



המחלקה למתמטיקה

Department of Mathematics

פרויקט מסכם לתואר בוגר במדעים (*B.Sc.*) במתמטיקה שימושית

כאוס אינטרינזי במערכות
ביולוגיות של מין יחיד

שהם שמיר

*Intrinsic Chaos in Single Species
Biological Systems*

Shoham Shamir

Advisor:
Assoc. Prof. Haggai Katriel

מנחה:
פרופ"ח חגי כתרילאל

2023

תודה לפרופ"ח כתריאל חגי על מסירות אין קץ, ליווי והדרכה בצעדיי האקדמים הראשונים ובעבודה זו בפרט.

תודה לפרופ"ח גיבלי אביב, והמחלקה למתמטיקה שימושית על לימוד, מקצועיות וידע מתחדש ומותאם.

תודה לד"ר נוביק ליה, אשתי, על תמיכה בלתי מתפשרת.

תקציר

במסגרת עבודת גמר זו נסקור מערכת ביולוגית של אוכלוסיית מין יחיד חד-תאית המצויה תחת תנאים מיטיבים, הכוללים מזון וללא הימצאותם של מינים טורפים אחרים. ההנחה הטבעית של השכל הישר היא כי במצב שכזה, כמות הפריטים באוכלוסייה תגדל עד אשר תגיע לאיזון שבין כמות הפריטים המתווספים למערכת לאלו היוצאים ממנה. אולם, עבור טווח ערכים של פרמטרים במערכת הנחקרת נראה כי לא כך המצב והמערכת תתְיַצֵג על מנעד רחב של התנהגויות. מנעד רחב זה ינוע החל מהיכחדותה של האוכלוסייה, דרך התייצבות על-פי מחזוריות מסוימת ועד הוצרות של התנהגות כאוטית ללא אפשרות חיזוי – אך עם אפשרות לתובנות בתחומי הביולוגיה והרפואה.

בארבעת הפרקים בעבודה זו נציג את הרקע ההיסטורי והתפתחות תחום תורת הכאוס, נבאר את המודל המוצע, ונפתח שיטות להוכחת הכאוטיות ואפיון המערכת. בסיכום נתייחס לקושי ולחשיבות שבאפיון מערכות כאלו עם יישומיות להמשך.

תוכן העניינים

1	I	הקדמה
1	1	מידול מערכות
1	2	רקע מתמטי
2	2.1	מערכות דינמיות לא-לינאריות
2	2.2	שיטת רונגה-קוטה
3	2.3	מרחב פאזה
6	2.4	מערכי ליאפונוב ורגישות לתנאי התחלה
7	2.5	ביפורקציות
9	2.6	מושכים
10	3	רקע ביולוגי
11	II	מבוא ותיאור מתמטי
11	4	מודל המערכת
11	4.1	סימולים
12	4.2	משוואות אפיון השלבים
14	4.3	מצבי המערכת
15	III	שיטות ותוצאות חקר המערכת
15	5	מבחן 0-1 לכאוס
15	5.1	פיתוח
15	5.2	תוצרים
16	5.3	תוצאות
16	6	הסתעפויות
16	6.1	יישום
17	6.2	דיאגרמת ביפורקציות
18	7	מערכי ליאפונוב וממד
18	7.1	מקשטת ליאפונוב
20	7.2	שיעור קפלן-יורק
21	IV	אחרית דבר
21		סיכום
22		מקורות
23		נספחים

רשימת האיורים

6	מושך מוזר לורנץ	1
7	תיאור סכמטי להיפרדות מסלולים	2
9	מושך מוזר סימטרי (לפי Z_3)	3
10	תרשים מחזור התא	4
13	פונקציות $\beta_i(N), \mu_i(N)$	5
14	התפתחות המושך והתנהגות כמות הפריטים במערכת	6
16	תוצאת מבחן 0-1 לכאוס	7
17	תרשים הסתעפויות עבור השתנות b_{G_2}	8
17	תרשים הסתעפויות עבור השתנות d, N_{in}	9
19	מקשטת מעריכי ליאפונוב	10
19	תרשים ערכי MLE כתלות ב- b_{G_2}	11

רשימת אלגוריתמים

23	<i>The Chemostat Model</i>	1
23	<i>A Method for 0-1 Test for Chaos</i>	2
24	<i>A Method for Computing System's Bifurcation Diagram</i>	3
24	<i>A Method for Calculating Lyapunov Exponents</i>	4

חלק I

הקדמה

1 מידול מערכות

"כל המודלים שגויים, אך חלקם מעילים" – ג'ורג' א. פ. בוקס

דָּגְם – העתק מוקטן של מבנה¹, המילה העברית המשמשת לתיאור הן של דגמים פיזיים והן של מערכות מתמטיות ופיזיקליות. באופן כוללני יותר, מודל הנו ייצוג תאורטי למערכות מורכבות, תוך התייחסות להיבטים המהותיים בהן. מודלים מתמטיים נועדו למציאת קירובים למתן תיאור מופשט לתופעות המתרחשות סביבנו, וזאת כדי לבצע ניתוח, הערכה, חיזוי והסקת מסקנות ביחס אליהן.

2 רקע מתמטי

הכאוס הנו ענף אחד מתוך עץ רחב הנקרא דינמיקה. הדינמיקה הנה אופן התיאור המתמטי לתהליכים העוסקים בשינויים למערכות המתפתחות בזמן. למרות שכיום הדינמיקה הנה ענף בין-תחומי, בעבר החלה כענף בפיזיקה על-ידי ניוטון באמצע המאה ה-17 כשפיתח את המשוואות הדיפרנציאליות ותיאר את משוואות התנועה. פיתוחים אלו שימשו את ניוטון לפתרון בעיית-קפלר, אשר פתרונה מתאר את חישוב תנועתם של שני גופים, שמש וכדור הארץ. ניוטון הוכיח כי שני גופים הנעים תחת השפעת כוח הכבידה בלבד, נעים ביחס הדדי באחד ממסלולי חתך של חרוט. בעיית שלושת הגופים העסיקה מתמטיקאים ופיזיקאים במשך מאות שנים וככל הנראה לא ניתן לפתור אותה בכלים אנליטיים.

