

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

בעיית פרמה – וובר

אלעד רוזנגרטן

The Fermat – Weber location problem

Elad Rosengarten

**פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית**

בעיית פרמה - וובר

אלעד רוזנגרטן

The Fermat – Weber location problem

Elad Rosengarten

**Advisor:
Prof. Vladimir
Turetsky**

**מנחה: פרופ'ח
ולדימיר טורצקי**

Karmiel

כרמיאל

2014

תוכן העניינים

1.....	מבוא
1.....	ניסוח הבעיה
5.....	סקירת ספרות
6.....	1. האלגוריתם של וייצפלד
10.....	2. הוכחת ההתכנסות
15.....	3. מהירות ההתכנסות
15.....	3.1 התכנסות אל פתרון שאיננו על אחד הקודקודים
20.....	3.2 התכנסות אל פתרון שנמצא באחד הקודקודים
21.....	4. דוגמאות נומריות ודין בסוגיית ההתכנסות
21.....	4.1 דוגמאות להתכנסות השיטה אל פתרון הבעיה
23.....	4.2 בעיות העלולות להופיע בסדרת האיטרציות להתכנסות לנקודה שאיננה פתרון
30.....	5. סיכום ומסקנות
31.....	6. נספחים
31.....	6.1 קוד ה-matlab הפותר את איטרציות וייצפלד
32.....	6.2 אחד מהפתרונות הגיאומטריים לבעיית פרמה – וובר
35.....	ביבליוגרפיה

מבוא

בעיות אופטימיזציה הן בעיות מתמטיות העוסקות במציאתן של נקודות המביאות למינימום או למקסימום פונקצית מטרה מסוימת, תחת אילוצים נתונים.

הבעיות מופיעות בתחומים שונים ומגוונים כמו: מיקום אופטימאלי של ספקי שירות, בעיות בתורת הגרפים, בעיות כלכליות כאשר פונקצית המטרה היא פונקצית מחיר של מוצר מסוים וכו'.

הבעיה אותה בחרתי לחקור בעבודה זו היא בעיית מיקום שהתפתחה מבעיה בסיסית במישור אשר אותה ניסח המתמטיקאי פייר דה-פרמה במאה ה-17, והוכללה לכיוונים שונים במהלך השנים.

הבעיה המקורית אותה ניסח פרמה הייתה: בהינתן שלוש נקודות שאינן קולינאריות במישור, יש למצוא נקודה רביעית אשר סכום מרחקיה משלושת הנקודות הנתונות יהיה מינימאלי.

בעיה זו היא למעשה אחת מבעיות המיקום הראשונות שהוצגו בתחום האופטימיזציה. פתרון גיאומטרי ראשון ניתן לבעיה על ידי טוריצ'לי, ומאז הנקודה שהיא פתרון הבעיה נקראת "נקודת טוריצ'לי". מאז, הוצגו לבעיה פתרונות גיאומטריים רבים (במקרה המישורי), אשר אחד מהם מוצג כנספח בסופה של עבודה זו.

עם השנים, הוכללה הבעיה על ידי מתמטיקאים וכלכלנים לכיוונים שונים, עד לניסוחה כבעיה אותה חקרתי בעבודה זו.

אלפרד וובר היה כלכלן גרמני (בין עיסוקים אחרים שהיו לו) שניסה לפתור בעיה של מיקום אופטימלי של מפעל מסוים או ספקי שירות כלשהם. הוא הגיע אל המסקנה שהמיקום האופטימלי של המפעל יהיה בנקודה בו עלות ההובלה מן המפעל אל הספקים של המוצר אותו הוא מייצר תהיה מינימאלית. הוא הניח כי גורמים שונים (כמו כוח אדם, עלות חומרי הגלם וכד') הם המשפיעים על עלות ההובלה של המוצר, ולכן הוא נתן לכל נקודה את ה"משקל" המתאים לה המייצג את עלות ההובלה תוך התחשבות בגורמים המשפיעים על עלות זו.

ניסוח הבעיה

בהינתן m נקודות $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ במרחב האוקלידי R^n שיכוננו "קודקודים", ניחס לכל נקודה מספר אי-שלילי $w_i, i = 1, 2, \dots, m$. יש למצוא נקודה נוספת $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, כך שסכום המרחקים הממושקלים מ- P אל m הנקודות יהיה מינימאלי. או במילים אחרות, לפתור את הבעיה:

$$\min_{P \in R^n} f(P)$$

$$f(P) = \sum_{i=1}^m w_i d_i(P) \quad \text{כאשר}$$

$$d_i(P) = \sqrt{\sum_j (x_j - a_{ij})^2} \quad \text{כאשר } d_i(P) \text{ מסמן את המרחק האוקלידי מהנקודה } P \text{ אל הקודקוד } A_i, \\ i = 1, 2, \dots, m$$

לבעיה זו יישומים רבים בתחומים שונים כגון :

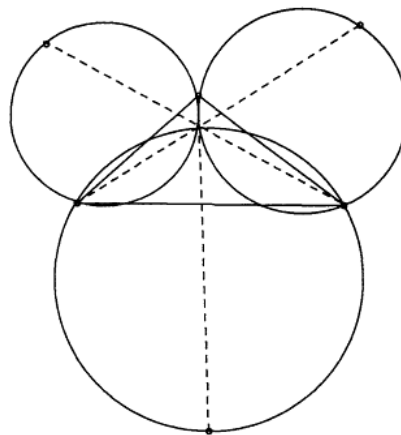
1. בעיה של מיקום ספק שירותים באופן הטוב ביותר כך שיוכל לשרת את האוכלוסייה. אם למשל ספק השירותים שלנו הוא בית חולים, ניתן לדמות כל קודקוד לעיר וכל משקל לכמות האנשים החיים באותה העיר. באופן כזה אפשר למצוא את המיקום הטוב ביותר של בית החולים כך שבאופן יחסי למספר האנשים בכל עיר הוא יהיה במיקום הטוב ביותר.

הפתרון יכול להיות גם עבור בעיות של הובלות מוצרים. אם מיקומו של ספק מסוים יהיה בנקודה P שהיא פתרון הבעיה, ואם A_i הוא המיקום של הצרכן ה- i ו- w_i מסמן את עלות ההובלה מהספק לצרכן, אזי $f(P)$ היא פונקציית העלות של ההובלה אותה ברצוננו להביא למינימום.

2. בבעיות בתורת הגרפים (בשימוש במדעי המחשב), f יכולה לסייע במציאת המסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות או בין מספר נקודות נתונות.

אחת הבעיות בהן נתקלתי, היא כאשר יוצרים מהנקודה P (שהיא פתרון הבעיה) והקודקודים הנתונים עץ, העץ המתקבל הוא עץ שטיינר- עץ המתקבל מחיבור מספר נתון של נקודות אחת לשנייה, כך שהסכום של הקטעים המחברים אותם הוא מינימאלי. נקודות החיתוך של כל שני קווים כאלה נקראת "נקודת שטיינר". במקרה בו מחברים את הנקודה P עם הקודקודים הנתונים, מתקבל עץ שטיינר עם נקודה אחת כזאת בלבד (במקרים מסוימים). הדבר יכול לסייע בחישובים של אורכים של עצים בינאריים מסוימים, מציאת מרחק קצר ביותר ובמקרים בהם מרחק הרוטציה של עץ (פעולה אשר מתקנת עצים בינאריים לאחר שינוי שלהם) ידוע, אפשר להביא למינימום את העץ החדש שהתקבל (למרות שהתהליך עצמו מסובך אך הוא יכול לעזור בלמצוא חסמים לבעיה).

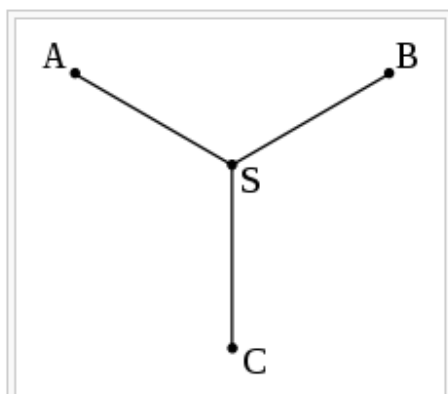
הקשר בין הנקודה שהיא פתרון הבעיה לאורכו של העץ נתונה על ידי מסקנה מאחד הפתרונות הגיאומטריים שניתנו לבעיה זו. אחת ההוכחות הגיאומטריות לקיומה של הנקודה הזו ושהיא אכן מינימאלית (במקרה המישורי עבור 3 נקודות) מתבצע על ידי חיתוך של שלושה מעגלים שכולם עוברים דרך הנקודה.



איור 1 : הפתרון הגיאומטרי לבעיית פרמה על ידי מעגלים

במרכז האיור נראית נקודת טוריציולי. סימפסון הוכיח כי האורך הכולל של הקווים המקווקים שווה לסכום המרחקים מנקודת טוריציולי אל הקודקודים. אם הקודקודים מהווים צמתים של עץ, אפשר על ידי פתרון בעיית פרמה לפתור בעיה של עץ בעל מרחקים מינימאליים.

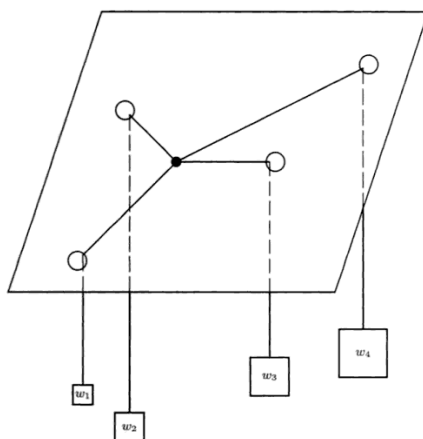
במקרה הזה של שלושה קודקודים, נקודת טוריציולי היא בדיוק נקודת שטיינר. ישנן הכללות שבאמצעותן אפשר לבנות עץ שטיינר בעל יותר קודקודים.



איור 2 : עץ שטיינר בעל 3 צמתים. נקודת שטיינר וטוריציילי מתלכדות

3. בעיות פיסיקליות שונות יכולות להיפתר על ידי מציאת הנקודה P הפותרת את הבעיה.

לדוגמא : The Varignon Frame – על לוח, קודחים m חורים בקואורדינאטות המתאימות לנקודות A_i . דרך כל חור מעבירים חוט וקושרים את כל החוטים ביחד בקשר יחיד על הלוח. כל חוט קשור למשקולת אשר משקלה בהתאמה למשקל w_i של אותה הנקודה. בהנחה שאין חיכוך, שמסת החוטים זניחה ושהחורים שקדחנו קטנים באופן אינפיניטסימאלי, הקשר של כל החוטים על הלוח היה מתייצב על הנקודה P . ההתייצבות של הקשר על הפתרון של הבעיה נובעת משיקולים פיסיקליים של שקול הכוחות בציר ה- x הפועלים על הנקודה בה החוט קשור. מסגרת זו, היוותה מודל למכשירים שונים שהיו משתמשים בהם בפועל. המחשה של המערכת :



איור 3 : The varignon frame

כיום, השיטה הנפוצה ביותר לפתרון הבעיה הוא אלגוריתם איטרטיבי אותו פיתח וייצפלד, אשר מתכנס (תחת תנאים מסוימים) אל הפתרון של הבעיה. בשלב הראשון של העבודה חקרתי את האלגוריתם הזה ואת הוכחת ההתכנסות שלו אל הנקודה האופטימאלית.

בשלב השני של העבודה, חקרתי את מהירות ההתכנסות של האלגוריתם, תוך הבדלה בין התכנסות במקרה שהפתרון נמצא באחד הקודקודים, לבין פתרון שאינו נמצא באחד הקודקודים.

