המכללה האקדמית להנדסה
אורט בראודה
ORT BRAUDE COLLEGE

Department of Mathematics

היחידה למתמטיקה

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc) במתמטיקה שימושית

יעילות הקצאות בשווקים עם מוצרים ציבוריים

איתן ליפשיץ

Allocation's efficiency in a pure public good economy

Eitan Lifshits

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (B.Sc)
במתמטיקה שימושית

יעילות הקצאות בשווקים עם מוצרים ציבוריים

איתן ליפשיץ

Allocation's efficiency in a pure public good economy

Eitan Lifshits

Advisor: Dr. Peret Hovav

מנחה: דר' פרץ חובב

Karmiel **כרמיאל**

2011

המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה (ע״ר) רח' סנונית 51 ת.ד. 78 כרמיאל, 21982 טל' 04-9901911 פקס 04-9882016
Ort Braude College, P.O.Box 78, Karmiel 21982, Israel, Tel: 972-4-99901911, Fax: 972-4-9882016

תוכן עניינים

1 מבוא

1.1 הקדמה

בתיאוריה של כלכלה עם מוצר ציבורי יש שימוש בשני שיוויי משקל עיקריים: שיווי משקל נאש ושיווי משקל לינדהל. מניחים שיש מוצר פרטי אחד ומוצר ציבורי אחד עם $n \geq 2$ צרכנים. לכל צרכן יש יחס העדפה אשר מקיים את תנאי הנורמליות החזקים. נניח גם ששני המוצרים (הציבורי והפרטי) הכרחיים עבור כל אחד מהצרכנים. תחת תנאים אלה שני שיוויי המשקל נאש ולינדהל קיימים ויחידים. מאחר והקצאת ש״מ נאש מתאפיינת בחוסר יעילות והקצאת ש״מ לינדהל מתאפיינת בפארטו אופטימליות, נציע הקצאה חדשה, הקצאת ש״מ סחר (לינדהל מעל נאש). ש״מ זה יוצר הקצאה השייכת לליבה ושולטת פארטו על הקצאת ש״מ נאש ונוכיח את קיומו ויחידותו.

הסיבה העיקרית לחפש ש״מ חדש היא שלאחר שמגיעים לש״מ נאש, לא תמיד ניתן להגיע לש״מ לינדהל השולט פארטו על ש״מ נאש, ויתכן וחלק מהצרכנים יעדיפו את הקצאת נאש אשר אינה יעילה.

על המושגים והטענות שהועלו נרחיב ונראה הוכחות ודוגמאות בהמשך.

1.2 סיווג של מוצר ציבורי ומוצר פרטי

חוסר יריבות: זהו מצב שבו צריכה של המוצר ע״י צרכן מסוים אינה מונעת את אפשרות הצריכה של אותו המוצר ע״י צרכנים אחרים. לדוגמא, שידורי לווין בטלוויזיה. העובדה שפרט מסוים צופה בשידורי לווין אינה מונעת מפרטים אחרים לצפות, לכן המוצר מקיים חוסר יריבות.

חוסר בעלות: זהו מצב בו לא ניתן למנוע מחלק מהצרכנים לצרוך את המוצר. מוצרים המקיימים חוסר בעלות מסופקים לכלל האוכלוסייה או שאינם מסופקים כלל. לדוגמא, גן ציבורי, לא ניתן למנוע מפרט מסוים להנות מגן ציבורי, לכן מוצר זה מקיים חוסר בעלות.

הערות:

- שידורי לווין ניתנים לאכיפה ע״י חברות השידור, לכן המוצר אינו מקיים חוסר בעלות.
- בגן משחקים ציבורי, עצם השימוש במתקן מסוים מונע מאחרים את השימוש באותו מתקן, לכן מוצר זה אינו מקיים חוסר יריבות.

מוצר ציבורי הוא מוצר המקיים חוסר יריבות או חוסר בעלות או את שתי התכונות יחד.

מוצר ציבורי טהור: מוצר המקיים את שתי התכונות הנ״ל יחד נקרא מוצר ציבורי טהור.

לדוגמא, כבישים שאינם כבישי אגרה – עצם הנסיעה בכביש אינה מונעת מאחר את השימוש, לכן מתקיים חוסר יריבות. כמו כן לא ניתן לאכוף את השימוש של פרט מסוים בכביש לכן מתקיים חוסר בעלות.

דוגמאות נוספות: שידורי רדיו, תאורת רחוב וביטחון צבאי המסופק לכל תושבי המדינה באופן חופשי ללא יכולת לתת כמות ביטחון שונה עבור מי שסייע לקיומו או לא.

מוצר פרטי: מוצר שלא מקיים אף אחת מהתכונות הנ"ל נקרא מוצר פרטי.

דוגמאות: בגדים, מוצרי מזון, ריהוט, כלי רכב ועוד.

1.3 בעיות כלכליות בשוק עם מוצר ציבורי

בשוק של מוצרים פרטיים הכמות המיוצרת מהמוצר נקבעת ע"י כוחות השוק של ביקוש והיצע. המשק ייצר מהמוצר את הכמות המתקבלת בנקודת החיתוך של עקומות ההיצע והביקוש, כך שלא יהיו לא עודף ביקוש ולא עודף היצע.

במוצר פרטי, מחיר המוצר קבוע לכל הצרכנים וכן צרכן בוחר איזו כמות הוא רוצה לצרוך מהמוצר. לעומת זאת, במוצר ציבורי כמות המוצר המסופקת קבועה לכל הצרכנים. לכן כדי לדעת האם כדאי לייצר מוצר ציבורי, יש לבדוק האם התועלת הכוללת מהמוצר גבוהה מהעלות הכוללת של המוצר. כעת משהחלטנו לייצר את המוצר נותר להחליט כיצד לחלק את התשלום בין הצרכנים השונים. הפתרון המיידי ולכאורה הנכון ביותר חברתית הוא לחלק את התשלום באופן שווה בין הצרכנים. במקרה זה הבעיה שנוצרת היא שלפרטים שהתועלת שלהם מהמוצר הציבורי גדולה מהעלות יש אינטרס להציג תועלת גבוהה יותר מזו שיש להם באמת, בכדי להגדיל את הכמות ו/או האיכות של המוצר הציבורי. צרכנים אלו יודעים שהתועלת שלהם מכל יחידת מוצר ציבורי נוספת גדולה מהתשלום שיצטרכו לשלם, לכן כדאי להם לדווח על תועלת של הרבה יותר ליחידה מהמציאות.

לעומת זאת, במקרה שבו כל פרט משלם על המוצר הציבורי לפי התועלת שלו, לפרטים כדאי לשקר ולהציג תועלת נמוכה מהתועלת האמיתית שלהם כדי שישלמו פחות על המוצר, זה בתנאי שהצרכן חושב ששאר הצרכנים כן ידווחו את התועלת האמיתית שלהם, כך שהמוצר הציבורי כן ייוצר בכמות מסוימת.

המקרה הקיצוני של צרכן שאינו משלם כלל עבור מוצר ציבורי למרות שיש לו תועלת ממוצר זה והוא נקרא "טרמפיסט" (Free rider).

ה"טרמפיסטים" פוגעים בצרכנים בשני אופנים. מצד אחד, מאחר ואלו נאלצים לשלם עבור המוצר הציבורי יותר ממה שהם אמורים מאחר והם משלמים את חלקם של הטרמפיסטים. מצד שני, יכול להיווצר מצב שהמוצר הציבורי מיוצר בכמות קטנה מהכמות האמיתית המבוקשת ובמקרים קיצוניים המוצר הציבורי לא ייוצר כלל.