תפנית הגיעה בשלהי המאה ה-19 בעבודתו של פואנקרה, שם הציג נקודת מבט שונה, השמה דגש על איכות ולא כמות; פואנקרה העדיף שלא לנסות למצוא את מיקומם המדויק של גרמי השמיים, אלא לשאול האם מערכת השמש יציבה לעולמים ואף כוכב לא יִרְחַק אל האינסוף. בעבודתו, פואנקרה פיתח גישה גיאומטרית לניתוח שאלות מעין אלה ובכך הפך לאדם הראשון שהבחין באפשרויות הכאוס, שם הוצגו מערכות עם התנהגות לא מחזורית ותלות בתנאי ההתחלה. בחצייה הראשון של המאה הקודמת הכאוס נותר ברקע, ואילו תחום הדינמיקה והמתנדדים הלא-ליניאריים פותח לטובת יישום מעשי בפיזיקה השימושית וההנדסה, שכן היה חיוני לפיתוחים כדוגמת הרדיו והלייזר. הכאוס התפתח בהמשך, בין היתר כתחום חדשני עם עבודתם של קולמוגורוב, ארנולד ומוזר במכניקה המילטונית, לורנץ על מושכים מוזרים ב-1963, רואל וטאקנס על זרימה מעורבלת ב-1971, מאי על ההעתקה הלוגיסטית ב-1976, פייגנבאום על אוניברסליות ורה-נורמליזציה ב-1976 ועוד. לכאוס אין הגדרה אחידה מקובלת, אך קיים קונצנזוס בנוגע לכך ששלושת המרכיבים הבאים צריכים להתקיים:

1. א-מחזוריות: קיומם של מסלולים שלא ישתקעו לנקודות שבת או מסלולים מחזוריים
2. דטרמיניזם: פעולת המערכת אינה אקראית, לא תלויה ברעש ונובעת מעצמה
3. רגישות: מסלולים קרובים אינפניטיסמלית נפרדים מעריכית האחד ממשנהו

¹האקדמיה ללשון עברית

2.1 מערכות דינמיות לא-לינאריות

"השימוש במונח כמו מדע לא ליניארי הוא כמו להתייחס לחלק הארי של הזואולוגיה כמחקר של בעלי חיים שאינם פילים" – סטניסלב מ. אולם

מערכת משוואות נתונה יכולה להיות לינארית או לא-לינארית. הלינאריות של מערכות באה לידי ביטוי בכך שכל איבר מופיע ללא חזקה, אין כפל בין המשתנים ולא מופיעות פונקציות טריגונומטריות ואחרות. לדוגמה, משוואת המתנד ההרמוני המרוסן: $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$ ניתנת להצגה בצורה של מערכת משוואות לינאריות:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

מאידך, משוואת המטוטלת: $\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$ ניתנת להצגה אוטונומית של מערכת משוואות לא לינאריות:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

אי-הלינאריות של משוואת המטוטלת היא היוצרת את הקשי הרב בפיתוח בדרכים אנליטיות. הדרך המקורבת להתגבר על כך היא באמצעות היצמדות לזוויות קטנות, שם מתקיימת בקירוב הזהות $\sin x \approx x$ ואז ניתן לפתור כבעיה לינארית של מתנד הרמוני. במגבלה שכזו אנו זונחים חלק נכבד מהפיזיקה, כמו תנועת המטוטלת מעל הציר האופקי. ניתן לומר כי הזנחה שכזו היא סבירה ביחס לפתרונות נקודתיים, אך קיצונית (ולא נכונה) עבור פתרונות כלליים. באופן כללי מערכות לא-לינאריות יכולות להיות בעיות קשות לפיתרון, אך קיימות שיטות המסייעות בפיתוחן - כדוגמת לינאריזציה ופיתוח טורי טיילור, החלפת משתנים, פונקציות ליפנוב ועוד.

2.2 שיטת רונגה-קוטה

כפועל יוצא מקשי בפיתוח פתרונות אנליטיים למשוואות דיפרנציאליות, לא פעם נרצה להעריך או לכל הפחות להתקרב לפיתרון נומרי, ושלא בדרך ישירה.

בספרו - *Institutionum Calculi* תיאר אוילר את שיטתו להתקרבות אל הפיתרון. רעיונו של אוילר היה על בסיס שימוש בנגזרת כמאפיין השינוי הלוקלי והתקדמות איטרטיבית מהנקודה הנוכחית אל הבאה שלאחריה, צעד אחר צעד.

הרעיון המתמטי מובע כך: $x(t_0 + \Delta t) \approx x_1 = x_0 + f(x_0) \Delta t$ כצעד הראשון, והצעד הכללי יהא: $x_{n+1} = x_n + f(x_n) \Delta t$.

בתחילת המאה ה-20 פיתחו צמד המתמטיקאים – קרל דיוויד רונגה ומרטין וילהלם קוטה משפחת שיטות איטרטיביות הכוללות את שיטת אוילר כבסיס ומבוססת על דיסקרטיזציה טמפורלית להערכת פתרונות מקורבים של משוואות דיפרנציאליות רגילות.

שיטות רונגה-קוטה ממוספרות על פי הסדר הגבוה ביותר של פונקציונלי העזר המשמשים במסגרתן. כך למשל, שיטת רונגה-קוטה מסדר שני עושה שימוש בשני פונקציונלים על מנת לקבל כלל נסיגה המגדיר את וקטור הפתרונות. השיטה המוכרת ביותר במשפחה זו, היא שיטת רונגה-קוטה מסדר רביעי, המוכרת גם בתור שיטת רונגה-קוטה הקלאסית.

$$\text{חישוב הנקודה המקורבת עבור המוד"ר-} \begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \text{ ייעשה כך:}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

כאשר- k_1 הנו השיפוע בתחילת המקטע, k_2, k_3 הנם השיפועים באמצע ו- k_4 הנו השיפוע בסוף המקטע. על בסיס ארבעת הפונקציונלים הללו נבנה כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

2.3 מרחב פאזה

מקורה של שיטת ההצגה הגיאומטרית אינו ידוע, אך החל מאמצע המאה ה-19 הפך מרחב הפאזה, עם פיתוח המכניקה הסטטיסטית על-ידי בולצמן ומקסוול, לכלי מרכזי בהצגת תיאור והבנה של מערכות דינמיות. מרחב הפאזה הנו מרחב רב-ממדי ובו ציר לכל דרגת חופש במערכת. רעיון ההצגה הוא תיאור מצב המערכת בכל נקודה. לדוגמה, עבור המערכת המופיעה בסעיף 2.1, נוכל לתאר כל זוג סדור של מיקום ומהירות המטוטלת במישור כחץ בכיוון התואם את הפיזיקה – כשינוי המשותף שלהם.

כיוון שפתרון המערכת משיק לקטע במרחב הפאזה ומתקיים משפט פיקארד-לינדלוף, פתרון של מערכת יוצר מסלול כלשהו המתאפיין בדרכים שיתוארו בהמשך. עבור מערכת כללית:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

נרשום זאת בצורה וקטורית מקוצרת, כך ש:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

ונתמקד בפתרונות מסוימים כדי לאפיין בצורה איכותית את המערכת:

$$1. \text{ נקודות שבת: } \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$2. \text{ מסלולים סגורים: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t) \text{ לכל- } t \text{ ו- } T \text{ קבוע (ושווה מאפס)}$$

$$3. \text{ מסלולים הקרובים לשניים הקודמים, כדי לבחון את ההתנהגות בקרבתם}$$

2.3.1 נקודות שיווי משקל

נאמר כי- x^* הנה נקודת שיווי משקל כאשר:

1. עבור מערכות רציפות $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ אם לכל t מתקיים $f(t, x^*) = 0$
2. עבור מערכות בדידות $x_{k+1} = f(k, x_k)$ אם $f(k, x^*) = x^*$ כאשר $k = 0, 1, 2, \dots$

2.3.2 לינאריזציה

נתבונן במערכת המופיעה ב- 2.3, בה קיימת נקודת שיווי משקל x^* . עבור מערכת משוואות בשני נעלמים נוכל להגדיר משתנים חדשים: $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ שינוי קטן מנקודת שיווי המשקל. כדי לבחון אם תזוזה שכזו תתרחק או תתקרב עם הזמן לפתרון, נפתח קירוב טיילור מסדר ראשון:

$$\dot{u} = \dot{x} = f(x^* + u, y^* + v) = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\dot{v} = \dot{y} = g(x^* + u, y^* + v) = g(x^*, y^*) + u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y}$$

זאת ניתן להציג בצורה מטריציונית: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}}_J(x^*, y^*) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ כאשר J הנו

היעקוביאן בנקודת שיווי המשקל. עבור מערכות שאינן מסדר 2 הרעיון זהה ביסודו.