בשלב השלישי חקרתי מהו התנאי המספיק להתכנסות השיטה ומתי ההתכנסות לפתרון מובטחת.
בנוסף, יישמתי את השיטה על מספר דוגמאות נומריות.

סקירת ספרות

ישנה ספרות רבה העוסקת בבעיות אופטימיזציה שונות ובפרט בבעיות של מיקום אופטימלי של ספקי שירות או מתקנים שונים.

המאמר המקורי של וייצפלד משנת 1937 נכתב בצרפת והתפרסם בעיתון יפני. באותה התקופה לא ייחסו לבעיות מיקום חשיבות גבוהה כל כך ולכן המאמר לא זכה לתגובות רבות. רק בשנות ה-60 כאשר התחילו להבין את החשיבות של מיקומים אופטימליים של ספקי שירות, חזרה חשיבות של האלגוריתם אותו הוא הציע. ב-1973 קון (Kuhn) שיחזר את השיטה ואת ההוכחה של האלגוריתם אותו הציע וייצפלד במאמר שלו ובכך פתח את הדיון מחדש על הבעיה בהקשרים שונים.

במהלך העבודה, הסתמכתי על הספר Facility location – Application and theory (Drezner, Hamacher, 2004) לניסוח בעיית פרמה וקישורה למספר בעיות פיסיקליות כמו למשל The varignon frame.

מאמרים אקדמיים רבים נכתבו על בעיית פרמה-וובר בהקשרים שונים. אחד המאמרים המרכזיים עליהם הסתמכתי היה המאמר של קון (Kuhn, 1927) שעסק בהוכחת התכנסות סדרת האיטרציות לנקודת האופטימום של הבעיה. במאמר הופיעה ההוכחה של ההתכנסות, ובנוסף אני השלמתי טענות עזר שהיו חסרות וגם שלבים שהיו חסרים בהסברים ובפיתוח של נוסחאות מסוימות בהוכחה. את ההסברים לרוב המעברים אני השלמתי כי לא נכללו בשלמותם במאמר.

מאמר נוסף שעליו הסתמכתי בעבודה זו היה של כץ (Katz, 1973) שעסק בסוגיית מהירות ההתכנסות של האלגוריתם תוך הבחנה באם ההתכנסות היא לקודקוד או לא לקודקוד. גם במאמר זה השלמתי שלבים בחישובים או מעברים מסוימים על מנת להגיע אל המסקנות אליהן המאמר מגיע.

בשלב האחרון של העבודה העוסק בדוגמאות נומריות שונות להתכנסות סדרת האיטרציות ודוגמאות נגדיות המדגימות את הבעייתיות העלולה להופיע בהתכנסות סדרת האיטרציות, הסתמכתי על מספר מאמרים ביניהם המאמר של קון (Kuhn, 1972) והמאמרים של ברימברג (Brimberg, 1994) וצ'נדראסקרן ותמיר (Chandrasekaran & Tmir, 1988).

במהלך השלב האחרון של העבודה, נעזרתי במקורות אחרים הדנים בבעייתיות שיכולה לעלות מהאלגוריתם של וייצפלד והדרכים להתמודד עם הבעיות האלו. במאמר של בק וסבאך (Beck & Sabach, 2013) נידונה בעיית ההתכנסות בצורה נרחבת ומוצע אלגוריתם אלטרנטיבי לעקיפת הבעיה הזו.

המאמר של קון (Kuhn, 1972) היה המאמר הראשון שעסק בהוכחת ההתכנסות של סדרת האיטרציות אל פתרון הבעיה. אולם, בשלב האחרון של ההוכחה שלו התגלתה טעות באחת מהטענות המבטיחה התכנסות תמיד פרט למספר סופי של נקודות. מאמרים רבים אחרים הדנים בסוגיית ההתכנסות, באים לפתור את הבעיה הזו ולנסח את התנאי המספיק הנכון המבטיח שקבוצת הנקודות שלא יובילו אל פתרון הבעיה היא קבוצה סופית.

לבעיות של מיקום אופטימלי של מתקנים שונים יש חשיבות רבה. המספר הגדול של המאמרים שנכתבו בהקשר של בעיית פרמה-וובר מנסה לפתור בדרך היעילה ביותר את הבעיה שפתרונה יכול להיות מיושם בתחומים רבים ושונים. על אף שבמסגרת הפרויקט לא עסקתי בכל החומר המוצג במספר הרב של המאמרים שפורסמו בנושא, היה מעניין לגלות את המספר הרב של הדרכים והגישות המוצעות לפתרון וייעול של הבעיה הזו ולראות הרחבות שונות לבעיה גם במרחבים נורמיים שונים.

1. האלגוריתם של וייצפלד

הגדרה 1.1: תחום $D \subseteq R^n$ נקרא תחום קמור, אם לכל שתי נקודות $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ ולכל $\lambda \in [0,1]$ מתקיים $\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 \in D$.

הגדרה 1.2: פונקציה $f(\vec{x})$ נקראת קמורה בתחום קמור D אם לכל $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ ולכל $\lambda \in [0,1]$ מתקיים $f(\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) \leq \lambda f(\vec{x}_1) + (1-\lambda)f(\vec{x}_2)$. אם אי השוויון הוא חזק ו- $\lambda \in (0,1)$ אז אומרים כי $f(\vec{x})$ קמורה ממש.

הגדרה 1.3: הקמור (convex hull) של קבוצה A הוא הגוף הקמור המינימאלי המכיל את כל איברי הקבוצה.

משפט 1.4: אם $f(\vec{x})$ קמורה ממש בתחום קמור D , אז היא מקבלת את המינימום שלה בנקודה אחת ויחידה בתחום D .

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימות שתי נקודות שונות $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ כך ש:
 $f(\vec{x}_2) = \min_{x \in D} f(\vec{x})$, $f(\vec{x}_1) = \min_{x \in D} f(\vec{x})$. נבחר $\lambda \in (0,1)$.

$$f(\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) \stackrel{(1)}{<} \lambda f(\vec{x}_1) + (1-\lambda)f(\vec{x}_2) = \lambda f(\vec{x}_1) + (1-\lambda)f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$$

(1) – נובע מכך ש- f קמורה ממש.

קיבלנו נקודה בה מתקבל ערך נמוך מהמינימום.
סתירה.

■

בהקשר לבעיית פרמה-וובר, פונקציית המטרה היא מהצורה $f(P) = \sum_{i=1}^m w_i d_i(P)$, לכן מתקיימת הטענה הבאה:

טענה 1.5: אם A_1, A_2, \dots, A_m לא קולינאריות, אז $f(P)$ קמורה ממש.

הוכחה: נבחר $P, Q, A \in R^n$ כך ש: $P \neq Q$ ונבחר $\lambda \in (0,1)$. על ידי שימוש באי שוויון קושי-שוורץ נקבל:

$$\begin{aligned} \|\lambda(P-A) + (1-\lambda)(Q-A)\|^2 &= \|\lambda(P-A)\|^2 + 2(\lambda(P-A))^T((1-\lambda)(Q-A)) + \|(1-\lambda)(Q-A)\|^2 \leq \\ &\leq \|\lambda(P-A)\|^2 + 2\|\lambda(P-A)\| \cdot \|(1-\lambda)(Q-A)\| + \|(1-\lambda)(Q-A)\|^2 = (\lambda\|P-A\| + (1-\lambda)\|Q-A\|)^2 \end{aligned}$$

אי שוויון קושי-שוורץ הוא חזק אם ורק אם P, Q לא קולינאריות ולכן עבור מקרה כזה נקבל :

$$\blacksquare \quad f(\lambda P + (1-\lambda)Q) < \lambda f(P) + (1-\lambda)f(Q)$$

בסדרת האיטרציות, אנחנו קופצים מנקודה לנקודה בחיפוש אחר הפתרון האופטימלי של הבעיה. מכיוון שאנחנו מחפשים נקודה שתביא את f למינימום, נרצה שמכל נקודה נתקדם בכיוון בו קצב השינוי של הפונקציה הוא הכי גדול. ידוע כי הכיוון בוא קצב השינוי הוא הגדול ביותר הוא בכיוון הגרדיאנט, אך מכיוון שאנחנו מחפשים מינימום נגדיר את הגרדיאנט השלילי של f :

$$(1) \quad R(P) = -\vec{\nabla} f = \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} (A_i - P) \quad P \neq A_i$$

וזאת לכל i שנבחר.

$R(P)$ איננו מוגדר בכל נקודה, שכן המכנה מתאפס עבור $P = A_i$. לשם כך, במקרה ואנו נמצאים על אחד מהקודקודים, נרצה להגדיר כיוון בו הפונקציה קטנה באופן הגדול ביותר (כלומר ההשתנות שלה כלפי מטה היא הגדולה ביותר).

$$R_k = \sum_{i \neq k} \frac{w_i}{d_i(A_k)} (A_i - A_k), \quad k = 1, 2, \dots, m \quad \text{נגדיר} :$$

ונגדיר את הגרדיאנט המוכלל עבור קודקוד מסוים A_k להיות :

$$R(A_k) = \max\{|R_k| - w_k, 0\} \left(\frac{R_k}{|R_k|} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

הסבר להגדרה של הגרדיאנט המוכלל

נניח כי אנו נמצאים בקודקוד A_k . נבחן את השינוי מהנקודה A_k לנקודה $A_k + tZ$ עבור $|Z|=1$.

הפונקציה בנקודה $A_k + tZ$ עבור i מסוים :

$$f(A_k + tZ) = w_i \sqrt{(a_{1_i} - a_{1_k} - tz_1)^2 + (a_{2_i} - a_{2_k} - tz_2)^2 + \dots + (a_{n_i} - a_{n_k} - tz_n)^2}$$

לכן :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(A_k + tZ) &= w_i \frac{2(a_{1_i} - a_{1_k} - tz_1)(-z_1) + 2(a_{2_i} - a_{2_k} - tz_2)(-z_2) + \dots + (a_{n_i} - a_{n_k} - tz_n)(-z_n)}{2\sqrt{(a_{1_i} - a_{1_k} - tz_1)^2 + (a_{2_i} - a_{2_k} - tz_2)^2 + \dots + (a_{n_i} - a_{n_k} - tz_n)^2}} = \\ &= -w_i \frac{(A_i - A_k - tZ) \cdot Z}{\|A_i - A_k - tZ\|} \end{aligned}$$

ולכל $i \neq k$:

$$\frac{d}{dt} f(A_k + tZ) = - \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_i - A_k - tZ) \cdot Z}{\|A_i - A_k - tZ\|}$$

נסכם על כל הערכים של i :

$$\frac{d}{dt} f(A_k + tZ) = - \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_i - A_k - tZ) \cdot Z}{\|A_i - A_k - tZ\|} + w_k = \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_k + tZ - A_i) \cdot Z}{\|A_k + tZ - A_i\|} + w_k$$

נחשב את הסכום :

$$\sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_k + tZ - A_i)^T \cdot Z}{\|A_i - A_k - tZ\|} = \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{A_k^T \cdot Z - A_i^T \cdot Z + tZ^T \cdot Z}{\|A_k + tZ - A_i\|} = \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_k - A_i)^T Z + t}{\|A_k + tZ - A_i\|}$$

ועבור $t = 0$ נקבל :

$$\sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_k - A_i)^T Z + t}{\|A_k + tZ - A_i\|} = \sum_{i=1, i \neq k}^m w_i \frac{(A_k - A_i)^T Z}{\|A_k + tZ - A_i\|} = -R_k \cdot Z$$

ובסוף :

$$\left. \frac{d}{dt} f(A_k + tZ) \right|_{t=0} = w_k - R_k \cdot Z$$

וניתן לראות כי השינוי הגדול ביותר יהיה עבור $Z = \frac{R_k}{|R_k|}$ ולכן, עבור בחירת גודל מקסימאלי בין

$$\{ |R_k| - w_k, 0 \}$$

נקבל קצב שינוי גבוה ביותר מהקודקוד A_k .