2 מודל של כלכלה עם מוצר ציבורי טהור

2.1 תיאור המודל

בפרויקט זה נעסוק בכלכלה עם מוצר ציבורי בה יש n צרכנים ושני מוצרים, אחד הוא מוצר פרטי (x) והשני הוא מוצר ציבורי טהור (Y) הנצרך בכמות שווה ע"י כלל הצרכנים. המספר הסופי של הצרכנים ניתן ע"י $N = \{1,2,\dots,n\}$ ומניחים ש - $n \geq 2$.

2.2 ייצוג יחס העדפה ע"י פונקציית תועלת

נסמן סל צריכה $S = (x, Y)$

ונסמן ב - $\gtrsim$ את יחס העדפה - יחס בינארי שמוגדר על מכפלה קרטזית של מרחב הסלים.

על מנת להשתמש בייצוג זה, נשתמש במשפט הבא:

משפט 1: יחס העדפה ניתן לייצוג ע"י פונקציה רק אם מתקיימות שלוש התכונות הבאות: שלמות, רפלקסיביות וטרנזיטיביות.

נניח קיום תנאי המשפט ונגדיר פונקציה ממשית על מרחב הסלים ונסמנה ב - u. u מייצגת את יחס ההעדפה של הצרכן אם בכל מצב ש - $s_1 \gtrsim s_2 \iff u(s_1) \geq u(s_2)$.

באופן מעשי, בהינתן הערכים של המוצר הציבורי והמוצר הפרטי, פונקציית התועלת מראה לנו באופן כמותי, כמה הצרכן נהנה מהם (מביאים לו לתועלת). כמובן שכל צרכן ישאף לתועלת כמה שיותר גדולה.

2.3 מושגים, הגדרות, הנחות וטענות השייכות למודל

קואליציה: נתונה קבוצה של שחקנים $N = \{1,2,\dots,n\}$, קואליציה K של שחקנים היא קבוצה חלקית של N. $V(K)$ הוא התשלום הכולל אותו יכולה קואליציה K לקבל ללא תלות בפעולות שנוקטים שאר השחקנים שאינם בקואליציה.

סבירות פרטית: וקטור תשלומים הוא סביר פרטית אם כל שחקן i יקבל לפחות את מה שהוא יכול לקבל בתור קואליציה עם עצמו, כלומר: $x_i \geq V(\{i\})$ $x_i \in R^n$.

יעילות - פארטו: נאמר שהקצאה היא יעילה פארטו אם לא ניתן לשפר את מצב אחד הצרכנים מבלי לפגוע בצרכן אחר. אם חלוקה מסוימת אינה יעילה, סימן שקיים בזבוז במערכת. מכאן

ששיפור פארטו קיים כאשר קיימת דרך הקצאה שונה כך שכל אחד יקבל (בתועלת) לא פחות ממה שהיה לו קודם.

RPT (Rate of Product Transformation): על כמה יחידות מוצר פרטי יש לוותר כדי ליצור יחידת מוצר ציבורי. במילים אחרות זהו מחיר המוצר הציבורי כאשר הוא נקוב ביחידות מוצר פרטי.

MRS (Marginal Rate of Substitution): שיעור התחלופה השולי, מוגדר ע"י

$MRS = \frac{\partial u/\partial Y}{\partial u/\partial x}$.

כלומר, איך הצרכן מעריך יחידה נוספת של המוצר הציבורי במחיר הפסד יחידות מוצר פרטי.

קוואזי קעירות: פונקציה תקרא קוואזי קעורה אם לכל $z, w \in R^n$ שמקיימים $u(z) \geq u(w)$ אז ולכל $\alpha \in (0,1)$ מתקיים $u(\alpha z + (1-\alpha)w) \geq u(w)$.

הנחה:

(P.1) לכל $Y > 0$, $lim_{x\to 0} MRS_i(x, Y) = 0$

(P.2) לכל $x > 0$, $lim_{Y\to 0} MRS_i(x, Y) = \infty$

הגדרה 1:

וקטור בגודל $(n+1)$ של ערכים אי שליליים $(x_1, x_2, \ldots, x_n; Y) \in R_+^{n+1}$ יקרא הקצאה אפשרית בשוק עם מוצר ציבורי טהור אם מתקיים:

(1) לכל $i \in N$ $x_i \leq \omega_i$

(2) $\sum_{i=1}^n x_i + Y = \sum_{i=1}^n \omega_i$

הגדרה 2:

יהי וקטור $(x_1, x_2, \ldots, x_n; Y)$ הקצאה אפשרית. ההקצאה תקרא הקצאה סבירה פרטית אם לכל צרכן $i \in N$ ולכל $(x_i', y_i') \in R_+^2$ כאשר $x_i' + y_i' = \omega_i$ מתקיים: $u_i(x_i, Y) \geq u_i(x_i', y_i')$.

דגשים לגבי הקצאה סבירה פרטית:

(1) כמות הצריכה מהמוצר הפרטי של כל צרכן היא חיובית ממש.

(2) סך כל התרומה למוצר הציבורי מקיימת: $0 < Y < W = \sum_{i=1}^n \omega_i$.

מכאן שאנו לא שוללים את האפשרות שצרכן $i \in N$ כלשהו הוא צרכן "טרמפיסט" עבורו מתקיים $x_i = \omega_i$. יחד עם זאת הסל ההתחלתי של צרכן מסוים $(\omega_i, 0)$ אינו יכול להיות חלק מהקצאה סבירה פרטית.

3 בניית המודל המתמטי

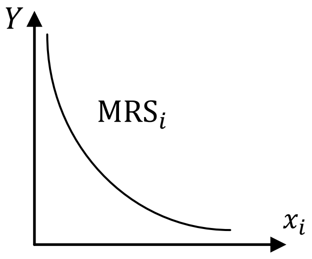
3.1 סימונים

- ❖ לכל צרכן $i \in N$ מעניקים כמות חיובית מהמוצר הפרטי $\omega_i > 0$ וכמות 0 מהמוצר הציבורי הטהור Y. נסמן $W = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ סכום כל המענקים ההתחלתיים של המוצר הפרטי.
- ❖ פונקציית התועלת של צרכן i היא $u_i\ (\mathrm{x}_i, Y)$
- ❖ מוצר ציבורי: מסומן ב - Y ונצרך ע"י כל הצרכנים. כאשר - y_i היא התרומה של צרכן – i למוצר הציבורי ומתקיים: $Y = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i}$.
- ❖ צריכת המוצר הפרטי: הצריכה של המוצר הפרטי ע"י n הצרכנים תסומן ע"י $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- ❖ לכל צרכן $i \in N$ יש יחס העדפה $\succ_i$ המוגדר מעל מרחב סלי הצריכה R_+^2.

3.2 הנחות המודל

- ❖ ההעדפות במודל הינן נורמליות, כלומר עקומות האדישות קמורות חזק לראשית וחלקות, MRS מוגדר בכל נקודה פנימית במישור.

מכאן נקבל:



$$\frac{\partial MRS_i}{\partial x_i} > 0 \qquad (\mathrm{N.1})$$

$$\frac{\partial MRS_i}{\partial Y} < 0 \qquad (\mathrm{N.2})$$

- ❖ פונקציות התועלת הינן קוואזי קעורות, רציפות וחלקות – גזירות מסדר שני.
- ❖ פונקציית הייצור – $f(a, b, \dots)$ היא בעלת תשואה קבוע לגודל, כלומר $f(\lambda a, \lambda b, \dots) = \lambda f(a, b, \dots)$. מכאן נקבל ש - $RPT = const$. אנו נניח ש – $RPT = 1$.