2.3.3 יציבות של נקודות שיווי משקל

אפיון יציבותה של נקודת שיווי משקל ייעשה באמצעות מטריצת היעקוביאן. תחילה יש לחשב את הערכים העצמיים בנקודת שיווי המשקל – אלו יתקבלו ע"י פתירת הפולינום האופייני של היעקוביאן:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

כאשר:

$$\tau = \text{tr}(J) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Delta = \det(J) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$

ומכאן ש:

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

המצב האופייני הוא כאשר הערכים העצמיים שונים, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, אשר מבטיח לנו כי הווקטורים העצמיים בלתי-תלויים לינארית ולכן פורשים את המרחב.

במצב זה נוכל לראות את האפשרויות הבאות:

1. שני ערכים ממשיים שוני סימן: נקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"אוכף" ואינה יציבה
2. שני ערכים ממשיים קטנים (גדולים) מ-0: נקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"צומת" והנה יציבה (אינה יציבה)
3. שני ערכים מרוכבים:

(א) החלק הממשי קטן (גדול) מ-0: התנודות דועכות (גוברות) ונקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"מוקד" ספירלי מושך (דוחה) - כלומר יציבה (אינה יציבה)

(ב) מדומים טהורים: נקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"מרכז". במצב כזה נוצרים מסלולים מחזוריים עם מחזור $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ובאופן טבעי הנקודה יציבה, שכן כל מסלול הקרוב לנקודה אינו מושך ואינו דוחה

ובאשר למצב בו הערכים העצמיים שווים, כלומר- $\lambda_1 = \lambda_2$, קיימות שתי האפשרויות הבאות:

1. היעקוביאן הנו כפולה של מטריצת היחידה: נקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"כוכב" והנה יציבה
2. היעקוביאן אינו כפולה של מטריצת היחידה: נקודת שיווי המשקל מוגדרת כ"צומת מנוון" והנה תלוית סימן הערך העצמי אשר התקבל

בפיתוח הלינארי שבסעיף 2.3.2 הזנחנו את הביטויים הריבועיים. מכאן עולה השאלה האם פיתוח שכזה אינו משמיט מידע ומסוגל לאפיין נכונה. התשובה היא כן, כל עוד הנקודה הנה אוכף, צומת או ספירלה (לפי קריטריון אנדרונוב-פונטריאגין).

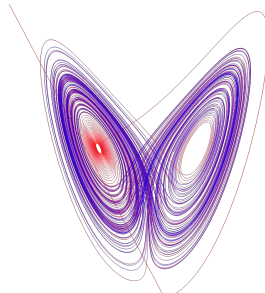
2.4 מערכי ליאפנוב ורגישות לתנאי התחלה

"הפיזיקאים אוהבים לחשוב שכל שעליהם לעשות הוא לומר: אלה הם התנאים, ומה קורה עכשיו?" – ריצ'רד פ. פיינמן

על אף שהדוגמה הקלאסית ביותר להצגת רגישות מערכת לתנאי התחלה הנה המטוטלת הכפולה, הייתה זו מערכת אחרת שהגיעה להמונים, כמדע פופולרי ושלל אזכורים נוספים בתרבות. אחד ממטבעות הלשון המוכרים לכל, גם לאלו שמתמטיקה אינה קרובה לליבם, הנו "אפקט הפרפר". מונח שגור זה מתאר כיצד שינוי אינפיניטסימלי בתנאי ההתחלה יכול להניב מסלולים שונים לחלוטין ונטבע כתיאור להתנהגות כאוטית כתוצאה מהצגתה הגרפית² של מערכת לורנץ. ב-1963 הציג אדוארד לורנץ, מטאורולוג במקצועו, מודל מתמטי להולכת חום באטמוספירה. מערכת לורנץ נתונה כמערכת משוואות דיפרנציאליות לא-ליניאריות:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

כאשר- $\sigma, \rho, \beta > 0$ ו- σ הנו מספר פרנטל, ρ הנו מספר ריילי, ו- β סקלר חסר שם המייצג את יחס ממדי הגלילים בבעיה המקורית. דוגמה זו מייצגת את רגישותה של מערכת לתנאי התחלה, ומביעה זאת באמצעות אובייקט מתמטי הנקרא "מושך" ויתואר בתת-סעיף 2.7.



איור 1: מושך מוזר לורנץ
Wikipedia

אחת הדרכים לאמוד את רגישות המערכת היא באמצעות מערכי ליאפנוב, ובפרט מעריך ליאפנוב מקסימלי.

התנועה על גבי שני מסלולים שונים, להם שני תנאי התחלה קרובים אינפיניטסימלית תהיה כמעט או לחלוטין זהה ברגעיה הראשונים, אך ככל שיחלוף הזמן המסלולים יתבדרו (יתכנסו) האחד מהשני ויתקבלו מסלולים שונים המתרחקים (מתקרבים) בקצב מעריכי. כדי לתאר זאת בצורה מתמטית, ליאפנוב ביטא זאת כך:

$$\|\delta \mathbf{z}(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta \mathbf{z}_0\|$$

כאן $\delta \mathbf{z}(t)$ הנו מסלול השונה בשינוי מזערי של $\delta \mathbf{z}_0$ מהמסלול המקורי ו- λ הנו מעריך ליאפנוב.

²הגרף במרחב הפאזה דומה לכנפי פרפר

באופן פורמלי, חישוב ערכו של מעריך ליאפונוב המקסימלי נעשה באמצעות:

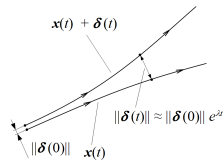
$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\|\delta z_0\| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta z(t)\|}{\|\delta z_0\|}$$

באופן רחב יותר, מקשתת³ מעריכי ליאפונוב הנם אוסף הערכים $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ומוגדרים כערכים העצמיים של המטריצה:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (F(t) F^T(t))$$

כאשר $F(t)$ הנה המטריצה המוגדרת לפי היעקוביאן במשוואה $\dot{F} = JF$, כוקטורים המשיקים למערכת $\dot{x}_i = f_i(x)$.

