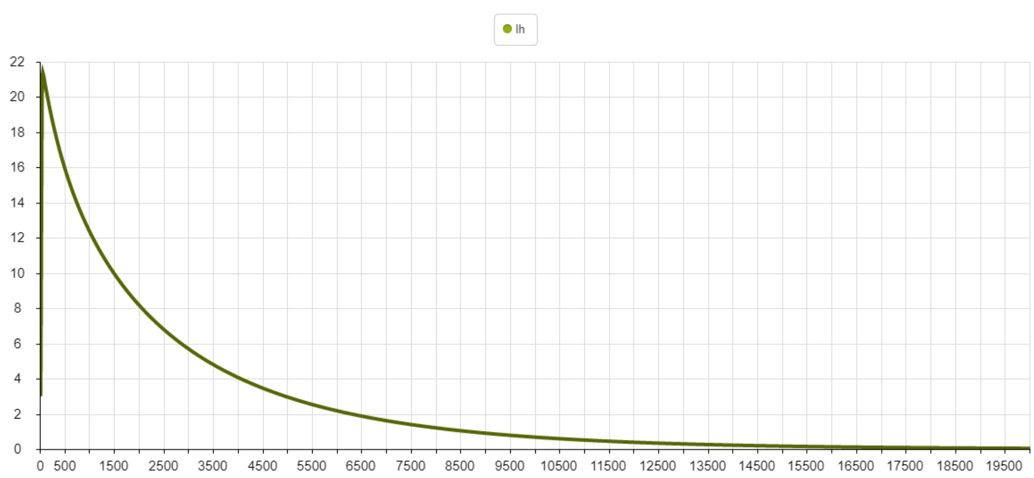


יתושים חולים

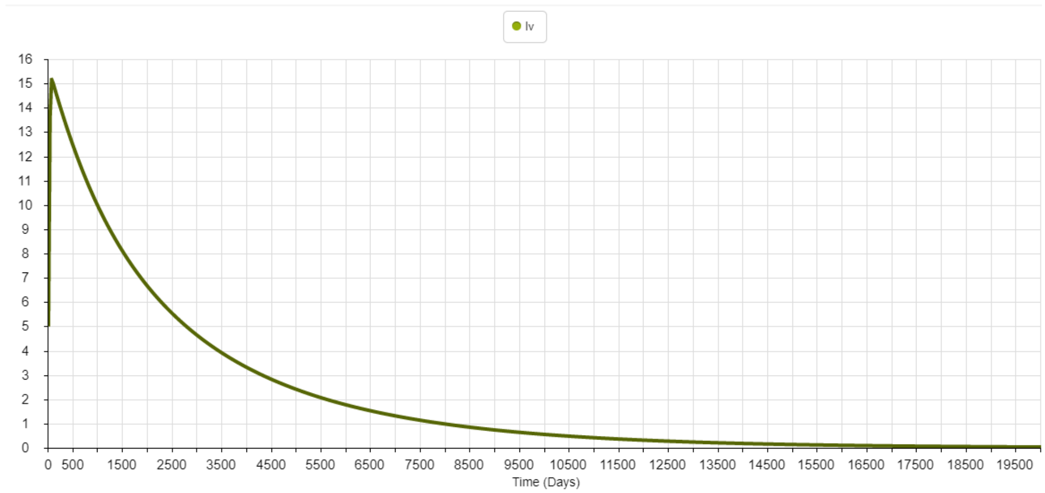
רואים כי לא התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו .

נציב:

$$\beta_{hv} = 0.016$$



בני אדם חולים



יתושים חולים

רואים כי התרחשה הכחדה למחלה .
וכך ביצענו בדיקת נכונות לחישוב שלנו.