הערה: בהמשך נראה, כי אם בשלב מסוים בסדרת האיטרציות הגענו אל אחד הקודקודים, מצב זה עלול להיות בעייתי.

טענה 1.6: הנקודה P היא פתרון של הבעיה אם ורק אם $R(P) = 0$.

הוכחה: אם P לא קודקוד, אז מכיוון ש- f קמורה ודיפרנציאבילית התנאי $R(P) = 0$ מהווה תנאי מספיק והכרחי לכך ש- P היא מינימום.

אחרת, נתבונן בשינוי מהקודקוד A_k אל הנקודה $A_k + tZ$. מתקיים :

$$\left. \frac{d}{dt} f(A_k + tZ) \right|_{t=0} = w_k - R_k \cdot Z$$

ולכן השינוי הכי גדול יהיה בכיוון $Z = \frac{R_k}{|R_k|}$ היא נקודת

$$w_k - \frac{R_k^2}{|R_k|} \geq 0$$

מינימום אם ורק אם $w_k - \frac{R_k^2}{|R_k|} \geq 0$ שזה שקול לכך ש: $R(A_k) = 0$ (מהאופן שבו $R(A_k)$ מוגדר).

מכיוון ש- f קמורה התנאי $R(A_k) = 0$ מהווה תנאי מספיק והכרחי לכך ש- A_k תהיה מינימום גלובלי.

■

מכיוון שהתנאי המספיק וההכרחי לכך שהנקודה P היא פתרון הבעיה, ננסה למצוא דרך לחשב את הנקודה P על ידי קיום התנאי $R(P) = 0$ (בכל נקודה בה $R(P)$ מוגדר).

$$\begin{aligned} R(P) = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} (A_i - P) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P = \frac{\sum_i \frac{w_i A_i}{d_i(P)}}{\sum_i \frac{w_i}{d_i(P)}} \end{aligned}$$

נשים לב, כי אין זה פתרון אמיתי עבור הנקודה P , שכן P מופיעה בשני צידי המשוואה. האלגוריתם שהציע וייצפלד הוא למעשה אלגוריתם איטרטיבי אשר בנוי בדיוק מהתנאי שהתקבל עבור $R(P) = 0$:

נגדיר, לכל $P \neq A_i$ סדרת איטרציות באופן הבא: $T: P \rightarrow T(P) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)} A_i}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)}}$

לשם רציפות, נגדיר $T(A_i) = A_i$ לכל $i = 1, \dots, m$.

המטרה היא להראות כי עבור בחירה של נקודה התחלתית P_0 , הסדרה הזו תתכנס אל פתרון הבעיה.

טענה 1.7: הנקודה P (פתרון הבעיה), שייכת אל הקמור של קבוצת הקודקודים A_i .

הוכחה: אם P היא קודקוד-טריוויאלי.

אחרת, נתבונן בסדרת האיטרציות: $P_{k+1} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P_k)} A_i}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P_k)}}$

זהו צירוף קמור של הקודקודים A_i עם מקדמים $\alpha_i = \frac{w_i}{d_i(P)} \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)}$ ולכן:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)}} \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)} \right) = 1$$

■

מסקנה 1.8: אם P היא פתרון של הבעיה, אזי $T(P) = P$. אם P היא לא קודקוד ו- $T(P) = P$ אז P היא פתרון הבעיה.

2. הוכחת ההתכנסות

טענה 2.1 : את סדרת האיטרציות $T(P)$ ניתן לרשום בצורה $T(P) = P + h(P)R(P)$ כאשר

$$h(P) = \prod_i d_i(P) / \sum_k \left(w_k \prod_{i \neq k} d_i(P) \right) - \text{ו- } R(P) \text{ הוא הגרדיאנט השלילי שהוצג מקודם ו-}$$

הוכחה: עבור $m = 3$ נבחר שלושה קודקודים $A_1, A_2, A_3 \in R^n$ ו- $P \in R^n$.

$$h(P) = \frac{d_1(P)d_2(P)d_3(P)}{w_1d_2(P)d_3(P) + w_2d_1(P)d_3(P) + w_3d_1(P)d_2(P)}$$

$$R(P) = \frac{w_1(A_1 - P)}{d_1(P)} + \frac{w_2(A_2 - P)}{d_2(P)} + \frac{w_3(A_3 - P)}{d_3(P)}$$

מכנה משותף וצמצום ב- $d_1(P)d_2(P)d_3(P)$ יניבו את המשוואה :

$$h(P)R(P) = h(P) = \frac{w_1(A_1 - P)d_2(P)d_3(P) + w_2(A_2 - P)d_1(P)d_3(P) + w_3(A_3 - P)d_1(P)d_2(P)}{w_1d_2(P)d_3(P) + w_2d_1(P)d_3(P) + w_3d_1(P)d_2(P)}$$

כעת :

$$P + h(P)R(P) = P + \frac{w_1(A_1 - P)d_2(P)d_3(P) + w_2(A_2 - P)d_1(P)d_3(P) + w_3(A_3 - P)d_1(P)d_2(P)}{w_1d_2(P)d_3(P) + w_2d_1(P)d_3(P) + w_3d_1(P)d_2(P)} =$$

$$= \frac{A_1w_1d_2(P)d_3(P) + A_2w_2d_1(P)d_3(P) + A_3w_3d_1(P)d_2(P)}{w_1d_2(P)d_3(P) + w_2d_1(P)d_3(P) + w_3d_1(P)d_2(P)} =$$

לסיום, נכפול ונחלק כל איבר ב- $d_i(P)$ המתאים ונקבל :

$$P + h(P)R(P) = \frac{\frac{w_1A_1}{d_1(P)} + \frac{w_2A_2}{d_2(P)} + \frac{w_3A_3}{d_3(P)}}{\frac{w_1}{d_1(P)} + \frac{w_2}{d_2(P)} + \frac{w_3}{d_3(P)}} = \sum_i \frac{w_i A_i}{d_i(P)} / \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} = T(P)$$

■

טענה 2.2: אם $T(P) \neq P$ אזי $f(T(P)) < f(P)$.

הוכחה: נגדיר $g(Q) = \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} d_i^2(Q)$. קמורה ממש. נראה כי $T(P)$ הוא המינימום המוחלט (והיחיד) של g .

אכן:

$$g(T(P)) = \sum_i \frac{w_i \|T(P) - A_i\|^2}{\|P - A_i\|} = \sum_i \frac{w_i \left\| \frac{\sum_i \frac{w_i A_i}{\|P - A_i\|}}{\sum_i \frac{w_i}{\|P - A_i\|}} - A_i \right\|^2}{\|P - A_i\|} = 0$$

קל לראות כי $g(Q)$ פונקציה אי שלילית ולכן זהו אכן מינימום מוחלט שלה.

כעת:

$$g(T(P)) = \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} d_i^2(T(P)) < g(P) = \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} d_i^2(P) = f(P)$$

מצד שני:

$$g(T(P)) = \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} [d_i(P) + (d_i(T(P)) - d_i(P))]^2 = f(P) + 2(f(T(P)) - f(P)) + \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} [d_i(T(P)) - d_i(P)]^2$$

נחבר את שתי התוצאות האלו ביחד ונגיע אל אי השוויון:

$$2f(T(P)) + \sum_i \frac{w_i}{d_i(P)} [d_i(T(P)) - d_i(P)]^2 < 2f(P)$$

מכיוון שהסכום בצד שמאל הוא סכום רכיבים אי שליליים נקבל את המסקנה $f(T(P)) < f(P)$.

■

כפי שהוגדר האלגוריתם, אם בשלב כלשהו של סדרת האיטרציות הגענו לקודקוד מסוים, אז האלגוריתם נתקע ומחזיר את הקודקוד הזה כפתרון הבעיה. הדבר עלול להיות בעייתי (כפי שנראה בהמשך) כי ייתכן כי הקודקוד שהגענו אליו הוא לא הפתרון.

נשאלת השאלה, האם הימצאות בסביבה מספיק קרובה לקודקוד מסוים (שאיננו הפתרון) יכולה לגרום לאלגוריתם להיתקע באותה הסביבה ולא לצאת משם. כפי שנוכיח בטענה הבאה, מקרה כזה לא יכול להיות ובסופו של דבר אנחנו נצא מהסביבה הקרובה.

טענה 2.3: יהי M פתרון הבעיה ונניח כי $A_k \neq M$, אזי קיימת $\delta > 0$ כך ש- $0 < d_k(P) \leq \delta$ גורר ש- $d_k(T^s(P)) > \delta$ ו- $d_k(T^{s-1}(P)) \leq \delta$ עבור איזשהו $s \in N$.

הוכחה:

$$T(P) - A_k = P + h(P)R(P) - A_k = h(P) \sum_{i \neq k} \frac{w_i}{d_i(P)} (A_i - P) + \left(\frac{h(P)w_k}{d_k(P)} - 1 \right) (A_k - P)$$

$$\left| \sum_{i \neq k} \frac{w_i}{d_i(A_k)} (A_i - A_k) \right| > w_k : A_k \neq M$$

הסבר: זהו הגרדיאנט השלילי של הפונקציה שהוגדר בקודקוד A_k . מכיוון שהנחנו $A_k \neq M$ הוא איננו מתאפס ומתקיים $|R_k| = \max\{|R_k| - w_k, 0\} (R_k / |R_k|)$.

$$\text{לכן קיימים } \delta_1 > 0 \text{ ו- } \varepsilon > 0 \text{ כך ש: } \left| \sum_{i \neq k} \frac{w_i}{d_i(P)} (A_i - P) \right| \geq (1 + 2\varepsilon)w_k \text{ אם } d_k(P) \leq \delta_1$$

$$\lim_{P \rightarrow A_k} \frac{h(P)w_k}{d_k(P)} = 1 \text{ טענת עזר:}$$

הוכחת הטענה: כפי שהוגדר $h(P)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{h(P)w_k}{d_k(P)} &= \lim_{P \rightarrow A_k} w_k \prod_i d_i(P) / d_k(P) \sum_k \left(w_k \prod_{i \neq k} d_i(P) \right) = \\ &= \lim_{P \rightarrow A_k} \left(w_k d_1(P) d_2(P) \dots d_k(P) \dots d_m(P) / d_k(P) \sum_k \left(w_k \prod_{i \neq k} d_i(P) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{P \rightarrow A_k} \frac{h(P)w_k}{d_k(P)} = \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{w_k \prod_{i \neq k} d_i(P)}{w_k \prod_{i \neq k} d_i(P)} = 1 \text{ מכיוון ש- } \lim_{P \rightarrow A_k} d_k(P) = 0 \text{ נקבל:}$$

$$0 < d_k(P) \leq \delta_2 \text{ אם } \left| \frac{h(P)w_k}{d_k(P)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \text{ לפי טענת העזר, קיימת } \delta_2 > 0 \text{ כך ש:}$$

נבחר $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, לכן עבור $0 < d_k(P) \leq \delta$ נקבל:

$$d_k(T(P)) > h(P)(1+2\varepsilon)w_k - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}d_k(P) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right)(1+2\varepsilon)w_k - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}d_k(P) = (1+\varepsilon)d_k(P)$$

מכיוון ש: $d_k(P) > 0$ אז $(1+\varepsilon)^t d_k(P) > \delta$ עבור איזשהו $t \in N$, לכן, $d_k(T^s(P)) > \delta$ עבור איזשהו $s \in N$ ו- $d_k(T^{s-1}(P)) \leq \delta$. ובכך הושלמה ההוכחה.