ככל שערכו של המעריך גדול (קטן) יותר, כך המסלולים יתבדרו (יתכנסו) מהר יותר – דבר היעיד על רגישותה (יציבותה) של המערכת. חשוב להדגיש כי מעריך ליאפונוב שלילי לא מבטיח יציבות, ולחילופין - מעריך ליאפונוב חיובי לא מבטיח כאוס. תופעה זו מוכרת כאפקט פרון ולכן נדרשת עבודה נוספת עבור מערכות המשתנות בזמן, מלבד מאפיין זה.



איור 2: תיאור סכמטי להיפרדות מסלולים

מלבד מידת רגישות המערכת, ניתן לראות כי מעריכי ליאפונוב מופיעים במקומות רבים נוספים, בין היתר: בתתחום התרמודינמיקה ניתן לבדוק האם מערכת משמרת בכך שסכום כלל מעריכי ליאפונוב שווה לאפס או שאינה משמרת כאשר סכומם שלילי, חישוב שיעור האנטרופיה בתורת המידע, שיעור ממד קפלן-יורק ועוד.

2.5 ביפורקציות

את המונח ביפורקציה טבע פואנקרה במאמרו משנת 1885 על שיווי משקל של נוזלים בתנועה סיבובית. תורת הביפורקציות הנה תחום העוסק בחקר איכותני ביחס להתנהגות מערכות תחת שינוי הפרמטרים בהן.

מערכת נחקרת ניתנת להצגה בנוגע לטיבה באמצעות תרשים ההסתעפויות לצד חקירה ישירה, וזאת כדי לקבל תמונה על אודות התנהגותה בשינויים זעירים. שינויים בנקודות שיווי המשקל, כדוגמת היעלמותה של נקודה, היווספותה או שינוי רמת יציבותה⁴ מתרגם להסתעפות בתרשים ומכאן הקשר ההדוק בין נקודות שיווי המשקל לביפורקציות. סוג השינוי של שיווי המשקל, הוא המאפיין את סוג ההסתעפות והתייצגותו בתרשים. תרשים ההסתעפויות חשוב ומוסיף זווית ראייה שונה למידע ונפץ מדעי למודלים מתמטיים בזכות הפקת המידע הפשוטה שניתן להסיק באמצעות הדמיות ממוחשבות.

³ספקטרום

⁴שינוי ברמת היציבות יכול להתבטא במעבר מיציבות ללא יציבות, להפך או הפיכה לחצי-יציב

2.5.1 סוגי הסתעפויות

1. הסתעפות אוכף-צומת: סוג זה מתאר את השינוי והמעבר מקיומם של שתי נקודות שבת המתקרבות זו אל עבר זו עד היפגשותן; בהיפגשות זו הנקודות מתאחדות לכדי נקודת שבת אחת. השינוי המתמשך יכול להוביל גם להיעלמות כל נקודת שבת בהמשך. מצב זה הנו דו-כיווני ותלוי במערכת הנתונה. לעיתים תיקרא הסתעפות נקודת מפנה, או בשמות שונים. נביט במשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $\dot{x} = r + x^2$, אשר לה קיימים המצבים האפשריים הבאים:

(א) $r < 0$: במצב זה קיימות שתי נקודות שיווי משקל והן השורשים $\pm\sqrt{-r}$ השלילית יציבה והחיובית אינה יציבה

(ב) $r = 0$: במצב זה קיימת נקודת שיווי משקל יחידה ב- $x = 0$, חצי יציבה ולכן תקרא אוכף

(ג) $r > 0$: במצב זה לא קיימת לא קיימות נקודת שיווי משקל כלל

2. הסתעפות טראנסקריטית: סוג זה מתאר את השינוי והמעבר מקיומם של שתי נקודות שבת לנקודת אוכף יחידה והיווצרותן של שתי נקודות שבת חדשות לאחר מכן. השם מתאר את חילופי יציבותן של נקודות השבת הסימטריות, כפי שניתן לראות. נביט במשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $\dot{x} = rx - x^2$, אשר לה קיימים המצבים הבאים:

(א) $r < 0$: במצב זה קיימות שתי נקודות שיווי משקל. כאשר הנקודה $x_1 = 0$ הנה יציבה ואילו $x_2 = -r$ אינה יציבה

(ב) $r = 0$: במצב זה קיימת נקודת שיווי משקל יחידה ב- $x = 0$, חצי יציבה ולכן תקרא אוכף

(ג) $r > 0$: במצב זה קיימות שתי נקודות שיווי משקל. כאשר הנקודה $x_1 = r$ הנה יציבה ואילו $x_2 = 0$ אינה יציבה

3. הסתעפות קלשון: סוג זה מתאר את השינוי והמעבר מקיומה של נקודת שיווי משקל יחידה לשלוש נקודות שיווי משקל, כאשר הראשונה אשר הייתה יציבה נהפכת ללא יציבה והחדשות יציבות. נביט במשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $\dot{x} = rx - x^3$, אשר לה קיימים המצבים הבאים:

(א) $r < 0$: במצב זה קיימת נקודת שיווי משקל יחידה ויציבה $x = 0$

(ב) $r = 0$: במצב זה קיימת נקודת שיווי משקל יחידה ויציבה $x = 0$

(ג) $r > 0$: במצב זה קיימות נקודות שיווי משקל יציבות $x = \pm\sqrt{r}$. הראשית עודנה נקודת שיווי משקל, אך אינה יציבה עוד

4. הסתעפות הופף: סוג זה מתאר את השינוי והיווצרותו של פתרון מחזורי מנקודת שיווי משקל יחידה, או בכיוון ההפוך – קריסתו של פתרון מחזורי לכדי נקודת שיווי משקל יחידה. מצב זה מתרחש כאשר קיימים פתרונות מדומים טהורים לפולינום האופייני של מטריצת היעקוביאן לאחר ביצוע הלינארזציה. מנוסחת אוילר יתקבלו פתרונות מחזוריים שם, לפי נוסחת אוילר – $e^{i\theta}$

2.6 מושכים

"למערבולות יש מערבולות, השואבות מהן מהירות, ולמערבולות יש עוד קטנות מהן, וכן הלאה – עד צמיגות" – לואיס פ. ריצ'רדסון

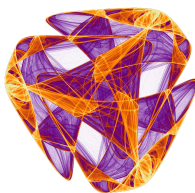
תהליכים המתארים תופעות פיזיקליות, רובם, סופם להתכנס למצב גבולי יציב מעצם היותם תיאור של מערכות משמרות. לצד הפיזיקה, הבסיס המתמטי ואופן תיאורם של מושכים נועד לסיווג צורת ההתכנסות של דינמיקות. הגדרת המושך, מתמטית, כתת-קבוצה A של מרחב פאזה P דורשת את קיומם של 3 התנאים הבאים:

1. קבוצה שמוֹךָ: כל מסלול במערכת המתחיל ב- A , נשאר בה
2. סביבה: קיומה של סביבה $A \subseteq U$, כך שלכל $x(0) \in U$, המרחק של $x(t)$ מ- A שואף לאפס. סביבה זו תיקרא "אזור המשיכה"
3. מינימליות: לא קיימת תת-קבוצה לא ריקה נוספת ב- P עם שני המאפיינים לעיל להתכנסויות מעין אלו קיימות מספר אפשרויות, בהן:

1. נקודת שבת יציבה: התיאור הפשוט ביותר הניתן להצגה. נקודת שבת אינה מעידה על יציבותה, אלא רק על התקבעות בנקודה זו לכל מסלול העובר בה – לכן נדרוש כי תהיה יציבה

2. מסלול מחזורי: בשונה מהתקבעות בנקודת השבת, מסלול מחזורי יכול להיות בעל מחזור של K נקודות עבור מערכות בדידות, ומעגלי-גבולי עבור רציפות. מסלול מחזורי יהא מסלול כזה כך ש- $x(t + t_0) = x(t)$. יציבות המסלול תלויה במסלולים המקיפים אותו והמעגליות מתאפיינת בעובדה שמדובר במסלול סגור – לא מתחייב כי המסלול יהיה בהכרח בצורת מעגל כהגדרתו.