לסיכום אחרי חקירת השפעת שני הפרמטרים על המודל בשני אזורים שונים אנו רואים בבירור כי שיטת הקטנת מספר העקיצות של יתוש לאדם היא עדיפה מאשר הקטנת ההסתברות להעברת המחלה מיתוש כי להלן תוצאות החקירה:

טבלת אחוזי הורדת הפרמטרים מערך המקור על מנת לוודא הכחדה למחלה:

PARAMETER	LOW	HIGH
σ_v	**14%**	**80%**
β_{hv}	**18.5%**	**94.5%**

אנו רואים בבירור כי אחוזי הקטנת הפרמטר מספר העקיצות הוא יותר קטן מאשר הסתברות העברת המחלה ולכן שיטה זו היא בעלת פוטינציאל גדול יותר להצלחה בהכחדת המחלה ולכן כדאי יותר להשקיע בשיטות המקטינות ערך פרמטר זה.

5 סיכום

במהלך העבודה התמקדתי בשני מודלים מתמטיים שונים שחוקרים את אותה התופעה שהיא התפשטות מחלת המלריה.
חקרנו את ההתנהגות של כל מודל, במודל של רוס היה קל לחשב שיווי משקל של המודל וממנו הגענו למסקנה חשובה מאוד, שניתן להכחיד את מחלת המלריה ע"י הורדת מספרם של היתושים עד למספר קריטי.
כמובן שזו מסקנה מאוד חשובה למין האנושי כי לפני עבודתו של רוס רופאים ומדענים חשבו כי שלא ניתן להכחיד את המחלה אלא כאשר נכחיד את זן יתושי האנופוליס שמעבירים את המחלה, אחרי שרוס הגיע למסקנה זו רופאים ומדענים עד היום מנסים למצוא שיטות שונות להקטנת מספר היתושים כדי להעלים את המחלה מהעולם.

אחרי חקירת מודל רוס הצגנו את המודל היותר מורכב של צ'יטניס, כמו שהסברנו בעבודה המודל שלו שונה בהנחותיו, שקרובות יותר למציאות מהמודל של רוס.
צ'יטניס לא חישב ביטוי עבור שיווי משקל במודל שלו ולכן בעבודה שלי חישבתי שיווי משקל של המודל שלו ובאמצעותו הצלחתי למצוא ערכים קריטיים של פרמטרים שונים במודל, כך שאם נוריד את ערכם של פרמטרים הללו עד לערך הקריטי נכחיד את המחלה.
באמצעות שיווי המשקל של המודל הצלחנו למצוא איזה שיטה יותר עדיפה לעבוד עליה ולהשקיע בה מאמצים כדי להכחיד את המחלה.

לסיכום אני רוצה להודות למרצה חגי כתריאל שעזר לי והכווין אותי לאורך כל העבודה הזו.

6 רשימת מקורות

רשימת מקורות

[1] Bacaër, Nicolas. A short history of mathematical population dynamics . section 12 .ross and malaria 1911. Springer Science Business Media, 2011.

[2] Ngwa, Gideon A., and William S. Shu. "A mathematical model for endemic malaria with variable human and mosquito populations." Mathematical and Computer Modelling 32.7-8 (2000): 747-763.

[3] Chitnis, Nakul, James M. Hyman, and Jim M. Cushing. "Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model." Bulletin of mathematical biology 70.5 (2008): 1272.

[4] eureka.org.il, what is malaria disease.

[5] infomed.co.il. malaria symptoms.

[6] he.wikipedia.org.ronald ross biography, early life and education Discovery of malaria transmission .17 september 2019

[7] walaa faraj. ross malaria model, insightmaker.com .2019 https://insightmaker.com/insight/175230/ross-model-new

[8] walaa faraj. chitnis malaria model, insightmaker.com . 2019. https://insightmaker.com/insight/152824/malarya-model-equilibrium-point-low-transmission

[9] davidson.weizmann.The doctor who caught the mosquitoes .https://davidson.weizmann.ac.il/online/sciencehistory/ היום־לפני־הרופא־שתפס־את־היתושים

[10] SWISS TPH.PD Dr.Nakul Chitnis.https://www.swisstph.ch/en/staff/profile/people/nakul-chitnis/.

[11] https://davidson.weizmann.ac.il/online/maagarmada/med$_a nd_p hysiol -$ $..https : //www.tasmc.org.il.Travelers - Clinic.Malaria.aspx.$

[12] https://www.who.int/gho/malaria/epidemic/cases/en/ .

[13] https://www.mmv.org/malaria-medicines/malaria-facts-figures.