$$\lim_{P \rightarrow A_k} \frac{d_k(T(P))}{d_k(P)} = \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{|R_k|}{w_k} \quad \text{טענה 2.4}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{d_k(T(P))}{d_k(P)} &= \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{\|T(P) - A_k\|}{\|P - A_k\|} = \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{\left\| \sum_{i=1}^m \frac{w_i A_i}{\|P - A_i\|} / \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\|P - A_i\|} - A_k \right\|}{\|P - A_k\|} = \\ &= \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{\left\| \sum_{i=1}^m \frac{w_i A_i}{\|P - A_i\|} / \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\|P - A_i\|} - \sum_{i=1}^m \frac{w_i A_k}{\|P - A_i\|} / \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\|P - A_i\|} \right\|}{\|P - A_k\|} = \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{\left\| \sum_{i=1}^m \frac{w_i (A_i - A_k)}{\|P - A_i\|} \right\|}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i \|P - A_k\|}{\|P - A_i\|}} = \\ &= \frac{\lim_{P \rightarrow A_k} \left\| \frac{w_i (A_i - A_k)}{\|P - A_i\|} \right\|}{\lim_{P \rightarrow A_k} \frac{w_i \|P - A_k\|}{\|P - A_i\|}} = \frac{\|R_k\|}{w_k} \end{aligned}$$

■

טענה 2.5: תהי P_0 נקודה שרירותית ותהי M פתרון הבעיה. נגדיר

$$P_r = T^r(P_0), \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{אם לכל } r, P_r \text{ היא לא קודקוד אזי } \lim_{r \rightarrow \infty} P_r = M$$

הוכחה: נניח כי P_0 איננה פתרון הבעיה.

הסדרה P_r נמצאת בתוך ה-convex hull של קבוצת הקודקודים, שהיא קבוצה סגורה וחסומה,

לכן לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס קיימת ל- P_r תת סדרה מתכנסת כך ש: $\lim_{r \rightarrow \infty} P_{r_i} = P$

נראה כי בכל המקרים $P = M$.

מקרה 1: אם $P_{r+1} = T(P_r) = P_r$ עבור r כלשהו אזי הסדרה קבועה מאותו מקום והלאה

ומתקיים $P = P_r$. מכיוון שהנחנו כי P_r איננה קודקוד אזי $P = M$ לפי מסקנה 1.8

אחרת, לפי טענה 2.2 מתקיים:

$f(P_0) > f(P_1) > f(P_2) > \dots > f(M)$ לכן: $\lim_{r \rightarrow \infty} (f(P_{r_i}) - f(T(P_{r_i}))) = 0$ כי היא מונוטונית

יורדת. מהרציפות של T נובע: $\lim_{l \rightarrow \infty} T(P_{r_i}) = T(P)$ ולכן $f(P) - f(T(P)) = 0$

לפי טענה 2.2 נובע ש: $P = T(P)$. אם P איננה קודקוד אזי $P = M$ לפי מסקנה 1.8.

המקרה האחרון אותו נותר לבדוק הוא כאשר $P = A_k$ עבור k כלשהו.

אם A_k איננה הפתרון, נבחר δ כך שיתקיימו התנאים של טענה 2.3 ונבחר את תת הסדרה P_{r_i} כך ש: $P_{r_i} \rightarrow A_k$ ומתקיים $d_k(T(P_{r_i})) > \delta$ אבל אז נובע שהיחס $d_k(T(P_{r_i}))/d_k(P_{r_i})$ איננו חסום מה שסותר את טענה 2.4 לכן בהכרח A_k היא הפתרון.

■

3. מהירות ההתכנסות

הגדרה תהי $\{x_n\}$ סדרת נקודות כך ש: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. סדר ההתכנסות של $\{x_n\}$ הוא מספר

$R > 0$, אם קיים מספר $0 \leq A < \infty$ כך ש: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^R} = A$. נקרא קבוע ההתכנסות

האסימפטוטי.

מקרים פרטיים בהם אעסוק בחלק זה:

א. אם $0 < A < 1$ אז אומרים כי ההתכנסות היא ליניארית.

ב. אם $A = 0$ אז אומרים כי ההתכנסות היא סופר-ליניארית

ג. אם $A = 1$ אז אומרים כי ההתכנסות היא תת-ליניארית.

מטרתו של חלק זה היא להראות כי במקרה בו סדרת האיטרציות מתכנסת אל פתרון שאיננו על אחד הקודקודים, אז ההתכנסות היא תמיד ליניארית. אמנם, אם ההתכנסות היא לפתרון שנמצא על אחד מהקודקודים, אז ההתכנסות יכולה להיות ליניארית, סופר-ליניארית או תת-ליניארית

וזה תלוי ביחס $\frac{|R_k|}{w_k}$.

3.1 התכנסות אל פתרון שאיננו על אחד הקודקודים.

נתבונן בסדרת האיטרציות $T: R^n \rightarrow R^n$ בסביבה של הפתרון $\bar{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

המטרה היא להראות שכאשר ההתכנסות היא לא לקודקוד, אזי ההתכנסות תמיד ליניארית, כלומר קיימים קבועים אסימפטוטיים $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ כך שמתקיים:

$$\lambda_1 |P^r - \bar{P}| + O(|P^r - \bar{P}|^2) \leq |P^{r+1} - \bar{P}| \leq \lambda_2 |P^r - \bar{P}| + O(|P^r - \bar{P}|^2)$$

מכיוון ש- P לא קודקוד, $T(P)$ גזירה ב- \bar{P} (אינסוף פעמים). נתבונן בפיתוח טיילור מסדר ראשון:

$$T(P) = T(\bar{P}) + T'(\bar{P})(P - \bar{P}) + O(|P - \bar{P}|^2)$$

ניעזר בעובדה כי \bar{P} נקודת שבת של $T(P)$ ונקבל:

$$T(P) = \bar{P} + T'(\bar{P})(P - \bar{P}) + O(|P - \bar{P}|^2)$$

כאשר $T'(\bar{P})$ היא מטריצת יעקבי של ההעתקה המחושבת בנקודה \bar{P} (מטריצת הנגזרות החלקיות) ומתקיים:

$$T'(\bar{P}) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(\bar{P})} \right)^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{P} - a_j)(\bar{P} - a_j)^T$$

הסבר :

$$(1) \quad T(P) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(P) = \sum_{i=1}^m \frac{w_i a_i}{d_i(P)} \Big/ \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)}$$

נסמן :

$$(2) \quad T'(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial T_n}{\partial x_1} & \frac{\partial T_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

כאשר :

$$(3) \quad T_k(P) = \sum_{i=1}^m \frac{w_i a_{ik}}{d_i(P)} \Big/ \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(P)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

כעת נחשב את הנגזרת החלקית לפי אחד המשתנים :

$$(4) \quad \frac{\partial T_k}{\partial x_r} = \frac{\left(\sum_{i=1}^m w_i a_{ik} D_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i a_{ik}}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m w_j D_j \right)}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right)^2}$$

$$(5) \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{1}{d_i} \right) = -\frac{x_m - a_{im}}{d_i^3} \quad \text{כאשר :}$$

כעת, נחשב את המונה ב- (4) :

$$(6) \quad \begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i a_{ik}}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j (x_r - a_{jr})}{d_j^3} \right) - \left(\sum_{i=1}^m w_i a_{ik} \frac{(x_r - a_{im})}{d_j^3} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j} \right) = \\ & = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i a_{ik}}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j (x_r - a_{jr})}{d_j^3} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m w_j a_{jk} \frac{(x_r - a_{jr})}{d_j^3} \right) \end{aligned}$$

מכיוון ש- \bar{P} מינימום של הפונקציה $f(P) = \sum_{i=1}^m w_i d_i(P)$, נחשב את (6) בנקודה \bar{P} . נשים לב כי מתקיים :

$$(7) \quad \nabla f(\bar{P}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m w_i \frac{\bar{x}_1 - a_{i1}}{d_i(\bar{P})} \\ \sum_{i=1}^m w_i \frac{\bar{x}_2 - a_{i2}}{d_i(\bar{P})} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m w_i \frac{\bar{x}_k - a_{ik}}{d_i(\bar{P})} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m w_i \frac{\bar{x}_n - a_{in}}{d_i(\bar{P})} \end{bmatrix} = 0$$

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m \frac{w_i a_{ik}}{d_i} = \bar{x}_k \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \quad \text{ולכן :}$$

כעת, נציב את (8) ב- (6) עבור הנקודה \bar{P} :

$$(9) \quad \begin{aligned} & \bar{x}_k \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j (\bar{x}_r - a_{jr})}{d_j^3} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m w_j a_{jk} \frac{(\bar{x}_r - a_{jr})}{d_j^3} \right) = \\ & = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3} (\bar{x}_k - a_{jk}) (\bar{x}_r - a_{jr}) \right) \end{aligned}$$

לסיום, נציב את (9) לתוך (4) ונקבל :

$$\frac{\partial T_k}{\partial x_r} = \frac{\left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3} (\bar{x}_k - a_{jk}) (\bar{x}_r - a_{jr}) \right)}{\left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right)^2} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i} \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3} (\bar{x}_k - a_{jk}) (\bar{x}_r - a_{jr}) \right)$$

מטריצת היעקבי המתקבלת היא מטריצה סימטרית מוגדרת אי שלילית. לשם פשטות, אנתח את מהירות ההתכנסות מהמקרה בו $n = 2$, אזי המטריצה תהיה מהצורה :

$$T'(\bar{P}) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i(\bar{P})} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})^2 & \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})(\bar{x}_2 - a_{j2})^2 \\ \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})(\bar{x}_2 - a_{j2})^2 & \sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_2 - a_{j2})^2 \end{pmatrix}$$

לשם המשך הניתוח, ניעזר בתכונות הבאות (הידועות מאלגברה ליניארית) :

1. כל הערכים העצמיים של מטריצה סימטרית הם ממשיים.
2. משפט שור : כל מטריצה ריבועית ניתן לשלש יוניטרית, כלומר אם A מטריצה ריבועית אז קיימת מטריצה יוניטרית U ומטריצה משולשת עליונה T כך ש: $A = UTU^H$ ובאלכסון של T נמצאים הערכים העצמיים של A .

3. ליכסון יוניטרי: מטריצה ריבועית A נקראת לכסינה יוניטרית אם קיימת מטריצה יוניטרית U ומטריצה אלכסונית Λ כך ש: $A = U\Lambda U^J$. A מורכבת מערכים עצמיים של A .

4. מטריצות יונטריות שומרות נורמה, כלומר אם U יוניטרית אז לכל \bar{x} מתקיים: $\|U\bar{x}\| = \|\bar{x}\|$

5. הערכים העצמיים של מטריצה אי שלילית הם מספרים אי שליליים.