3. מושכים מוזרים: אחד מהישגי הפיתוח המתמטי של הכאוס היה היכולת לתאר מושכים ממימד שברי, מושכים פרקטלים. המושך המוזר הראשון שתואר בספרות היה של מע' לורנץ, אך את מטבע הלשון טבעו רואל וטאקנס רק בשנת 1971. בשונה מהאפשרויות הקודמות, מושך מוזר יכול להיות בעל צורות שונות ומגוונות ונחשב ללא יציב לוקאלית בשום נקודה, אך כן יציב במובן הרחב. מושכים מוזרים אינם רק ייצוג גרפי של קונספט מתמטי, אלא מתקיימים במציאות בתחומים רבים. קיומו של המושך המוזר אינו מבטיח את כאוטיות המערכת (לפי [3])



איור 3: מושך מוזר סימטרי (לפי Z_3)

$$F_2(z) = (\lambda + \alpha z \bar{z} + \beta \Re(z^n) + \omega i) z + \gamma \bar{z}^{n-1}$$

3 רקע ביולוגי

תהליך חייו של תא נע מיצירתו דרך מספר שלבים ועד חלוקתו לתאים צאצאים. למחזוריות זו ארבעה שלבים והם:

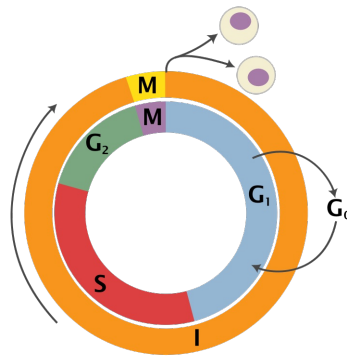
1. G_1 : שלב הגדילה הראשון, בשלב זה התא מבצע את תפקודו הרגיל לו הוא מיועד. תוך כדי כך נפחו גדל, מתבצע בו מטבוליזם נמרץ, וכמות החומרים בו, לרבות חלבונים ו- RNA , גדלה כמעט פי שניים. זהו שלב מקדים להכפלת ה- DNA

2. S : שלב הסינתזה, בו מוכפלת כמות ה- DNA שבגרעין התא ואורך בממוצע 3-6 שעות

3. G_2 : שלב הגדילה השני, בו התא מתכוון לחלוקתו ואורך בממוצע 2-5 שעות

4. M : שלב המיטוזה, בו מתחלק גרעין התא לשני גרעינים שלכל אחד מהם מספר כרומוזומים זהה

לתאים מנגנוני בקרה אשר מסוגלים לעצור את התפתחות התא בשלב G_1 כתוצאה מתנאי סביבה או אילוצים אחרים, אך מרגע שכמות ה- DNA הוכפלה - התא ימשיך בשלבי המחזור עד סופם. לאחר התחלקות התא בשלב המיטוזה, כל אחד מן התאים החדשים מתחיל את מחזורו בשלב G_1 וחוזר חלילה. כאשר מנגנוני הבקרה נפגמים, תאים מתחלקים שוב ושוב ללא שליטה - תופעה הנמצאת בבסיסה של גידולים ממאירים.



איור 4: תרשים מחזור התא
Wikipedia

חלק II

מבוא ותיאור מתמטי

4 מודל המערכת

במאמר [6] תוארה אוכלוסיית חד-תאיים הנמצאת בכימוסטאט. הכימוסטאט הנו מכשיר מתחום הביוטכנולוגיה המיועד לדמות סביבת פעילות ביולוגית תחת תנאים מבוקרים. אל הכימוסטאט מוזן מצע וממנו מוסרים תוצרים מטבוליים, מיקרו-אורגניזמים ושאריות מזון ברציפות וביחס זהה; כך שנפח החומר האורגני במכשיר מתחילת הניסוי ועד סופו נותר ללא שינוי. תוצאות הניסוי העלו כי תחת תנאים מסויימים, ובשונה מתצפיות עבר, המערכת לא הגיעה לשיווי משקל. הן במודל ממוחשב והן בתוצאות הניסוי, כמות הפריטים עלתה וירדה באופן כאוטי.

4.1 סימולים

משתנים⁵:

1. G_1 – גודל אוכלוסיית התאים במערכת הנמצאים בשלב הגדילה הראשון של מחזור התא
2. G_2 – גודל אוכלוסיית התאים במערכת הנמצאים בשלב הגדילה השני של מחזור התא
3. M – גודל אוכלוסיית התאים במערכת הנמצאים בשלב החלוקה של מחזור התא
4. N – ריכוז חומרי המזון הנמצאים במיכל

קבועים:

1. d – קבוע הדילול, הקצב בו המיכל נמהל במצע של חומרי מזון ומוסרת כמות זהה
2. z – קבוע זמן החלוקה, הקצב בו תא הנמצא בשלב M מתחלק לשני תאים
3. N_{in} – ריכוז חומרי המזון המוספים למערכת

פונקציות:

1. $\beta_i(N) = \frac{a_i N^{b_i}}{k_i + N^{b_i}}$ – פונק' שיעור מספר התאים העוברים בין שלבי מחזור התא
2. $\mu_i(N) = \frac{m_i N}{c_i + N}$ – פונק' צריכת המזון עבור תאים הנמצאים בשלבים G_1, G_2

⁵המודל התעלם משלב S מטעמי פשטות
⁶מטעמי פשטות, המודל התעלם מצריכת מזון בשלב M

4.2 משוואות אפיון השלבים

מערכת המשוואות הדיפרנציאליות שניתנה לתיאור הנה:

$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = -\beta_{G_1}(N)G_1 + 2zM - dG_1 & (1.a) \\ \frac{dG_2}{dt} = \beta_{G_1}(N)G_1 - \beta_{G_2}(N)G_2 - dG_2 & (1.b) \\ \frac{dM}{dt} = \beta_{G_2}(N)G_2 - zM - dM & (1.c) \\ \frac{dN}{dt} = -\mu_{G_1}(N)G_1 - \mu_{G_2}(N)G_2 - dN + dN_{in} & (1.d) \end{cases}$$