❖ יחס ההעדפה רציף וקמור חזק עבור שני המוצרים. על השפה הצרכן אדיש בין כל סלי הצריכה.

4 <u>שיווי משקל נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי</u>

4.1 תיאור שיווי משקל נאש

שיווי משקל נאש מאופיין במשחק לא שיתופי, כלומר קבלת ההחלטה (קביעת האסטרטגיה) של כל שחקן (צרכן) אינה תלויה בהחלטות שאר הצרכנים. כל צרכן ממקסם את התועלת שלו ע״י בחירת אסטרטגיה אופטימאלית של חלוקת המענק ההתחלתי ω_i בין צריכת מוצר פרטי x_i לבין התרומה לטובת המוצר הציבורי y_i. בנוסף, כל צרכן מניח שתרומת צרכנים אחרים למוצר הציבורי לא מושפעים מהתרומה שלו.

הגדרה 3: ש״מ נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור הוא וקטור של n אסטרטגיות

$s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ כך ש:

(NE.1) $s_i^* = (x_i^*, y_i^*) \in S_i = \{s_i = (x_i, y_i) \in R_+^2 : x_i + y_i = \omega_i\}$.

(NE.2) $Y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$.

(NE.3) לכל צרכן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i = (x_i, y_i) \in S_i$ מתקיים:

$u_i(x_i^*, Y^*) \geq u_i(x_i, Y^* - y_i^* + y_i)$.

מההגדרה הנ״ל נובע כי הקצאת נאש היא אפשרית וכן סבירה פרטית בכלכלה עם מוצר ציבורי.

המשמעות של (NE.3) היא שהאסטרטגיה (x_i^*, y_i^*) של צרכן $i \in N$ הינה ש״מ נאש אם בהינתן כל האסטרטגיות של שאר הצרכנים לא קיימת אסטרטגיה אחרת אשר תביא לתועלת גבוהה יותר. מכאן שהאסטרטגיה (x_i^*, y_i^*) תבטיח מקסימום תועלת כנגד פעולות השחקנים האחרים.

4.2 קיום ש״מ נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור

משפט 2: במשחק עם מספר שחקנים סופי קיים ש״מ נאש.

הוכחת המשפט נובעת מקיום 4 תנאים המבטיחים קיום ש״מ נאש, אותם נביא ללא הוכחה:

(1) המשחק הוא משחק לא שיתופי של n שחקנים בצורה נורמלית – אסטרטגית, וקבוצת השחקנים מסומנת ב N.

(2) קבוצות האסטרטגיות $S_1, S_2, \dots, S_n$ אינן ריקות ומהוות קבוצות קמורות קומפקטיות במרחב אויקלידי.

(3) פונקציות התשלום $U_i(s_1, \dots, s_n)$ רציפות ב $(s_1, \dots, s_n)$.

(4) פונקציות התשלום $U_i(s_1, \dots, s_n)$ קואזי קעורות ב s_i לכל $i \in N$.

כאשר פונקציית התשלום $U_i(s_1, \dots, s_n)$ היא פונקציה המראה לכל שילוב אסטרטגיות, כמה תועלת כל צרכן יקבל.

את ההוכחות המלאות לתנאים הנ״ל ניתן למצוא בעבודת הדוקטורט של פרץ חובב (2010).

4.3 יחידות ש״מ נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור תחת הנחת הנורמליות

משפט 3: ש״מ נאש הוא יחיד תחת הנחת הנורמליות החזקה.

הוכחה: נניח בשלילה ש - $S^* = (S_i^* = (x_i^*, y_i^*))_{i \in N}$ ו– $S^{**} = (S_i^{**} = (x_i^{**}, y_i^{**}))_{i \in N}$ מייצגים שני ש״מ נאש שונים בשוק עם מוצר ציבורי.

לפי ההגדרות וההנחות שלנו $x_i^*, x_i^{**}, Y^*, Y^{**}$ הם חיוביים ממש לכל הצרכנים. נניח ללא הגבלת הכלליות ש - $Y^* \geq Y^{**}$. מכיוון ש $S^* \neq S^{**}$ אז קיים $j \in N$ כך ש - $y_j^* > y_j^{**}$, מכאן, מכיוון שגודל המענק ω_i הוא זהה לשני המקרים נקבל ש $0 < x_j^* < x_j^{**} \leq \omega_j$ ולכן צרכן j הוא בעל אסטרטגיה המהווה נקודה פנימית. מתנאי סדר ראשון עבור בעיית האופטימיזציה של צרכן - j כחלק מש״מ נאש S^* נשווה $MRS_j(x_j^*, Y^*) = 1$. לפי הנחת הנורמליות החזקה: $\partial MRS_j/\partial x > 0$ וגם $\partial MRS_j/\partial Y < 0$ נקבל: $MRS_j(x_j^{**}, Y^{**}) > MRS_j(x_j^*, Y^{**}) \geq MRS_j(x_j^*, Y^*) = 1$. קבלנו כי $MRS_j\left(x_j^{**}, Y^{**}\right) > 1$.

כאמור אצלנו כדי שצרכן מסוים ירצה לתרום למוצר הציבורי צריך להתקיים

$MRS \geq RPT = 1$. לעומת זאת אם $MRS < 1$ הוא לא ירצה לתרום, כלומר כל עוד $MRS > 1$ צרכן j יכול לשפר את מצבו ע״י תרומה למוצר הציבורי. לכן אם צרכן j תורם למוצר הציבורי ונמצא בש״מ נאש אזי מתקיים עבורו $MRS_j^* = 1$ מה שסותר את האי שוויון שקבלנו קודם ולכן לא יתכן ש S^{**} הוא ש״מ נאש ומכאן נקבל שש״מ נאש הוא יחיד.

4.4 בעייתיות נאש

הקצאת נאש אינה פארטו אופטימלית ולכן אינה יעילה. מצב זה בעייתי מכיוון שקיימת הקצאה אחרת שעדיפה על הקצאת נאש, כמו כן כאשר המשק נמצא בנקודת חלוקה לא יעילה, הוא בעצם אינו מנצל את המשאבים בצורה יעילה וקיים בזבוז של במערכת.

4.5 פיתוח הדרך למציאת ש"מ נאש

כל צרכן $i \in N$ מתקיימת בעיית המקסימיזציה הבאה: $max\ u_i(x_i, Y)$

כאשר $\sum_{i \in N} y_i = Y$ $\quad s.t \quad x_i + y_i \leq \omega_i$

נבנה את הלגרנז'יאן:

$$L(x_i, Y, \lambda) = L(x_i, y_1 + \cdots + y_n, \lambda) = u_i(x_i, y_1 + \cdots + y_n) - \lambda(x_i + y_i - \omega_i)$$

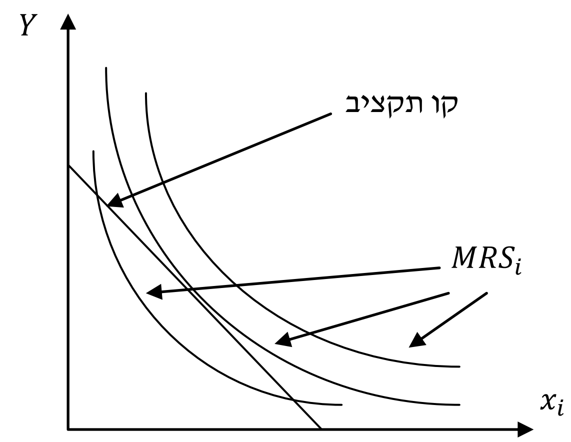
נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial u_i}{\partial y_i} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_i + y_i - \omega_i = 0 \end{cases}$$

לאחר שנחלק בין המשוואה השנייה לראשונה, נקבל את התנאי לאופטימום $\frac{\partial u_i / \partial y_i}{\partial u_i / \partial x_i} = 1$ וכן את קו התקציב $x_i + y_i = \omega_i$.