נחקור את הערכים העצמיים של המטריצה $T'(\bar{P})$. מתכונות הערכים העצמיים:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(T'(\bar{P})) = 1 \quad (1)$$

(2)

$$0 \leq \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(T'(\bar{P})) = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{d_i^3(\bar{P})} \right)^{-2} \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_2 - a_{j2})^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})(\bar{x}_2 - a_{j2}) \right)^2 \right]$$

נפעיל את אי שוויון קושי-שוורץ על (2) ונקבל:

$$\left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})(\bar{x}_2 - a_{j2}) \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_1 - a_{j1})^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{d_j^3(\bar{P})} (\bar{x}_2 - a_{j2})^2 \right)$$

השוויון מתקבל אם ורק אם הנקודות קולינאריות כלומר $(\bar{x}_1 - a_{j1}) = c(\bar{x}_2 - a_{j2})$, $c \in \mathbb{R}$ אבל זו סתירה לכך שהנחנו בניתוח הבעיה כי הקודקודים אינם קולינאריים ולכן אי השוויון הוא חזק ונקבל כי הדטרמיננטה היא חיובית ומתקיים $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. המסקנה המתקבלת מהעובדה הזאת היא $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 1$.

$$P^{r+1} = T(P^r) = \bar{P} + T'(\bar{P})(P^r - \bar{P}) + O\left(\|P^r - \bar{P}\|^2\right)$$

שתמש בהגדרה עבור נורמה של מטריצה: $|A| = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |y|=1}} |Ay|$ ונקבל:

$$\frac{1}{2} \leq \lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} < 1, \quad \|P^{r+1} - \bar{P}\| \leq \lambda_{\max} \|P^r - \bar{P}\| + O\left(\|P^r - \bar{P}\|^2\right)$$

ובך הושלם כיוון אחד של אי השוויון.

עבור הכיוון השני, ניעזר בתכונות של ליכסון יוניטרי שהוזכרו לעיל. לפי התכונות, קיימת

$$U^T T'(P) U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ כך ש: } U$$

נניח כי $P = UP^*$ הוא הוקטור המתקבל מהעתקה של הוקטור P ביחס לוקטורים העצמיים של המטריצה $T'(P)$ (שהם העמודות של המטריצה U) נקבל :

$$\overline{P^{*r+1}} = \overline{P^{*r}} + U(P^{*r} - \overline{P^*}) + O(|P^r - \overline{P}|^2)$$

נקבל :

$$\begin{aligned} |P^{r+1} - \overline{P}|^2 &= |P^{*r+1} - \overline{P^*}|^2 = \lambda_1^2 (P_1^{*r} - \overline{P_1^*}) + \lambda_2^2 (P_2^{*r} - \overline{P_2^*}) + O(|P^r - \overline{P}|^3) \geq \\ &\geq \lambda_{\min}^2 |P^{*r} - \overline{P^*}|^2 + O(|P^r - \overline{P}|^3) \end{aligned}$$

מכיון ש: $0 < \lambda_{\min} \leq \frac{1}{2}$ נקבל :

$$|P^{r+1} - \overline{P}| \geq \lambda_{\min} |P^r - \overline{P}| + O(|P^r - \overline{P}|^2)$$

ובכך הושלם אי השוויון לכיוון השני.

3.2 התכנסות אל פתרון שנמצא באחד הקודקודים

נחזור אל ההגדרה של הגרדיאנט המוכלל שהוגדר בחלק 1 :

$$R(A_k) = \max\{|R_k| - w_k, 0\} (R_k / |R_k|), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

כפי שהוכח בחלק 1 התנאי $R(\overline{P}) = 0$ הוא מספיק והכרחי לכך שהנקודה \overline{P} היא מינימום של f

$$\lim_{P \rightarrow A_k} \frac{d_k(T(P))}{d_k(P)} = \lim_{P \rightarrow A_k} \frac{|R_k|}{w_k}$$

ובנוסף לפי טענה 2.4 מתקיים

משני התנאים האלו נובע כי \overline{P} היא מינימום של f אם ורק אם $R_k \leq w_k$ וגם

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|P^{r+1} - A_k|}{|P^r - A_k|} = \frac{|R_k|}{w_k}$$

כעת, ניתן לראות כי ההתכנסות תלויה ביחס $\frac{|R_k|}{w_k}$. אם היחס מקיים $0 < \frac{|R_k|}{w_k} < 1$ אז ההתכנסות

היא ליניארית, עם קבוע התכנסות אסימפטוטי $\frac{|R_k|}{w_k}$. אם $\frac{|R_k|}{w_k} = 0$ אז ההתכנסות היא סופר-

ליניארית ואם $\frac{|R_k|}{w_k} = 1$ אז ההתכנסות היא תת-ליניארית.

4. דוגמאות נומריות ודיון בסוגיית ההתכנסות

בחלק זה של הפרויקט ערכתי מספר דוגמאות נומריות בכדי לראות את התכנסות סדרת האיטרציות של וייצפלד אל הפתרון.

בנוסף, חקרתי מספר דוגמאות בהן ההתכנסות איננה מתרחשת, תוך דיון והבנה של התנאי המספיק להתכנסות השיטה עבור כל נקודה התחלתית שנבחר P_0 .

4.1 דוגמאות להתכנסות השיטה אל פתרון הבעיה

4.1.1 דוגמא

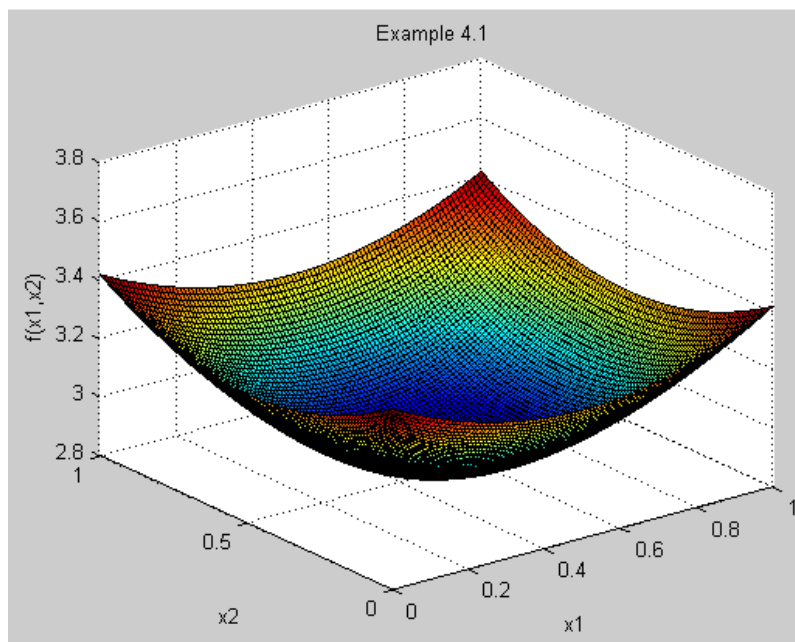
בדוגמא הראשונה לקחתי מקרה פשוט בו ניתן לחזות את הפתרון של הבעיה מראש. ניקח את ארבעת הקודקודים במישור: $A_1(0,0)$ $A_2(1,0)$ $A_3(1,1)$ $A_4(0,1)$ היוצרים ריבוע. נקבע את המשקלים של כל נקודה להיות שווים $w_i = 1$, $i = 1,2,3,4$.

מהסימטריות של הבעיה, קל לנחש כי הפתרון יתקבל באמצע הריבוע, כלומר בנקודה $P(0.5,0.5)$.

נקבע כנקודה התחלתית: $P_0(0.98,1.1)$.

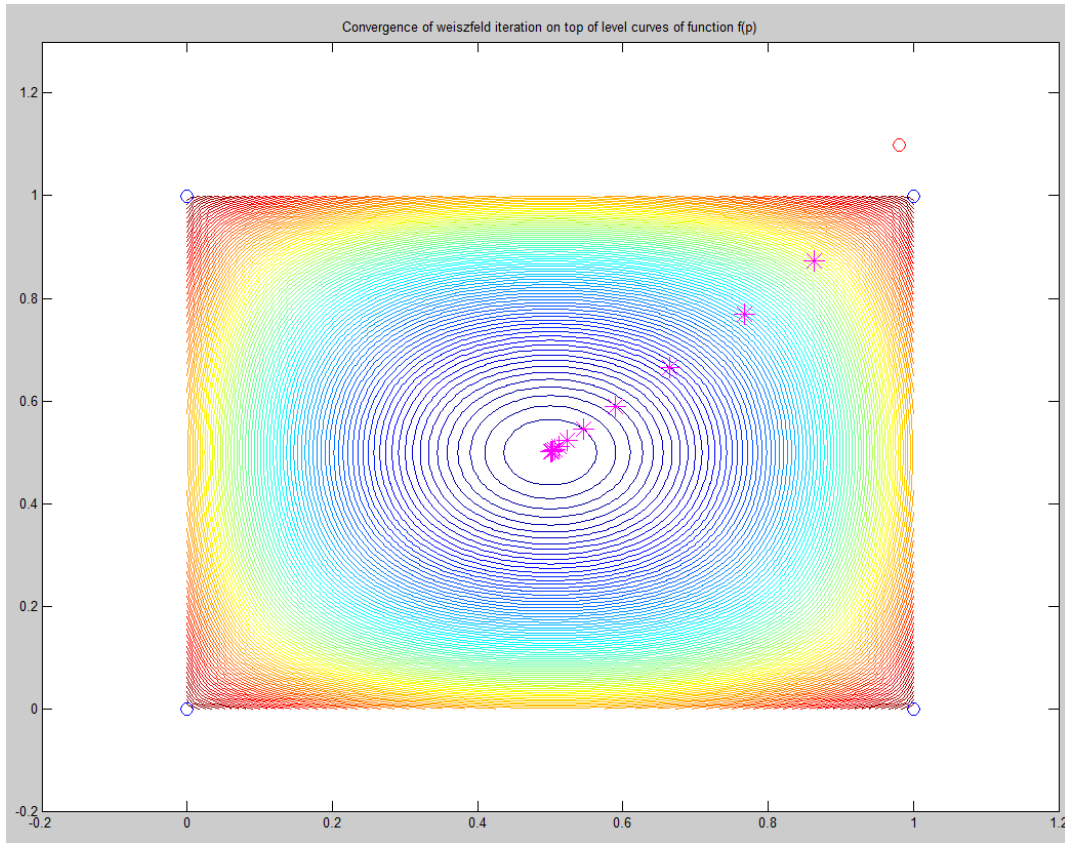
הפונקציה תהיה מהצורה:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2} + \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2}$$



איור 4.1.1.1: שרטוט של הפונקציה $f(p)$

ניתן לראות כי הפונקציה אכן משיגה את הערך המינימאלי שלה בנקודה יחידה. באופן נומרי ב-matlab שרטטתי את קווי הגובה של הפונקציה ואת התכנסות של איטרציות וייצפלד על פני קווי הגובה.

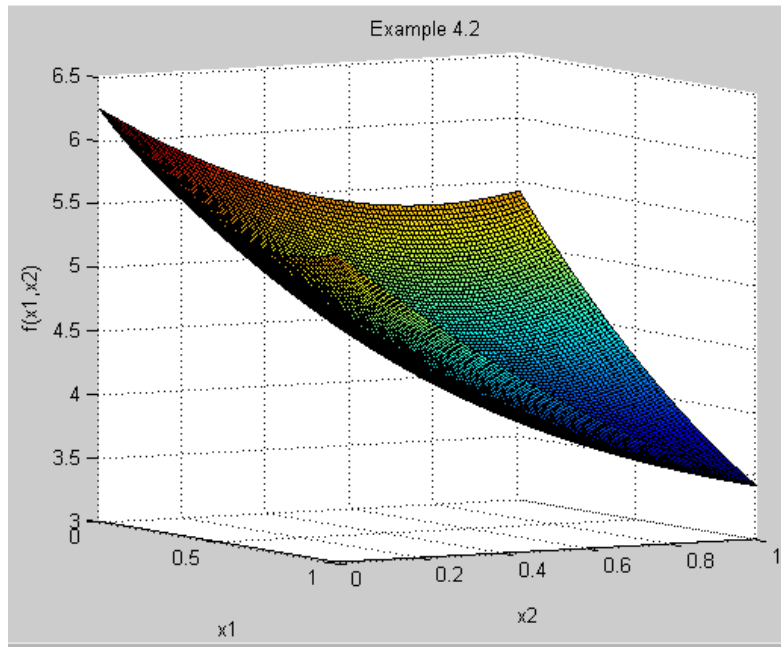


איור 4.1.1.2 : התכנסות איטרציות וייצפלד על פני קווי הגובה של הפונקציה $f(p)$

הנקודות הכחולות הן הקודקודים הקבועים. הנקודה האדומה מסמנת את הנקודה ההתחלתית P_0 . הכוכביות הוורודות מסמנות את סדרת האיטרציות. קווי הגובה האדומים מסמנים ערכים גבוהים של הפונקציה $f(p)$ וקווי הגובה הכחולים מסמנים ערכים נמוכים של הפונקציה $f(p)$.