מערכת משוואות דיפרנציאליות זו מתארת את תהליך מחזור התא, כפי שהובא בסעיף 3. נבאר משוואות אלו כעת:

1. משוואה 1.a מתארת את שינוי מספר הפריטים אשר נמצאים בשלב G_1 :

(א) שיעור של $-\beta_1$ מתאי G_1 עוברים לשלב G_2

(ב) שיעור של $-d$ מתאי G_1 מוסרים מהמיכל

(ג) שיעור של $2z$ מתאי M מתווספים לאחר שלב החלוקה

2. משוואה 1.b מתארת את שינוי מספר הפריטים אשר נמצאים בשלב G_2 :

(א) שיעור של $-\beta_2$ מתאי G_2 עוברים לשלב M

(ב) שיעור של $-d$ מתאי G_2 מוסרים מהמיכל

(ג) שיעור של β_1 מתאי G_1 מתווספים לאחר שלב הגדילה הראשון

3. משוואה 1.c מתארת את שינוי מספר הפריטים אשר נמצאים בשלב M :

(א) שיעור של $-z$ מתאי M עוברים לשלב G_1

(ב) שיעור של $-d$ מתאי M מוסרים מהמיכל

(ג) שיעור של β_2 מתאי G_2 מתווספים לאחר שלב הגדילה השני

4. משוואה 1.d מתארת את שינוי ריכוז המזון הזמין בכימוסטאט:

(א) שיעור של $-\mu_1$ מריכוז המזון N נאכל ע"י תאים בשלב G_1

(ב) שיעור של $-\mu_2$ מריכוז המזון N נאכל ע"י תאים בשלב G_2

(ג) שיעור של $-d$ מריכוז המזון N מוסר מהמיכל

(ד) שיעור של dN_{in} של ריכוז מזון מוסף למיכל

הערכים שנקבעו במאמר לחקירה היו:

1. לשלב הגדילה הראשון: $a_{G_1} = 12, b_{G_1} = 30, c_{G_1} = 1, m_{G_1} = 2, k_{G_1} = 2$

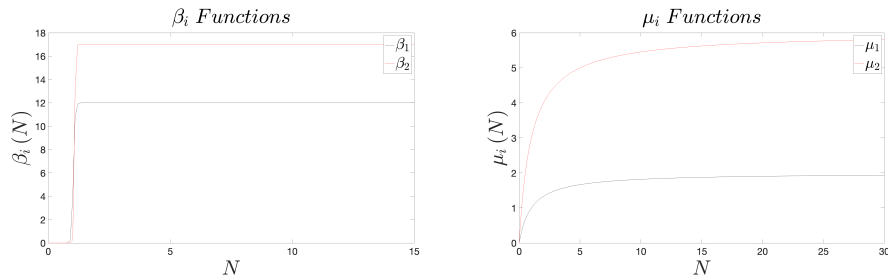
2. לשלב הגדילה השני⁷: $a_{G_2} = 17, c_{G_2} = 1, m_{G_2} = 6, k_{G_2} = 60$

3. למערכת כולה: $d = 0.3, N_{in} = 20, z = 90$

4. תנאי התחלה: $G_1 = 1, G_2 = 2, M = 0, N = 0.1$

⁷אי-ציונו של b_{G_2} אינו טעות. ערכו נלקח כמשתנה הנחקר, ולא כפרמטר במערכת

פונקציות המעבר בין שלבי מחזור התא (המבוטא באמצעות β_i) ופונקציות מידת רווית התאים (המבוטאת באמצעות μ_i) תלויות במידת ריכוז המזון בכימוסטאט. תלות הפונקציות ב- N נובע מכך שתאים מגיבים למתרחש סביבם – במידה וכמות המזון יורדת מתחת לרף הנדרש, מנגוני בקרה שונים פועלים לעצירת התפתחותם.



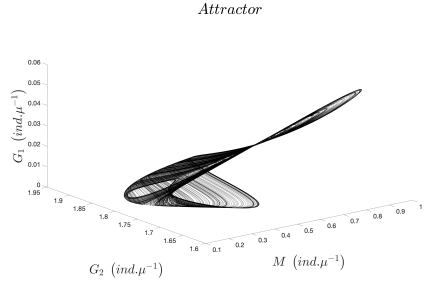
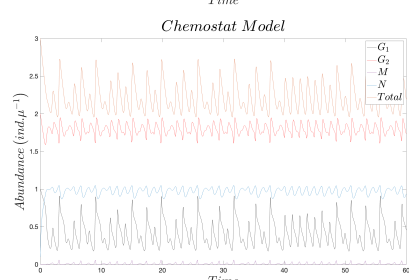
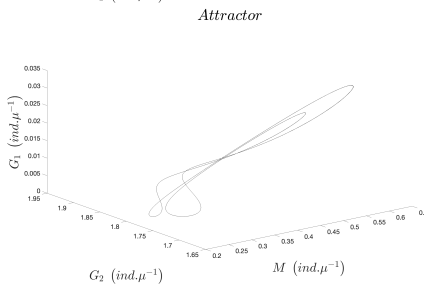
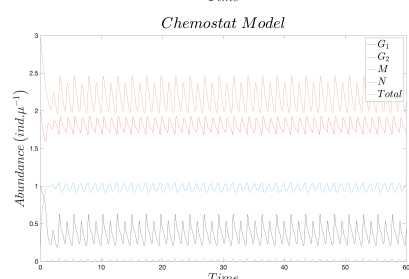
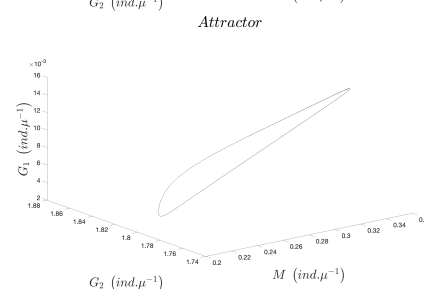
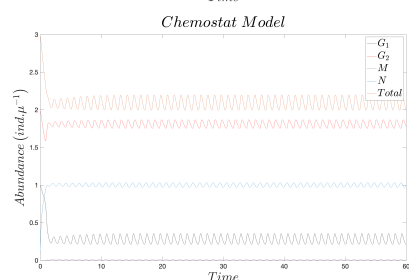
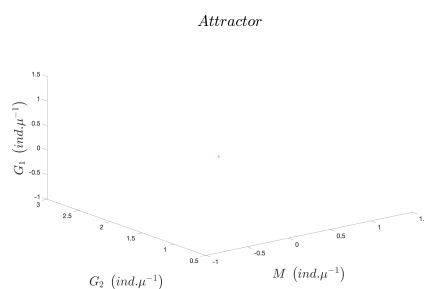
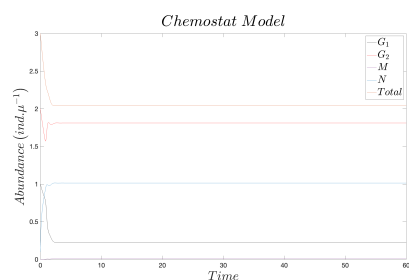
איור 5: פונקציות $\beta_i(N)$, $\mu_i(N)$

פונקציות μ_i הן ממשפחת הפונקציות המונואידיות, המוכרות מתחומי הביולוגיה, ומשמשות לתיאור קצב גידול יצורונים⁸. לפונקציות אלו קיים חסם עליון, במקרה זה $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_i = m_i$, הנובע מיחס הריכוז במצע. המספר החופשי c_i נקרא "קבוע חצי המהירות", אשר ערכו נקבע לפי היחס בין קצב הגידול לחסם העליון, כך ש- $\frac{\mu_i}{m_i} = 0.5$. במערכת המוצגת פונקציות μ_i יתארו את קצב צריכת המזון של תאים בכל שלב, לצורך תיאור כמות המזון הכוללת במיכל.