הערה: במקרה זה $\frac{\partial u_i}{\partial y_i} = \frac{\partial u_i}{\partial Y} \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial u_i / \partial y_i}{\partial u_i / \partial x_i} = MRS_i = 1$

לפי מה שקבלנו, כדי להגיע לש"מ נאש, יש למצוא נקודה שבה לעקומת אדישות וקו התקציב יש את אותו שיפוע (שיפוע 1). כלומר נקודת ההשקה.



4.6 דוגמאות למציאת ש"מ נאש

דוגמא 1 : נתונה כלכלה עם מוצר ציבורי יחיד, עם שני צרכנים $(n = 2)$

עם הנתונים הבאים :

$$u_1(x_1, Y) = x_1Y^2 \quad , \quad \omega_1 = 3$$

$$u_2(x_2, Y) = x_2^2Y \quad , \quad \omega_2 = 3$$

עבור צרכן 1 :

$$max \quad u_1(x_1, Y) = x_1Y^2$$

$$s.t \quad x_1 + y_1 \leq 3$$

$$MRS_1(x_1, Y) = \frac{\partial u/\partial Y}{\partial u/\partial x_1} = \frac{2x_1Y}{Y^2} = \frac{2x_1}{Y} = 1$$

מאחר ו - $Y = y_1 + y_2$ נקבל:

$$\begin{cases} 2x_1 = y_1 + y_2 \\ x_1 + y_1 = 3 \end{cases}$$

עבור צרכן 2 :

$$max \quad u_2(x_2, Y) = x_2^2Y$$

$$s.t \quad x_2 + y_2 \leq 3$$

$$MRS_2(x_2, Y) = \frac{\partial u/\partial Y}{\partial u/\partial x_2} = \frac{x_2^2}{2x_2Y} = \frac{x_2}{2Y} = 1$$

מאחר ו - $Y = y_1 + y_2$ נקבל:

$$\begin{cases} x_2 = 2(y_1 + y_2) \\ x_2 + y_2 = 3 \end{cases}$$

לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל את האסטרטגיות $s_1^* = (1,2)$ ו - $s_2^* = (3,0)$ ולכן הקצאת ש"מ נאש $(x_1^*, x_2^*, Y^*) = (1,3,2)$.

נשים לב שאחרי חישוב נקבל שצרכן 2 ירצה לתרום כמות שלילית לטובת המוצר הציבורי מכאן נסיק שצרכן 2 אינו תורם כלל (כדי שיהיה פתרון אפשרי).

נחשב תועלת לכל צרכן :

$$u_1^*(1,2) = 1 \cdot 2^2 = 4$$

$$u_2^*(3,2) = 3^2 \cdot 2 = 18$$

כעת נעביר $\frac{1}{4}$ יחידת מוצר פרטי מצרכן 1 ומצרכן 2 לטובת המוצר הציבורי. נקבל את ההקצאה : $(x_1, x_2, Y) = \left(\frac{3}{4}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}\right)$.

נחשב תועלות: $u_1(\frac{3}{4},2\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\cdot(2\frac{1}{2})^2 = 4.68$

$$u_2\left(2\frac{3}{4},2\frac{1}{2}\right) = (2\frac{3}{4})^2\cdot 2\frac{1}{2} = 18.9$$

קבלנו תועלת גדולה יותר עבור שני הצרכנים, כלומר קבלנו שיפור פארטו ולכן הקצאת נאש אינה יעילה.

הערה: ההקצאה החדשה שקבלנו, היא אחת מבין הרבה אפשרויות הקצאה אחרות ויתכן שגם היא אינה יעילה, אך מה שהיה חשוב הוא להראות שקיימת הקצאה כזו המשפרת פארטו את הקצאת נאש.

דוגמא 2: $u_1(x_1,Y) = 0.8Y + x_1 \quad , \quad \omega_1 = 12$

$$u_2(x_2,Y) = 0.6Y + x_2 \quad , \quad \omega_2 = 5$$

נקבל: $MRS_1(x_1,Y) = 0.6$, $MRS_2(x_1,Y) = 0.8$

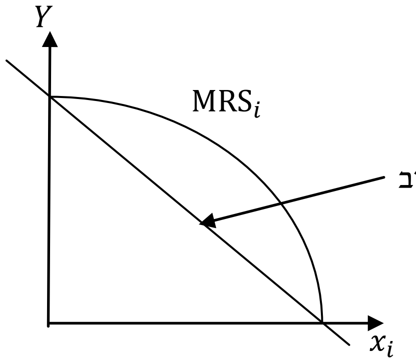
במקרה זה כל צרכן יפתור את הבעיה של עצמו והבחירה שלו תהיה בלתי תלויה בבחירת היריב כי התועלת השולית מהמוצר הציבורי קבועה ונמוכה מאשר מהמוצר הפרטי (לכן כל צרכן ירצה רק מוצר פרטי) . נקבל את ההקצאה $(x_1^*,x_2^*,Y) = (12,5,0)$ עם התועלות: $u_1^* = 12$, $u_2^* = 5$.
הקצאה זו אינה יעילה ונוכל למצוא הקצאה שמשפרת פארטו, למשל $(x_1,x_2,Y) = (0,0,17)$ עם תועלות: $u_1 = 13.6$, $u_2 = 10.2$.

דוגמא 3: $u_i(x_i,Y) = x_i^2 + Y^2$, $\omega_i = 3$, $i = 1,2$

נקבל: $MRS_i(x_i,Y) = \frac{Y}{x_i}$

ניתן לראות שבמקרה זה הנחת הנורמליות אינה מתקיימת, הפונקציה קעורה חזק לראשית.

כלומר מהצורה :



במקרה זה, כל אחד מהצרכנים יבחר באסטרטגיה שנמצאת על אחד הקצוות, מאחר והפונקציה היא סימטרית, הערכים בקצוות יתנו תועלת זהה ונקבל שני ש״מ נאש שונים :

1. $(\mathrm{x}_2^*, \mathrm{Y}^*) = (3{,}0)$, $(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{Y}^*) = (3{,}0)$.

2. $(\mathrm{x}_2^*, \mathrm{Y}^*) = (0{,}3)$, $(\mathrm{x}_1^*, \mathrm{Y}^*) = (0{,}3)$.

מכאן שיחידות ש״מ נאש לא מתקיימת.

הערה : בהמשך נראה שכאשר יחידות נאש לא מתקיימת, אז גם אין משמעות למציאת ש״מ סחר.