דוגמא 4.1.2

נתבונן בקבוצת הקודקודים $A_1(0,0)$ $A_2(1,0)$ $A_3(1,1)$ $A_4(0,1)$ הזוהה לקבוצה בבעיה 4.1.1. נשנה את המשקל של הקודקוד A_3 להיות 3. בדוגמא זו נראה כיצד שינוי במשקל של נקודה תשנה את הצורה של הפונקציה $f(P)$. קל להבין כי הפתרון יימשך לכיוון הקודקוד עם המשקל הגדול יותר מכיוון שהפונקציה היא אי-שלילית.



איור 4.1.2.1 הפונקציה $f(P)$

4.2 בעיות העלולות להופיע בסדרת האיטרציות להתכנסות לנקודה שאיננה פתרון

דוגמא 4.2.1

נתבונן בבעיה הבאה ב- R^3 :

יהיו הקודקודים

עם $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (-1,0,0)$, $A_3 = (0,0,0)$, $A_4 = (0,2,0)$, $A_5 = (0,-2,0)$

המשקלים $w_1 = w_2 = w_3 = w_5 = 1$, $w_4 = 3$.

עבור נקודה $P = (x, y, z)$ הפונקציה $f(P)$ תהיה מהצורה:

$$f(P) = \sum_{i=1}^5 w_i d_i(P) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2 + z^2}$$

נניח כי אנחנו בוחרים נקודה התחלתית P_0 מהצורה $P_0 = (0, y, z)$.

שאלת השאלה: האם למערכת $T(P_0) = A_3$ ישנו פתרון?

$$T(P_0) = \frac{A_1}{\|P_0 - A_1\|} + \frac{A_2}{\|P_0 - A_2\|} + \frac{A_3}{\|P_0 - A_3\|} + \frac{3A_4}{\|P_0 - A_4\|} + \frac{A_5}{\|P_0 - A_5\|} \cdot \frac{1}{\|P_0 - A_1\|} + \frac{1}{\|P_0 - A_2\|} + \frac{1}{\|P_0 - A_3\|} + \frac{3}{\|P_0 - A_4\|} + \frac{1}{\|P_0 - A_5\|} = A_3$$

נשים לב כי $A_2 = -A_1$ וכי $A_3 = (0, 0, 0)$ ולכן המשוואה הנ"ל שקולה למשוואה :

$$\frac{3A_4}{\|P_0 - A_4\|} + \frac{A_5}{\|P_0 - A_5\|} = 0$$

נמצא את קבוצת הפתרונות (באם קיימים) של המשוואה הזו :

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{(y-2)^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(y+2)^2 + z^2}} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6\sqrt{(y+2)^2 + z^2} &= 2\sqrt{(y-2)^2 + z^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9[(y+2)^2 + z^2] &= 4[(y-2)^2 + z^2] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 + 5y + 4 + z^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

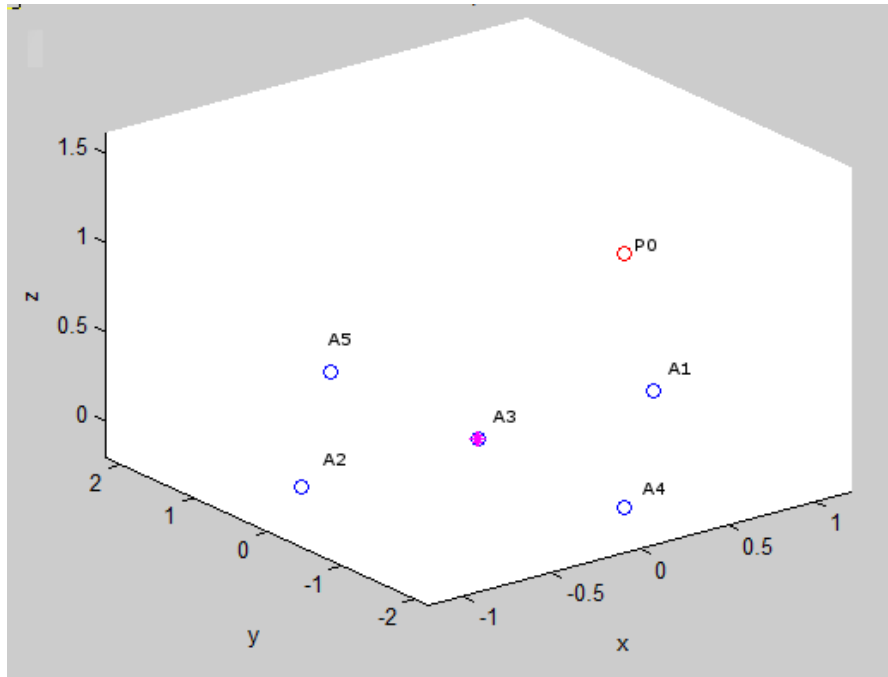
התקבלו אינסוף פתרונות הנמצאים על המעגל $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$

מסקנה: כל בחירה של נקודה התחלתית P_0 מהצורה $P_0 = (0, y, z)$ הנמצאות על המעגל

$$T(P_0) = A_3 \text{ יקיימו } \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$$

אולם : $f(A_3) = \sqrt{1} + \sqrt{1} + 3\sqrt{4} + \sqrt{4} = 10 > 2\sqrt{2} + 1 + 3 + 3 = f(0, 1, 0)$ כלומר הנקודה A_3 איננה נקודת מינימום עבור הבעיה הנ"ל.

באזור הבא אפשר לראות את התכנסות הסדרה אל הנקודה שאיננה פתרון. הפתרון שהתקבל הוא $P = (0, 0.4515 \cdot 10^{-10}, 0)$, עבור נקודה התחלתי על המעגל $P_0 = (0, -2, \sqrt{2})$.



איור 4.2.1.1: התכנסות סדרת האיטרציות לקודקוד שאיננו פתרון הבעיה

שאלת השאלה: מדוע סדרת האיטרציות התכנסה אל נקודה שאיננה הפתרון?

בטענה 2.5 העוסקת בהתכנסות סדרת האיטרציות אל פתרון הבעיה, ישנה הנחה שבאף שלב של סדרת האיטרציות אנחנו לא מגיעים אל קודקוד.

מבניית הסדרה, ברגע שאנחנו מגיעים לקודקוד, אז השיטה מתקבעת ומחזירה את הקודקוד הזה כפתרון. אולם, איך אפשר לדעת כי במקרה כזה הקודקוד ש"נתקענו" עליו הוא אכן פתרון הבעיה?

יתרה מזאת, כיצד אפשר לדעת שלכל בחירה של נקודה התחלתית P_0 האלגוריתם מבטיח לנו שנגיע אל הפתרון של הבעיה?

במאמר על הוכחת ההתכנסות, הוכיח קון כי קבוצת הנקודות ההתחלתיות ה"גרועות", כלומר כאלו שבחירתן תביא אותנו לנקודה שאיננה פתרון הבעיה, היא קבוצה סופית. ואמנם, דוגמא 4.2.1 סותרת את הטענה הזו. התנאי שהנקודות בבעיה יהיו לא קוליניאריות אינו מספיק על מנת להבטיח שקבוצת הנקודות ה"גרועות" היא קבוצה סופית. הטענה הבאה מציגה את התנאי המספיק המבטיח זאת:

טענה: יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n \in R^n$. אם ה-convex hull של קבוצת הקודקודים היא קבוצה ממימד שלם n , אזי קבוצת נקודות ההתחלה ה"גרועות" היא קבוצה סופית.

בדוגמא 4.2.1 קבוצת הקודקודים

$A_1(1, 0, 0)$, $A_2(-1, 0, 0)$, $A_3(0, 0, 0)$, $A_4(0, 2, 0)$, $A_5(0, -2, 0)$ נמצאים כולם על המישור xy שמימדו 2, ולכן קבוצת הנקודות ההתחלתיות אשר יובילו לנקודה שאיננה פתרון הבעיה, היא קבוצה אינסופית.

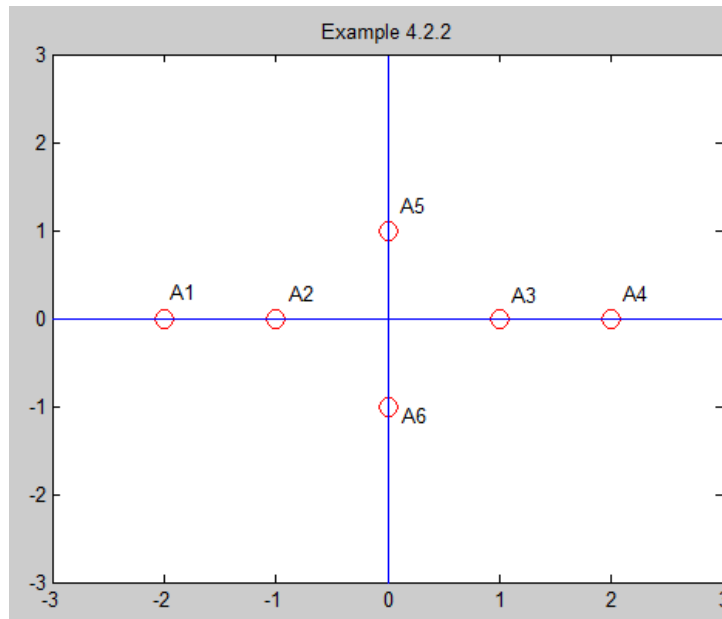
דוגמא 4.2.2

דוגמא זו באה להראות את המצב בו ה-convex hull של קבוצת הקודקודים הוא ממימד מלא אך עדיין אפשר למצוא נקודה התחלתית שתוביל אותנו אל פתרון שגוי.

ב- R^2 יהיו הקודקודים :

$$A_1 = (-2,0), A_2 = (-1,0), A_3 = (1,0), A_4 = (2,0), A_5 = (0,1), A_6 = (0,-1)$$

עם המשקלים $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 1$



איור 4.2.2.1 : קבוצת הקודקודים על המישור xy

ניתן לראות כי אכן ה-convex hull של קבוצת הקודקודים הזאת היא קבוצה ממימד 2. יתרה מזאת, מהסימטריה של הבעיה, קל להבין כי הפתרון מתקבל בראשית הצירים בנקודה $(0,0)$.

בדוגמא זו נראה, כי אפשר למצוא נקודה התחלתית מהצורה $P_0 = (x, 0)$ אשר עבורה יתקיים $T((x, 0)) = A_3$, למרות שהפתרון מתקבל בראשית הצירים ולא בקודקוד הזה.