פונקציות β_i הן ממשפחות הפונקציות הסיגמואידיות, פונקציות דיפרנציאביליות לא יורדות וחסומות מעל הממשיים עם נקודת פיתול אחת בדיוק וזוג אסימפטוטות. במקרה זה $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_i = a_i$ והאסימפטוטה השלילית אינה רלוונטית. משפחת פונקציות אלו משמשות לתחומים רבים במדעים המדויקים. במערכת המוצגת פונקציות β_i יתארו את קצב מעברם של תאים אל השלב הבא במחזור התא כאשר ריכוז הנוטרופינטים מספק. מרגע שהושג סף מינימלי שכזה, מידת ההשפעה בטלה – זאת לראות באיור 5, שם צורת ה- S המוכרת לפונקציות אלו נהפכה לחדה עד-כדי מדרגה.

4.3 מצבי המערכת

פלטס נבחרים עבור מצבים שונים של המערכת, בהם: נקודת שיווי משקל, מחזוריות 2, מחזוריות 4, וכאוס:



איור 6: התפתחות המושך והתנהגות כמות הפריטים במערכת

חלק III

שיטות ותוצאות חקר המערכת

נתאר כעת את הכלים בהם נעשה שימוש כדי לבחון את המערכת והמידע הניתן להפיק באמצעותם. נעמוד על הוכחת כאוטיות המערכת, כפי שהוצעה במאמר ובאופנים שונים, לצד מאפיין מעריכי ליאפנוב וממד פרקטלי המתאים למתואר בסעיף 4.3.

5 מבחן 0-1 לכאוס

בהינתן מידע, או מערכת המדמה בקירוב תצפיות ניסוי, הקביעה האם אכן מתקיימת התנהגות כאוטית אינה פשוטה – מידע יכול להגיע מלווה בהפרעות, רעש וחוסר דיוק. בעבר ניתן היה להניח כי מעריך ליאפנוב חיובי או מושך מוזר מעידים על כאוטיות, אך כפי שצויין בסעיף 2.4 - דבר זה אינו מספיק מכשתוארו מערכות בהן מתקיימים מאפיינים אלו אך אינם כאוטיים. פרי עבודתם של *Gottwald & Melbourne*, הביא לפיתוח [2] מבחן הקובע האם אכן מדובר בכאוס, או שלא.

5.1 פיתוח

השימוש ב־עֵשָׂה באמצעות וקטור המידע הנבחן, והמרתו למערכת של שני משתנים כך:

$$\begin{cases} p_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \cos(jc) \\ q_c(n) = \sum_{j=1}^n \phi(j) \sin(jc) \end{cases}$$

כאשר $\phi(j)$ הנו וקטור המידע מגודל⁹ כלשהו ו- $c \in (0, \pi)$. כדי למנוע תהודות נבחר באקראי $c \in (\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5})$. לאחר יצירת מערכת זו, נחשב את התוחלת באופן הבא:

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left([p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2 \right)$$

כדי לחשב זאת נבצע חישוב עבור $n \ll N$, כלומר, עבור $n \leq n_0 \ll N$. לפי המאמר שבו פורטה השיטה מומלץ לקחת n_0 כזה שאינו גדול ממש מ $\frac{N}{10}$. הערך שיהווה עבורנו סממן לכאוס יהא $K_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_c(n)}{\log n}$.

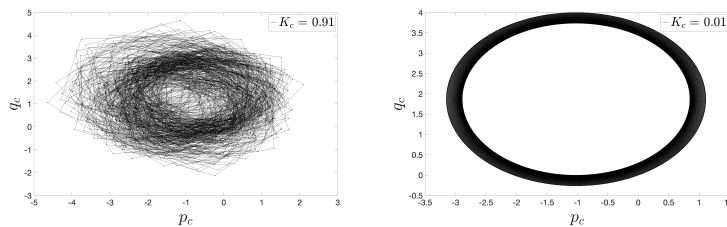
5.2 תוצרים

ערכי K_c הקרובים ל-0 מסמלים יציבות וערכים הקרובים ל-1 מסמלים כאוטיות. בנוסף לכך, בייצוג גרפי של מערכת p_c, q_c יוצר מעגל (כתוצאה מאופן השימוש בפונקציות הטריגונומטריות: \sin, \cos) המסמל יציבות, או כְּמָה שרואה כתנועה בראונית המסמלת כאוטיות.

⁹גודלו אינו משמעותי, אך יש להבחין כי המידע אינו נדגם יתר על המידה.

5.3 תוצאות

משיקולי התכנסות שלא נעמיק בהם, באלגוריתם 2 המובא בנספח, התוחלת מחושבת 100 פעמים עם ערכי c שונים, לטובת מיטוב תוצאת ערך K_c . חישוב K_c נעשה באמצעות מתאם פירסון, בין $\xi = (1, 2, \dots, n_0)$ ו- $\Delta = (M_c(1), M_c(2), \dots, M_c(n_0))$, כך ש- $K_c = \text{corr}(\xi, \Delta) = \frac{\text{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\text{var}(\xi)\text{var}(\Delta)}} \in [-1, 1]$. האלגוריתם מחשב את ערך התוחלת שהתקבל מתוך כל אלו. נראה כי עבור ערכים שונים של b_{G_2} יתקבלו תוצאות שונות למבחן וכי קיימים ערכים בהם המערכת כאוטית. באיור 7 ניתן לראות את תוצאות המבחן עבור $b_{G_2} = 15$, שם התקבל ערך $K_c = 0.01$ ופלט גרפי עגול; מאידך עבור $b_{G_2} = 56$ התקבל ערך $K_c = 0.91$ עם תנועה אקראית.