5 שיווי משקל לינדהל בכלכלה עם מוצר ציבורי

5.1 תיאור שיווי משקל לינדהל

שיווי משקל לינדהל בשוק עם מוצר ציבורי טהור הוא וקטור בגודל $(2n+1)$ של ערכים ומחירים אי שליליים : $\left(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n; \overline{Y}; \overline{p}_1, \dots, \overline{p}_n\right)$ כך ש :

(LE.1) לכל $N \in$, $\overline{x}_i \le \omega_i$ ו– $\sum_{i=1}^n \overline{x}_i + \overline{Y} = W = \sum_{i=1}^n \omega_i$

(LE.2) לכל $i \in N$ $\overline{x}_i + \overline{p}_i \overline{Y} \le \omega_\mathrm{i}$, כלומר ההקצאה אפשרית.

(LE.3) לכל $i \in N$ מתקיים ש - $u_i(\overline{x}_i, \overline{Y}) \ge u_i(x_i, Y)$ לכל $(x_i, Y) \in R^2$ המקיימים

$$x_i + \overline{p}_i Y \le \omega_\mathrm{i}$$

(LE.4) $\sum_{i=1}^n \overline{p}_i = 1$

כאשר כל צרכן משווה $\overline{p}_i = MRS_i(\bar{x}_i, \overline{Y}_i) \Longleftarrow \sum_{i=1}^n MRS_i(\bar{x}_i, \overline{Y}) = 1$.

טענה 3 : מההגדרות הנ"ל נובע כי הקצאת לינדהל $\left(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n; \overline{Y}\right)$ היא אפשרית וסבירה פרטית.

הוכחה: יהי $i \in N$ ויהי $(x_i', y_i') \in R_+^2$ כך ש $x_i' + y_i' = \omega_i$. לפי (LE.4) $\bar{p}_i \le 1$ מכאן נקבל את האי שוויון $x_i + \overline{p}_i Y \le x_i' + y_i' = \omega_i$ ומכאן ש (x_i', y_i') שייכת לקבוצת התקציב. לכן מ (LE.3) נסיק שההקצאה סבירה פרטית.

טענה 4: לכל $i \in N$ מתקיים $0 < \bar{x}_i < x_i^* \le \omega_i$, $0 < Y^* < \bar{Y} < W$.

הוכחה: נניח בשלילה ש - $\bar{Y} \le Y^*$. מאחר והקצאת לינדהל שונה מהקצאת נאש קיים $j \in N$ כך ש - $\bar{x}_j > x_j^*$, מכאן שלפי הנחת הנורמליות $MRS_j(\bar{x}_j, \bar{Y}) > MRS_j\left(x_j^*, Y^*\right) = 1$ בסתירה ל – (LE.4).

הערה: לכל צרכן, כמות המוצר הפרטי שהוא צורך וכמות המוצר הציבורי שהוא צורך הם חיוביים ממש.

5.2 קיום ש"מ לינדהל בשוק עם מוצר ציבורי

משפט 4 : בשוק עם מוצר ציבורי קיים ש"מ לינדהל.

הערה : ההוכחה מתאימה רק למודל עם מוצר פרטי אחד ומוצר ציבורי אחד.

הוכחה : נגדיר לכל $i \in N$ ולכל $Y \in (0, W]$ את הפונקציה $x_i(Y)$ אשר מקיימת את משוואת התקציב - $x_i(Y) + YMRS_i(\, x_i(Y), Y) = \omega_\mathrm{i}$ ונתבונן בתחום $(0, \omega_i)$. עבור $x_i = \omega_i$ נקבל: $x_i + YMRS_i(x_i, Y) = \omega_i + YMRS_i(\omega_i, Y) > \omega_i$ ועבור $x_i \downarrow 0$ נקבל לפי (P.1) ש – $x_i + YMRS_i(x_i, Y) \longrightarrow 0$ וגם $\omega_i > 0$.

לכן, מהרציפות למשוואה יש לפחות פתרון אחד בתחום $(0, \omega_\mathrm{i})$ לכל $i \in N$ ו - $Y \in (0, W]$. כמו כן, מהנחת הנורמליות נובע כי $x_i + YMRS_i(x_i, Y)$ היא מונוטונית, עולה חזק לפי x_i בקטע $(0, \omega_\mathrm{i})$ מכך נובע שהגדרת הפונקציה היא יחידה ומוגדרת היטב. מ.ש.ל.

5.3 יחידות ש"מ לינדהל בכלכלה עם מוצר ציבורי תחת הנחת הנורמליות

משפט 5 : תחת הנחת הנורמליות בכלכלה עם מוצר ציבורי ש"מ לינדהל הוא יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\left(\overline{x}_1'', \dots, \overline{x}_n''; \overline{Y}''; \overline{p}_1'', \dots, \overline{p}_n''\right)$ ו- $\left(\overline{x}_1', \dots, \overline{x}_n'; \overline{Y}'; \overline{p}_1', \dots, \overline{p}_n'\right)$ הם שני ש״מ לינדהל שונים. נניח בלי הגבלת הכלליות ש - $\overline{Y}' \geq \overline{Y}''$. לפי התנאים

$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{\overline{p}_i'} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{\overline{p}_1''} = 1$. יהי $i \in N$ כך ש: $\overline{p}_i' \geq \overline{p}_i''$ אז לפי קו התקציב בשני המקרים ω_{i}=$\overline{x}_i' + \overline{p}_i'\overline{Y}' = \overline{x}_i'' + \overline{p}_i''\overline{Y}''$ נקבל כי $\overline{x}_i' \leq \overline{x}_i''$ לפי הנחת הנורמליות נקבל

$\overline{p}_i' = MRS_i\left(\overline{x}_i', \overline{Y}'\right) \leq MRS_i\left(\overline{x}_i'', \overline{Y}''\right) = \overline{p}_i''$ כלומר $\overline{p}_i' \leq \overline{p}_i''$ ולכן נקבל ש - $\overline{p}_i' = \overline{p}_i''$.

מכאן שעבור כל צרכן $i \in N$ מתקיים $\overline{p}_i' = \overline{p}_i''$. ולכן הבחירה של כל הצרכנים תהיה זהה, כלומר שני הש״מ מתלכדים. מ.ש.ל.

בעייתיות לינדהל: בהקצאה שנקבל בש״מ לינדהל, יתכן שמבחינת תועלת, חלק מהצרכנים יעדיפו את ש״מ נאש. מאחר וש״מ לינדהל משתמש בהצמדת מחירים לכל צרכן בהתאם ליחס ההחלפה שלו הוא יכול ליצור התנגדות מצד חלק מהצרכנים.

5.4 פיתוח הדרך למציאת שיווי משקל לינדהל

כל צרכן $i \in N$ מתקיימת בעיית המקסימיזציה הבאה:

$$\max u_i(x_i, Y)$$

$$s.t \quad x_i + p_i Y \leq \omega_i$$

נבנה את הלגרנז׳יאן:

$$L(x_i, Y, \lambda) = u_i(x_i, Y) - \lambda(x_i + p_i Y - \omega_i)$$

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = \dfrac{\partial u_i}{\partial Y} - \lambda p_i = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_i + p_i Y - \omega_i = 0 \end{cases}$$

לאחר שנחלק בין המשוואה השנייה לראשונה, נקבל את התנאי לאופטימום $\frac{\partial u_i/\partial Y}{\partial u_i/\partial x_i} = p_i$ וכן את קו התקציב $x_i + p_i Y = \omega_i$.

בנוסף כמובן מתקיימת המשוואה $\sum_{i \in N} p_i = 1$.