על מנת להראות שקיים פתרון למשוואה הזו, נציב בסדרת האיטרציות $x_2 = 0$ ונחשב את המרחקים :

$$\begin{aligned} d_1 &= 2 + x \\ d_2 &= 1 + x \\ d_3 &= 1 - x \\ d_4 &= 2 - x \\ d_5 &= d_6 = \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

ונחשב את $T((x, 0))$: $T((x, 0)) = \frac{\sum_{i=1}^6 \frac{w_i A_i}{d_i(P)}}{\sum_{i=1}^6 \frac{w_i}{d_i(P)}}$ מכיוון ש $w_i = 1$ נסמן

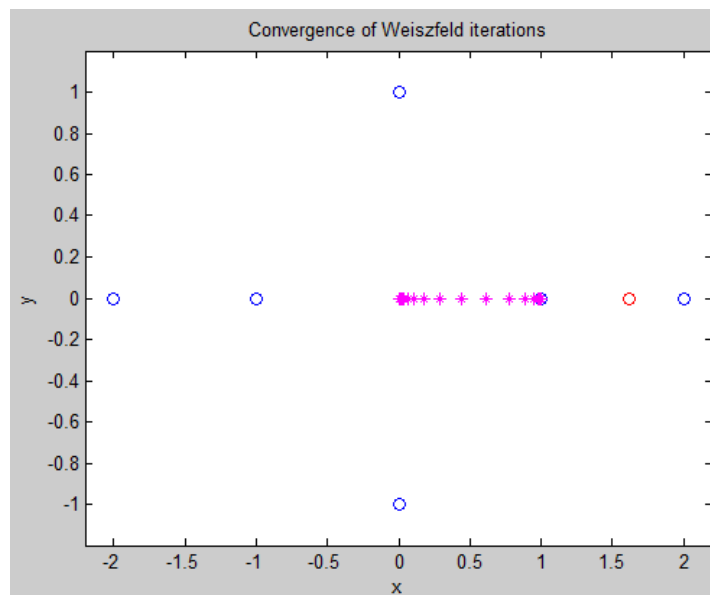
$$\sum_{i=1}^6 \frac{1}{d_i(P)} = k \quad \text{ונחפש פתרון למשוואה :}$$

$$k \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2+x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1+x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1-x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2-x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ואת המשוואה הזאת יש לפתור בשיטות נומריות על מנת למצוא פתרון. לצורך פתרון המשוואה הזאת השתמשתי בשיטת bisection כאשר $a = 0$ ו- $b = 3$.

הנקודה שנמצאה היא בערך $P_0 = (1.62, 0)$, אולם לא לכל דיוק הפתרון שהתקבל היה שגוי.

עבור פתרון עם דיוק של 10^{-3} לערך התקבל הפתרון : $P_0 = (1.620117187500000, 0)$ עם שגיאה $e = 0.001464843750000$ וסדרת האיטרציות התכנסה אל הפתרון האמיתי כפי שאפשר לראות בציור :

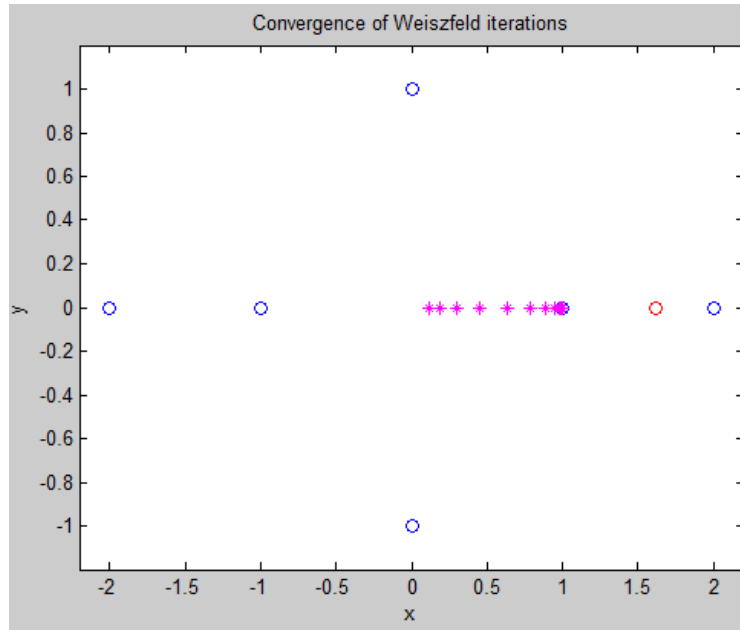


איור 4.2.2.2 : התכנסות סדרת האיטרציות אל הפתרון

בפעם השנייה חישבתי את השורש בדיוק של 10^{-6} לערך. התקבל הפתרון :

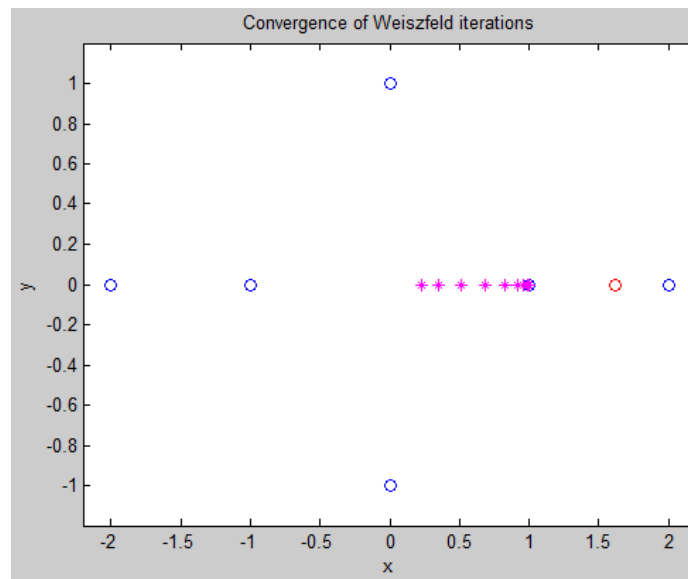
$$P_0 = (1.621390342712402, 0) \quad \text{עם שגיאה } e = 1.430511474609375e - 06$$

גם במקרה הזה סדרת האיטרציות התכנסה אל הפתרון האמיתי כפי שאפשר לראות בציור :



איור 4.2.2.3 : התכנסות סדרת האיטרציות אל הפתרון

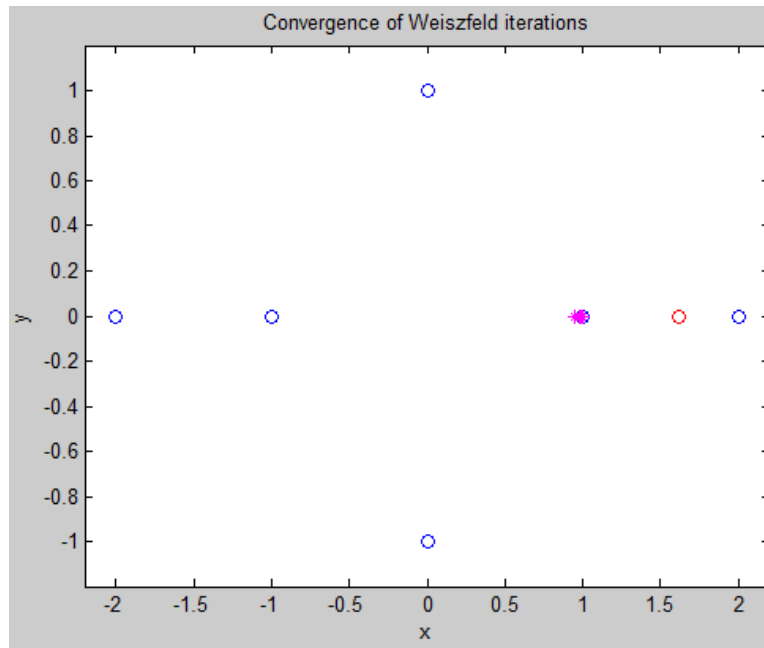
בשלב הבא חישבתי את השורש בדיוק של 10^{-7} לערך ואפשר להתחיל לראות סטייה בפתרון. האלגוריתם התכנס אל הנקודה $P = (0.223727814530265, 0)$. אמנם, במספר גבוה יותר של איטרציות וייצפלד האלגוריתם עדיין התכנס אל הראשית.



איור 4.2.2.4 : התכנסות סדרת האיטרציות אל הפתרון

בשלב הבא מצאתי את השורש בדיוק של 10^{-8} לערך. האלגוריתם התרחק מהפתרון והתכנס אל הנקודה $P = (0.553357508805037, 0)$. אמנם הכפלה של מספר האיטרציות באלגוריתם של וייצפלד קירבה את הפתרון אל הראשית, אך עדיין הסדרה לא התכנסה לפתרון.

בדיוקים גבוהים יותר הסדרה התכנסה אל הקודקוד A_3 למשל עבור דיוק של 10^{-9} אפשר לראות את התכנסות הסדרה אל הקודקוד :



איור 4.2.2.5 : התכנסות סדרת האיטרציות לקודקוד שאיננו פתרון

על ידי הגדלת מספר האיטרציות אפשר לקרב את הפתרון אל הפתרון האמיתי של הבעיה, אמנם אפשר למצוא את השורש בדיוק גבוה יותר ולכן בסופו של דבר נצטרך מספר גדול מאוד של איטרציות על מנת להתקרב לפתרון בערך מקורב, אך עדיין יש סיכוי שהנקודה ההתחלתית תוביל אותנו אל קודקוד שאיננו פתרון.

מטרתה של הדוגמא האחרונה הייתה להראות כי אפשר למצוא נקודה התחלתית "גרועה" גם במקרה בו ה-convex hull של קבוצת הקודקודים היא קבוצה ממימד שלם.

5. סיכום ומסקנות

את הנושא לפרויקט אני בחרתי לאחר שנתקלתי בבעיה זו בספרות ובאינטרנט כבעיית אופטימיזציה למיקומם של ספקי שירות ומתקנים שונים. הבעיה עניינה אותי מכיוון שהיא משמשת בפועל לפתרון בעיות מעשיות וכי היא משלבת כלים רבים אותם רכשתי במהלך הלימודים מתחומים שונים כמו : חשבון אינפיניטיסימלי, אלגברה, אופטימיזציה.

השלב הראשון של העבודה שעסק בהוכחת התכנסות סדרת האיטרציות היה השלב הארוך ביותר והמאתגר ביותר עליו עבדתי במסגרת הפרויקט. התנסיתי לראשונה בחקר של בעיה מעשית ובהוכחה המתבצעת בשלבים אחדים. לא כל שלב היה תמיד טריוויאלי להבנה, והצורך להתעמק ולהבין את המעברים והשלבים בהוכחה היה מאתגר ומעניין במיוחד.

השלב האחרון של העבודה בו ערכתי סימולציות ממוחשבות היה מעניין גם הוא, כי הצלחתי לראות כיצד התיאוריה פועלת הלכה למעשה על בעיות מעשיות וכיצד הבעייתיות שעולה מן האלגוריתם מתבטאת במקרים פרטיים.

האלגוריתם האיטרטיבי שהציע וייצפלד הוא כיום הדרך המקובלת ביותר לפתרון הבעיה של פרמה-וובר. על מנת להתגבר על הבעיות העולות מן האלגוריתם (כמו מקרים של התכנסות לנקודה שאיננה פתרון הבעיה), הוצעו אלגוריתמים משופרים שבסיסם הוא האלגוריתם המקורי של וייצפלד ואליהם הוכנסו שיפורים ושינויים קטנים על מנת להבטיח את ההתכנסות אל הפתרון של הבעיה.