5.5 דוגמא למציאת שיווי משקל לינדהל

נשתמש בנתוני דוגמא 1 מש"מ נאש כדי למצוא ש"מ לינדהל:

הבעיות שיש לפתור:

עבור צרכן 1:

$$\max \quad u_1(x_1, Y) = x_1 Y^2$$

$$s.t \quad x_1 + p_1 Y \le 3$$

נשווה $MRS_1 = p_1$ ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{2x_1}{Y} = p_1 \\ x_1 + p_1 Y = 3 \end{cases}$$

עבור צרכן 2:

$$\max \quad u_2(x_2, Y) = x_2^2 Y$$

$$s.t \quad x_2 + p_2 Y \le 3$$

נשווה $MRS_2 = p_2$ ונקבל:

$$\begin{cases} \frac{x_2}{2Y} = p_2 \\ x_2 + p_2 Y = 3 \end{cases}$$

בנוסף נתונה המשוואה $p_1 + p_2 = 1$.

לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל את ההקצאה: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2; \bar{Y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(1,2; 3; \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

נמצא תועלת לכל צרכן:

$$\bar{u}_1(1,3) = 1 \cdot 3^2 = 9$$

$$\bar{u}_2(2,3) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

ניתן לראות כי $\bar{u}_1 = 9 > u_1^* = 4$ אך $\bar{u}_2 = 12 < u_2^* = 18$ כלומר, צרכן 2 שיפר את מצבו אך צרכן 1 יעדיף את הקצאת נאש. מכאן שהקצאת ש"מ לינדהל אינה שולטת פארטו על הקצאת ש"מ נאש.

6 <u>הקצאת שיווי משקל סחר בכלכלה עם מוצר ציבורי</u>

6.1 תיאור שיווי משקל סחר

הגדרה 2: ש"מ סחר בכלכלה עם מוצר ציבורי הוא וקטור בגודל $(2n+1)$ של ערכים אי שליליים ומחירים אישיים לכל צרכן $\left(\bar{\bar{x}}_1, \dots, \bar{\bar{x}}_n; \bar{\bar{Y}}; \bar{\bar{p}}_1, \dots, \bar{\bar{p}}_n\right)$ כך ש:

(TE.1) לכל $i \in N$ $\bar{\bar{x}}_i \le \omega_i$ ו- $\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{x}}_i + \bar{\bar{Y}} = W = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$.

(TE.2) $\bar{\bar{x}}_i + \bar{\bar{p}}_i \bar{\bar{Y}} \le x_i^* + \bar{\bar{p}}_i Y^*$ לכל $\in N$, כאשר $(x_1^*, \dots, x_n^*; Y^*)$ הוא ההקצאה לפי ש״מ נאש.

(TE.3) לכל $i \in N$ מתקיים $u_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) \ge u_i(x_i, Y)$ לכל $(x_i, Y) \in R_+^2$ כך ש:

$x_i + \bar{\bar{p}}_i Y \le x_i^* + \bar{\bar{p}}_i Y^*$.

(TE.4) $\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{p}}_i = 1$.

כאשר כל צרכן משווה $\bar{\bar{p}}_i = MRS_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) \Leftarrow \sum_{i=1}^{n} MRS_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) = 1$.

הערות: מההגדרה הנ״ל נובע כי הקצאת סחר היא אפשרית וכן בחירת האסטרטגיה של כל צרכן בש״מ סחר ממקסמת יעילות בקבוצת התקציב המוגדרת ע״י המחירים האישיים - $\bar{\bar{p}}_i$ ואסטרטגיית נאש. כמו כן הקצאת סחר היא פרטו אופטימאלית וסבירה פרטית, ניתן להוכיח זאת בדומה להוכחה בש״מ לינדהל.

6.2 תכונות ש״מ סחר

טענה 5: הקצאת ש״מ סחר היא הקצאה פרטו אופטימאלית וסבירה פרטית המקיימת

$0 < \bar{\bar{x}}_i < x_i^* \le \omega_i$, ו- $W > \bar{\bar{Y}} \ge Y^* > 0$ לכל $i \in N$.

הוכחה: נניח בשלילה ש $Y^* > \bar{\bar{Y}} > 0$, אז קיים צרכן אחד לפחות $j \in N$ שעבורו

$x_j^* < \bar{\bar{x}}_i \le \omega_j$. עבור אותו צרכן מתקיים תנאי סדר ראשון $MRS_j(x_j^*, Y^*) = 1$, לפי הנחת הנורמליות נקבל: $1 = MRS_j(x_j^*, Y^*) < MRS_j(\bar{\bar{x}}_j, \bar{\bar{Y}}) = \bar{\bar{p}}_j$ מה שמהווה סתירה לתנאי $\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{p}}_i = 1$.

את ההוכחה שההקצאה פארטו אופטימאלית ניתן לקרוא בעבודת הדוקטורט של פרץ חובב (2010).

6.3 קיום ש״מ סחר בכלכלה עם מוצר ציבורי

משפט 6: בכלכלה עם מוצר ציבורי קיים ש״מ סחר.

הוכחה: בהינתן ההנחות שלנו מתקיים כי כל האסטרטגיות בש״מ נאש חיוביות ממש וכן מתקיים $\sum_{i=1}^{n} MRS_i(x_i^*, Y^*) > 1$.

נגדיר לכל $i \in N$ ולכל $Y \in [Y^*, W]$ את הפונקציה $x_i(Y)$ אשר מקיימת את המשוואה

$x_i(Y) + (Y - Y^*)MRS_i(x_i(Y), Y) = x_i^*$ (משוואה זו מגיעה מ – TE.2) ונתבונן בקטע $(0, x_i^*]$. עבור $x_i = x_i^*$ נקבל $x_i^* + (Y - Y^*)MRS_i(x_i^*, Y) \geq x_i^*$. כמו כן כאשר $x_i \rightarrow 0$ לפי מה שהגדרנו בהתחלה נקבל $x_i(Y) + (Y - Y^*)MRS_i(x_i(Y), Y) \rightarrow 0$.

מכאן שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0, x_i^*]$ לכל $i \in N$ ולכל $Y \in [Y^*, W]$. מהנחת הנורמליות נובע ש $x_i(Y) + (Y - Y^*)MRS_i(x_i(Y), Y)$ היא פונקציה מונוטונית עולה חזק ב - x_i בקטע $(0, x_i^*]$ כמו כן הפונקציה $x_i(Y)$ רציפה בקטע $[Y^*, W]$ מכך נובע שהגדרת הפונקציה $x_i(Y)$ היא יחידה ומוגדרת היטב.

כעת נגדיר פונקציה נוספת $g(Y) = \sum_{i=1}^{n} MRS_i\,(x_i(Y), Y)$ פונקציה זו רציפה ומקיימת את המשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i(Y) + (Y - Y^*)g(Y)$ לכל $Y \in [Y^*, W]$.

(1) עבור $Y = W$ נקבל $\sum_{i=1}^{n} x_i(W) + (W - Y^*)g(W) = \sum_{i=1}^{n} x_i = W - Y^*$ מכיוון ש $Y^* < W$ נקבל ש $g(W) \leq 1$.

(2) עבור $Y = Y^*$ נקבל את השוויון $x_i(Y^*) \equiv x_i^*$ ומכאן ש

$g(Y^*) = \sum_{i=1}^{n} MRS_i(x_i^*, Y^*) > 1$.

מהרציפות של $g(Y)$ בקטע $[Y^*, W]$ ומ – (1) ו – (2) קיים $\bar{\bar{Y}} \in (Y^*, W]$ כך ש

$g(\bar{\bar{Y}}) = 1$. ומכאן נקבל את הקיום של ש"מ סחר. בנוסף מתקיים: $W > \bar{\bar{Y}} > Y^*$,

$0 < \bar{\bar{x}}_i < x_i^*$ לכל $i \in N$.

6.4 יחידות ש"מ סחר תחת הנחת הנורמליות

משפט 7: תחת הנחת הנורמליות בכלכלה עם מוצר ציבורי ש"מ סחר הוא יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה כי $(\bar{\bar{x}}'_1, \dots, \bar{\bar{x}}'_n; \bar{\bar{Y}}'; \bar{\bar{p}}'_1, \dots, \bar{\bar{p}}'_n)$ ו - $(\bar{\bar{x}}''_1, \dots, \bar{\bar{x}}''_n; \bar{\bar{Y}}''; \bar{\bar{p}}''_1, \dots, \bar{\bar{p}}''_n)$ הם שני ש"מ סחר שונים. נניח ללא הגבלת הכלליות ש - $\bar{\bar{Y}}' \geq \bar{\bar{Y}}''$. לפי התנאים שלנו מתקיים

$\sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{p}}'_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{p}}''_i = 1$. יהי $i \in N$ כך ש $\bar{\bar{p}}'_i \geq \bar{\bar{p}}''_i$. לפי משוואת התקציב נקבל

$x_i^* = \bar{\bar{x}}_i' + \bar{\bar{p}}_i'(\bar{\bar{Y}}' - Y^*) = \bar{\bar{x}}_i'' + \bar{\bar{p}}_i''(\bar{\bar{Y}}'' - Y^*)$ ולכן $\bar{\bar{x}}_i' \leq \bar{\bar{x}}_i''$ כמו כן מהנחת הנורמליות נקבל: $\bar{\bar{p}}_i' = MRS_i(\bar{\bar{x}}_i', \bar{\bar{Y}}') \leq MRS_i(\bar{\bar{x}}_i'', \bar{\bar{Y}}'') = \bar{\bar{p}}_i''$ ולכן $\bar{\bar{p}}_i' = \bar{\bar{p}}_i''$, כלומר, לכל צרכן $i \in N$ מתקיים $\bar{\bar{p}}_i' = \bar{\bar{p}}_i''$. מכאן, שני השיימ מתלכדים.

6.5 הקצאת ש״מ סחר מול הקצאת ש״מ נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור

טענה 6: לכל צרכן הקצאת ש״מ סחר עדיפה חזק על הקצאת ש״מ נאש.

הוכחה: לפי ההגדרה,עבור האסטרטגיה בש״מ סחר $(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}})$ מתקיים

$u_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) \geq u_i(x_i^*, Y^*)$. מאחר ו - $\bar{\bar{Y}} > Y^*$ (כפי שהוכח בקיום ש״מ סחר), שתי האסטרטגיות נמצאות בקבוצת התקציב ושונות. בהנחת קמירות חזקה של יחס ההעדפות, נקבל אי שוויון חזק, כלומר $u_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) > u_i(x_i^*, Y^*)$. מ.ש.ל.

הערה: טענה זו מראה כי הקצאת ש״מ סחר שולטת פארטו חזק על הקצאת ש״מ נאש. וזה בניגוד להקצאת ש״מ לינדהל שלא תמיד שולטת פארטו על הקצאת ש״מ נאש.

6.6 מושג הליבה בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור

תהי $(x_1, \dots, x_n; Y) \in R_+^{n+1}$ הקצאה אפשרית בכלכלה עם מוצר ציבורי טהור. קואליציה לא ריקה $K \subseteq N$ תקרא קואליציה חוסמת אם קיים וקטור בגודל $(|K| + 1)$ של ערכים אי שליליים $((x_i')_{i \in K}, Y')$ כאשר $\sum_{i \in K} \omega_i = \sum_{i \in K} x_i' + Y'$ כך ש:

(B.1) $x_i' \leq \omega_i$ לכל $i \in K$.

(B.2) $(x_i', Y') \succ_i (x_i, Y)$ לכל $i \in K$.

הליבה היא אוסף ההקצאות האפשריות שאין קואליציה שיכולה לחסום אותם.

הערה: יש להדגיש שמהגדרת הליבה נובע שהקצאה אפשרית השייכת לליבה היא בהכרח יעילה פארטו, כלומר אף צרכן לא יוכל לשפר את מצבו ביחס למה שכל הצרכנים קבלו מבלי לפגוע בצרכן אחר.

6.7 שייכות הקצאת סחר לליבה

משפט 8: הקצאת ש״מ סחר בכלכלה עם מוצר ציבורי שייכת לליבה.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת קואליציה K חוסמת ל - $\left(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n; \bar{\bar{Y}}\right)$ ע״י $((x_i')_{i\in K}, Y')$. נניח כי $((x_i')_{i\in K}, Y')$ יעילה פארטו לכלכלה המצומצמת של K. קו התקציב לכל צרכן בש״מ סחר הוא $x_i + \bar{\bar{p}}_i Y = x_i^* + \bar{\bar{p}}_i Y^*$. מכיוון שהקצאת ש״מ סחר ממקסמת תועלת על קו התקציב הנ״ל, לא יתכן ש $((x_i')_{i\in K}, Y')$ אפשריים אלא אם כן שיפרו ממש לצרכן i. לכן (x_i', Y') תהיה על קו תקציב אחר המקיים $x_i' + \bar{\bar{p}}_i Y' > x_i^* + \bar{\bar{p}}_i Y^*$ (כלומר, יש צורך ביותר תקציב). מכאן נקבל ש:

$$\Leftarrow \quad \sum_{i\in K} x_i' + Y' \sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i > \sum_{i\in K} x_i^* + Y^* \sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i$$

$\sum_{i\in K}(x_i^* - x_i') < (Y' - Y^*) \sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i$. מצד שני מתקיים

$\sum_{i\in K} x_i' + Y' = \sum_{i\in K} \omega_i = \sum_{i\in K} x_i^* + \sum_{i\in K} y_i^* \le \sum_{i\in K} x_i^* + Y^*$ כלומר:

$$Y' - Y^* \le \sum_{i\in K}(x_i^* - x_i') \quad \Leftarrow \quad \sum_{i\in K} x_i' + Y' \le \sum_{i\in K} x_i^* + Y^*$$

האי שוויון הראשון הוא מכיוון ש Y^* (באגף ימין) הוא סכימה של תרומות כלל הצרכנים למוצר הציבורי ובאגף שמאל סוכמים את תרומות צרכני התת קואליציה K בלבד.

נקבל: $(Y' - Y^*) \le \sum_{i\in K}(x_i^* - x_i') < (Y' - Y^*) \sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i$ כאשר $\sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i \le \sum_{i\in N} \bar{\bar{p}}_i = 1$
$\Leftarrow \quad (Y' - Y^*)(1 - \sum_{i\in K} \bar{\bar{p}}_i) < 0 \Leftarrow (Y' - Y^*) < 0 \quad \Leftarrow \quad Y' < \mathrm{Y}^*$ מכאן ולפי טענה 2 נקבל $Y' < \mathrm{Y}^* < \bar{\bar{\mathrm{Y}}}$.