המקרים הפרטיים בהם עסקתי, כך שבחירה של נקודה התחלתית "גרועה" עלולה להוביל אותנו אל פתרון שגוי לבעיה היו מעניינים במיוחד. אין דרך לדעת האם הנקודה אותה בחרנו היא נקודה טובה או נקודה "גרועה", אמנם יש דרך לדעת מתי מובטח כי מספר הנקודות ה"גרועות" שביכולתנו לבחור יהיה מספר סופי. יתרה מזאת, גם בדוגמא של קון (Kuhn) לגבי בחירה של נקודה התחלתית "גרועה" כפי שהוצג בדוגמא 4.4 ההתכנסות אל הקודקוד שאיננו פתרון התרחשה רק כאשר חישבנו את הנקודה ה"גרועה" בדיוק גבוה מאוד של יותר מ- 10^{-7} ולכן, ישנם מקרים שאם נאפשר שגיאה גדולה יותר נוכל להיות בטוחים שהגענו אל פתרון הבעיה על ידי הגדרת השגיאה שאנחנו מאפשרים לסדרת האיטרציות מכל אחד מהקודקודים.

את הבעיה אפשר להכליל גם למרחבים אחרים שאינם אוקלידיים למשל מרחבים נורמיים (כמו מרחבי l_p). תחת נורמות שונות אפשר לחקור את סוגיית ההתכנסות ואת מהירותה וכן כיצד משפיעה כל נורמה על ההתכנסות של סדרת האיטרציות. נושא זה יכול להוות נושא למחקר המשך של הבעיה.

נהייתי מאוד מתהליך העבודה על הפרויקט, על אף הקושי שעלה בנקודות מסוימות. הבעיה היא בעיה מעניינת מאוד מבחינתי ואפשרה לי ליישם את הכלים אותם רכשתי במהלך הלימודים בדרך מאתגרת ומעניינת.

6.1 קוד ה-matlab הפותר את איטרציות וייצפולד

```

function P_end = weiszfeld (A,w,p0)
% the jth column of A is the jth vertice
% the jth column of w is the weight of the jth vertice
% p0 is the starting point |

% if p0 is equal to one of A's vectors, return p0.
if(PisinA(p0,A))
    P_end=p0;
    return;
end

[n,m]=size(A);
iter=20;
P=zeros(n,iter+1);
P(:,1)=p0;

    for iter_index = 2:iter+1
        mone=zeros(n,1); % vector
        mechane=0;      % scalar
        for ii=1:m
            % mone sum
            mone=mone+w(ii)/norm(P(:,iter_index-1)-A(:,ii))*A(:,ii);
            % mechane sum
            mechane=mechane+w(ii)/norm(P(:,iter_index-1)-A(:,ii));
        end
        P(:,iter_index)=mone/mechane;

        % if current point is equal to one of A's, returns the point.
        if(PisinA(P(:,iter_index),A))
            P_end=P(:,iter_index);
            return;
        end
    end
P_end=P(:,end);

%draw plots
if (n==2)
    plot(P(1,1),P(2,1),'ro',A(1,:),A(2:,:),'bo','MarkerSize',10);
    hold on;
    xmin=min([A(1,:) P(1,1)]);xmax=max([A(1,:) P(1,1)]);
    ymin=min([A(2,:) P(2,1)]);ymax=max([A(2,:) P(2,1)]);
    axis([xmin-0.2 xmax+0.2 ymin-0.2 ymax+0.2]);
    plot(P(1,2:end),P(2,2:end),'m*','MarkerSize',15);
    hold off;
elseif (n==3)
    plot3(P(1,1),P(2,1),P(3,1),'ro',A(1,:),A(2,:),A(3:),'bo');
    hold on;
    xmin=min([A(1,:) P(1,1)]);xmax=max([A(1,:) P(1,1)]);
    ymin=min([A(2,:) P(2,1)]);ymax=max([A(2,:) P(2,1)]);
    zmin=min([A(3,:) P(3,1)]);zmax=max([A(3,:) P(3,1)]);
    axis([xmin-0.2 xmax+0.2 ymin-0.2 ymax+0.2 zmin-0.2 zmax+0.2 -3 0]);
    plot3(P(1,2:end),P(2,2:end),P(3,2:end),'m*');
    hold off;
end
end

function r = PisinA (p,A)
% checks if vertical vector p is in one of the vertical vectors in matrix A
% returns TRUE or FALSE
if isempty(intersect(p',A','rows'))
    r=false;
else
    r=true;
end
end

```

6.2 אחד מהפתרונות הגיאומטריים לבעיית פרמה – וובר

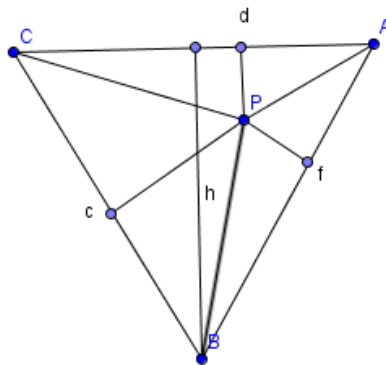
הבעיה: בהינתן שלוש נקודות שאינן קולינאריות במישור, למצוא נקודה רביעית אשר סכום מרחקיה מהנקודות הנתונות יהיה מינימאלי.

הפתרון הגיאומטרי שאציג כאן הוא אחד מהפתרונות הגיאומטריים הרבים שהוצעו לבעיה זו (אמנם לא הראשון שהוצע). שלוש נקודות נתונות במישור אשר אינן קולינאריות, יוצרות משולש.

נניח כי במשולש ABC קיימת נקודה P אשר ממנה רואים את כל צלעות המשולש בזווית של 120° (נקודה כזאת נקראת נקודה שוות-ראייה). המטרה היא למעשה להראות כי במקרה הזה P היא פתרון הבעיה. אמנם, לא תמיד נקודה שכזאת קיימת. נראה כי במקרים שאיננה קיימת, הפתרון מתלכד עם אחד הקודקודים של המשולש. נבצע את הפתרון במספר שלבים.

טענת עזר: מנקודה כלשהי בתוך משולש שווה צלעות מורידים אנכים אל הצלעות. אזי סכום אורכי האנכים הוא קבוע, ושווה לגובה של המשולש.

הוכחה: יהי ABC משולש שווה צלעות שאורך כל אחד מצלעותיו הוא a . נוריד מנקודה P כלשהי אנכים אל שלושת צלעות המשולש ויהי h גובה המשולש (איור 6.2.1)



איור 6.2.1

נחשב את שטח המשולש בשתי דרכים. מצד אחד: $S = \frac{a \cdot h}{2}$

מצד שני, אפשר לחשב את השטח הכולל כסכום שטחי המשולשים הקטנים:

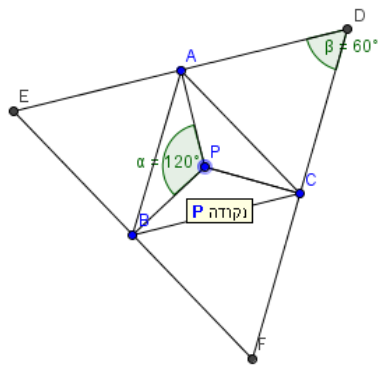
$$S = \frac{a \cdot dp}{2} + \frac{a \cdot pf}{2} + \frac{a \cdot pc}{2} = \frac{a(dp + pf + pc)}{2}$$

השוואה בין שני הביטויים מביאה אל המסקנה $dp + pf + pc = h$ ובכך הושלמה ההוכחה.

הערה: קל לראות כי גם במקרים בהם P נמצאת על אחד מצלעות המשולש או על אחד מהקודקודים, הטענה נשארת נכונה.

טענה: נניח כי במשולש ABC קיימת נקודה שוות-ראייה P . אזי P היא פתרון הבעיה.

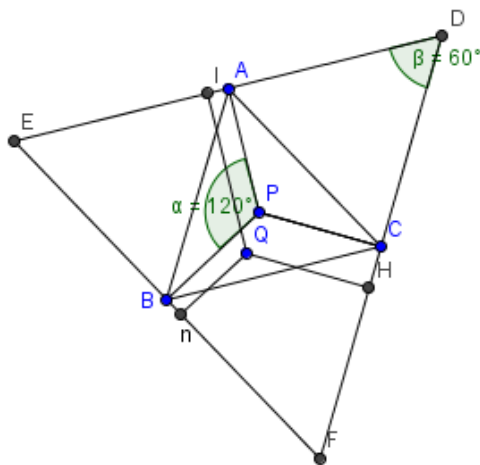
הוכחה: נתבונן במשולש ABC בו P היא נקודה שוות-ראייה. דרך כל אחד מהקודקודים של המשולש, נעביר אנך לקטע המחבר את P עם הקודקוד, כמתואר בציור 6.2.2



איור 6.2.2

המשולש EDF שהתקבל הוא משולש שווה צלעות, שכן כל אחד מהזוויות שלו משלימה סכום זוויות במרובע ל-360 מעלות. לכן, לפי טענת העזר מתקיים: $PA + PB + PC = h$ כאשר h הוא גובה משולש שווה הצלעות EDF .

על מנת להוכיח כי בנקודה P סכום אורכי המרחקים הוא מינימאלי, נבחר נקודה אחרת Q כך שהיא עדיין נמצאת בתוך המשולש ABC . מכיוון ש- Q היא נקודה בתוך משולש EDF , אז גם סכום האנכים מנקודה זו אל צלעות המשולש יהיה שווה לגובה המשולש, כמתואר בציור 6.2.3



איור 6.2.3

נשים לב כי מתקיים $Qi + QH + Qn = h$ לפי טענת העזר.

נחשב את המרחק של הנקודה Q מהקודקודים של משולש ABC .

נניח כי הנקודה n שונה מהנקודה B . נתבונן במשולש ישר הזווית QnB . מכיוון ש- QB יתר במשולש, מתקיים $QB > Qn$.

באופן דומה, אפשר להראות כי $QC > QH$ וכי $QA > Qi$ ולכן:

ההוכחה של הטענה. $QA + QB + QC > Qn + QH + Qi = h$. מכיוון ש: $PA + PB + PC = h$, למעשה הושלמה

נקודה שוות-ראייה לא קיימת בכל משולש, ולמעשה התנאי לקיום נקודה כזו הוא שכל זוויות המשולש ABC צריכות להיות קטנות מ-120 מעלות. במקרה בו אחת מהזוויות שווה ממש 120 מעלות, או גדולה מ-120 מעלות, הנקודה P תתלכד עם הקודקוד הזה.

מאז שנוסחה הבעיה לראשונה על ידי פרמה, הוצעו פתרונות גיאומטריים רבים לבעיה. הפתרון שהצגתי בנספח זה הוא של המתמטיקאי ויוויאני ובחרתי להציג אותה בשל פשטותה היחסית. פתרונות אחרים לבעיה נעזרים בתכונות גיאומטריות כמו סיבובים, מעגלים, משולשים חסומים, אליפסות ועוד המון שיטות אחרות.

- 1) Harold W.Kuhn (1972). A NOTE ON FERMAT'S PROBLEM. Princeton University, Princeton,N.J., U.S.A .
- 2) Jens Vygen (2004/2005). Approximation Algorithms for Facility Location Problems – Lecture Notes. Research Institute for discrete Mathematics, University of Bonn, Bonn, Germany.
- 3) Zvi Drezner & Horst W.Hamacher (2004). Facility Location- Application And Theory. Springer-Verlag Berlin.
- 4) I. Norman Katz (1973). Local Convergence In Fermat's Problem. Washington University, St. Louis, Missouri, U.S.A
- 5) J. Brimberg (1994). The Fermat-Weber location problem revisited. Department of engineering Management, Royal Military College of Canada, Kingston, Ontario, Canada.
- 6) R. Chandrasekaran & A. Tamir (1988). Open Questions Concerning Weiszfeld's For The Fermat-Weber Location Problem. University of texas, Dallas, Tx, U.S.A. New York University, New York,NY, U.S.A & Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.
- 7) Amir Beck & Shoham Sabach (2013). Weiszfeld's Method: Old And New Results. Department of industrial Engineering and Management, Technion-Israel Institute of Technology. School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.