מאחר ולכל $i \in K$ מתקיים: $u_i(x_i', Y') > u_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{Y}}) > u_i(x_i^*, Y^*)$ נקבל כי $x_i' > x_i^* > 0$ וכן, כל הצרכנים $i \in K$ הם תורמים בש״מ נאש S^*, לכן מתקיים $MRS_i(x_i^*, Y^*) = 1$ לכל $i \in K$. מאי השוויון האחרון ומהנחת הנורמליות נקבל: $MRS_i(x_i', Y') > MRS_i(x_i^*, Y^*) = 1$ לכל $i \in K$. ללא הגבלת הכלליות נוכל לבחור קואליציה חוסמת כזאת שתקיים את תנאי היעילות, כלומר $\sum_{i\in S} MRS_i(x_i', Y') = 1$ מה שסותר את האי שוויון האחרון. מ.ש.ל.

6.8 פיתוח הדרך למציאת שיווי משקל סחר

הפיתוח זהה לפיתוח בשיווי משקל לינדהל, פרט למשוואת התקציב הנתונה ע״י:

$$x_i + p_i Y = x_i^* + p_i Y^*$$

וכן נעשה שימוש במשוואה $\sum_{i\in N} x_i + Y = \sum_{i\in N} \omega_i$

6.9 דוגמא למציאת שיווי משקל סחר

נשתמש שוב בנתוני דוגמא 1 משיווי משקל נאש :

נזכור כי $(x_1^*, x_2^*, Y^*) = (1,3,2)$

הבעיות שיש לפתור :

עבור צרכן 1 :

$$max \quad u_1(x_1, Y) = x_1 Y^2$$

$$s.t \qquad x_1 + p_1 Y \leq 1 + 2p_1$$

נשווה $MRS_1 = p_1$ ונקבל :

$$\begin{cases} \frac{2x_1}{Y} = p_1 \\ x_1 + p_1 Y = 1 + 2p_1 \end{cases}$$

עבור צרכן 2 :

$$max \quad u_2(x_2, Y) = x_2^2 Y$$

$$s.t \qquad x_2 + p_2 Y \leq 3 + 2p_2$$

נשווה $MRS_2 = p_2$ ונקבל :

$$\begin{cases} \frac{x_2}{2Y} = p_2 \\ x_2 + p_2 Y = 3 \end{cases}$$

בנוסף נתונות המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + Y = \omega_1 + \omega_2 = 6 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

אחרי פתרון מערכת המשוואות נקבל את ההקצאה : $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2; \bar{\bar{Y}}; \bar{\bar{p}}_1, \bar{\bar{p}}_2) = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}; \frac{8}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

נחשב תועלות :

$$\bar{\bar{u}}_1\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 4.74$$

$$\bar{\bar{u}}_2\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{8}{3} = 18.96$$

ניתן לראות כי $\bar{\bar{u}}_1 = 4.74 > u_1^* = 4$ וגם $\bar{\bar{u}}_2 = 18.96 > u_2^* = 18$. כלומר קבלנו הקצאה השולטת פארטו על הקצאת נאש וכן יעילה פארטו (כיוון ששייכת לליבה).

7 סיכום ומסקנות

בפרויקט זה עסקנו במודל של כלכלה עם מוצר ציבורי טהור. נזכיר שמוצר ציבורי טהור מאופיין ע"י כך שלא ניתן לאכוף את השימוש בו וכן העובדה שפרט מסוים משתמש במוצר הציבורי אינה מונעת מפרט אחר להשתמש באותו מוצר. מאחר ולא כל הצרכנים נהנים במידה שווה מהמוצר הציבורי ויתכן גם שחלקם משתמשים במידה גדולה יחסית לשאר, נוצרות בעיות תשלומים מצד הצרכנים אשר לפעמים ירצו לשלם פחות ובמקרה הקיצוני אף לא לשלם כלל (טרמפיסטים).

לצורך כך דרושים מנגנונים שונים אשר יקבעו כמה כל אחד צריך לשלם (לתרום לטובת המוצר הציבורי). המנגנון הראשון הוא שיווי משקל נאש, בו כל צרכן מתנהג בצורה עצמאית (אגואיסטית) וממקסם את התועלת האישית שלו. הבעיה שנוצרת בהקצאה זו היא חוסר יעילות וברוב המקרים ניתן למצוא הקצאה חדשה, תחת אותם משאבים שתיתן יעילות פארטו. בעיה נוספת היא הטרמפיסטים, שש"מ נאש אינו מונע את קיומם.

המנגנון השני הוא ש"מ לינדהל, בו עושים שימוש ב"מחירים" (p_i) לכל צרכן עם תנאי היעילות $\sum_{i\in N} p_i = 1$. התוצאה היא הקצאה יעילה פארטו וכן אין אפשרות לקיום טרמפיסטים. הבעיה בהקצאה זו היא שמבחינת תועלת יתכן וחלק מהצרכנים יעדיפו את הקצאת נאש. את בעיה זו פותר המנגנון השלישי שהוא הקצאת ש"מ סחר אשר משתמש באותם עקרונות של ש"מ לינדהל אך עם נקודת מוצא שהיא הקצאת נאש, כך שבסופו של דבר מקבלים הקצאה השולטת פארטו על הקצאת נאש וכן שייכת לליבה (לכן יעילה פארטו).

המסקנה העיקרית שנובעת מהתהליך הנ"ל היא, שברגע שנותנים לצרכנים להתנהג בצורה עצמאית מגיעים לתוצאות לא טובות. ש"מ סחר זהו מנגנון ה"מונחת" מלמעלה ולכן מאלץ את הצרכנים להתנהג בהתאם למה שמתקבל בהקצאה, אך גם מביא לתועלת גבוהה יותר עבור כולם.

נזכיר שבמודל זה הנחנו כי קיים מוצר ציבורי אחד ומוצר פרטי אחד. ההמשך המתבקש מכאן הוא להרחיב את הניתוח לכלכלות עם מספר סופי של מוצרים פרטיים ומספר סופי של מוצרים ציבוריים.

כמו כן ניתן לעבוד עם פונקציית ייצור שאינה קבועה, דבר אשר יוצר תלות בין התרומות של הצרכנים לבין מה שמופק מהמוצר הציבורי ולכן מקשה מאד על הניתוח.

ניתוח הרחבות כאלו ואחרות ניתן למצוא בעבודת הדוקטורט של פרץ חובב (2010).

לסיום אוכל לומר כי העבודה על הפרויקט העשירה מאד את ידיעותי. שילוב הנושאים והמושגים החדשים בחומר שנלמד בקורסים תורת המשחקים וכלכלת אי- וודאות, עזר לי להבין יותר לעומק את החומר ואופן השימוש המעשי בו.

ברצוני גם להודות לדר' חובב פרץ על ההנחיה המסורה, על העזרה הרבה בעת הצורך וההפניה למקורות מידע רלוונטיים.

8 ביבליוגרפיה

1. H. Perets, B. Shitovitz, M. Spiegel (2007) "Trading Equilibrium in a Public Good Economy". Mimeo.

2. "Lindhal's Solutions and the core of an economy with public goods" by Duncan K. Foley. Econometrica, Vol. 38,No. 1 (January, 1970).

3. B. Shitovitz, M. Spiegel (1998) "Cournot – Nash and Lindhal Equilibria in Pure Public Good Economies". Journal of economic theory 83, 1-18 (1998) article No. ET972449.

4. חובב פרץ "שיווי משקל נאש בכלכלה עם מוצר ציבורי ומרחב מידה מעורב של צרכנים" עבודת דוקטורט (2010)

5. Samuelson, P.A.(1954) "The Pure Theory of Public Expenditures" Review of Economics and Statistics, 36, 387-389.