איור 7: תוצאת מבחן 0-1 לכאוס

6 הסתעפויות

6.1 יישום

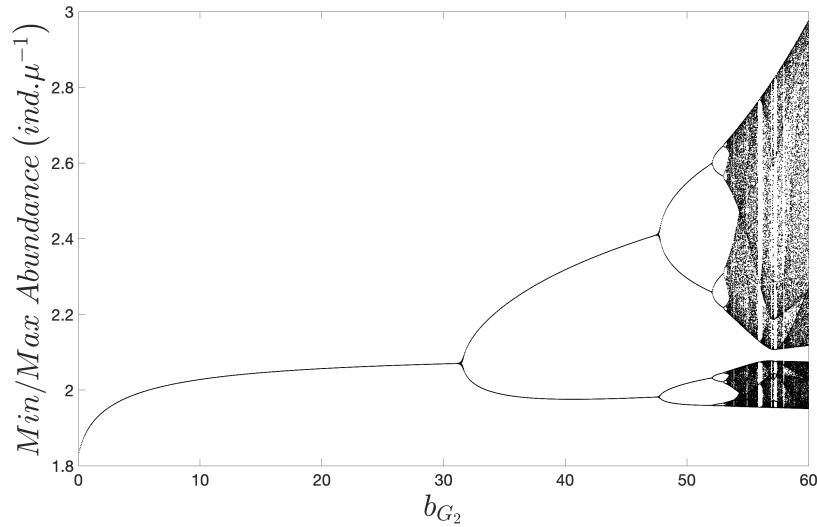
הרעיון העומד בבסיס אלגוריתם 3 הנו מציאת ערכי הקיצון עבור ריכוז התאים מתוך פתרון המערכת, עבור המשתנה הנבחר לפי לולאה רצה. כיוון שהתוצאה המתקבלת בכל הרצה הנה וקטור, מציאת הגודל המקסימלי והמינימלי לא יספיקו ונרצה למצוא את כל נקודות הקיצון עבור פתרון מסוים. הדרך הנאיבית לתיאור נקודות קיצון היא אחת משתיים:

1. ערך גדול או שווה מקודמו וגם מזה שאחריו
2. ערך קטן או שווה מקודמו וגם מזה שאחריו

ערכים המקיימים אחד משני התנאים נשמור תחת וקטור חדש, אשר יציג בפלט את דיאגרמת ההסתעפויות.

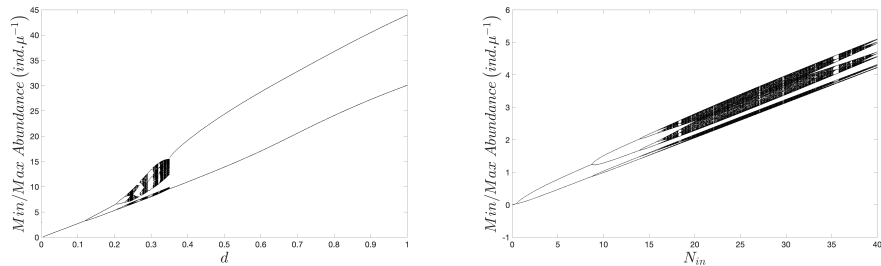
6.2 דיאגרמת ביפורקציות

הגרף המצורף באיור 8 ממחיש את דרכה של המערכת. כיצד כמות התאים שומרת על יציבות כל עוד $b_{G_2} < 33$, משתנה הלוך ושוב עבור פתרונות מחזוריים או כאוטית עבור ערכי $b_{G_2} > 54$.



איור 8: תרשים הסתעפויות עבור השתנות b_{G_2}

לצד זאת, ערכי b_{G_2} מוטמעים בטבעם של התאים, משתנים בין סוגי תאים שונים וקשים עד מאוד להערכה מדויקת. ניתן להניח כי דווקא בחירתם של ערכים אחרים עשויה הייתה להיות קלה יותר לבחינת המערכת, לדוגמה, יחס קצב הדילול (d) או כמות המצע המוזן למיכל (N_{in}). ערכים חלופיים אלה פשוטים יותר לכימות, כיוון שנקבעים או נשלטים חיצונית. באיור 9 ניתן לראות כי גם עבור וריאציות שונות של המערכת, בהן $b_{G_2} = 25$ וקצב הדילול משתנה, או כמות המצע המוזן משתנה ו- $b_{G_2} = 55$, המערכת מגיעה למצב בו מתפתח כאוס.



איור 9: תרשים הסתעפויות עבור השתנות d, N_{in}

7 מערכי ליאפונוב וממד

7.1 מקשטת ליאפונוב

7.1.1 חישוב ערכים

מערכת מסדר n תהא בעלת n מערכי ליאפונוב. כדי לחשבם ניעזר בדיסקריטיזציה של המערכת הרציפה; חישוב הסטייה מנקודת ייחוס ראשונית ע"י שינוי מערי ומדידת שיעור השינוי הלוגריתמי הממוצע.

כפי שתואר במאמרם [4] של *Hang Li, et al*, נוכל לבצע זאת בהסתמך על עקרון זיכרון הנגזרות השבריות של *Grünwald-Letnikov* ותהליך האורתונורמליזציה של גרהם-שמידט. התיאור לא יכלול שימוש בנגזרות שבריות, אך בחירה באלגוריתם המוצע נובעת מכך ששיטה זו הניבה תוצאות מדויקות על פני אלגוריתמים אחרים קודמים לו. רעיון האלגוריתם העומד במאמר זה הנו שימוש במטריצת היעקוביאן כצעד איטרטיבי ובמקדם הבינומיאלי באלגוריתם הנגזרות השבריות $G - L$. כל צעד בחלוקה הדיסקרטית של הזמן מתבצע באמצעות כפולה של היעקוביאן בערכים הנוכחיים, כך ש:

$$F^{k+1} = J_f^k f^k = J_f^k J_f^{k-1} f^{k-1} = \dots = \prod_{s=0}^k J_f^s f^0 = A^k f^0 = \sum_{i,j=1}^n f_i^0 a_j^k$$

כאן a_j^k הנה העמודה ה- j יית A^k . מכפלת היעקוביאן עבור כל צעד עד הצעד ה- k כאשר $A^0 = I$, מטריצת היחידה. הבעיה בה ניתקל היא כי לא ניתן לקבל בצורה מפורשת וישירה את מטריצות היעקוביאן לכל צעד מתוך מערכת, לכן ניעזר בביטוי המפורש המופיע לאחר מכן. כל איבר $a_{i,j}^{k+1}$ ניתן לתיאור באמצעות הנגזרת החלקית ומקדם בינומי, לפי:

$$a_{i,j}^{k+1} = h \frac{\partial f_i}{\partial x_j} a_{i,j}^k - \sum_r^{k+1} C_r a_{i,j}^{(k+1-r)}$$

כאשר $C_r = (1 - \frac{2}{r}) C_{r-1}$, המשמש כמקדם בינומיאלי בחישוב הנגזרות המתאימות. בכל איטרציה מבוצע תהליך גרהם-שמידט על מטריצה A כיוון שכש- $k \rightarrow \infty$, ערכי A^k נוטים להידמות ל- a_1^k ולכן יתקרבו ל- λ_1 בצורה שגויה, כתוצאה מכך ש- $\lambda_1 > 0$ הערכים אינם חסומים ולכן קיימת בעיית התכנסות לפי משפט הרדיוס הספקטרלי של מטריצות. בנוסף, כיוון שהמטריצה לא חסומה, הערכים עלולים להתבדר. כעת ערכי מערכי ליאפונוב הנם:

$$\lambda_j = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K h_{norm}} \sum_{\kappa=1}^K \ln \|v_j^{\kappa N}\|$$

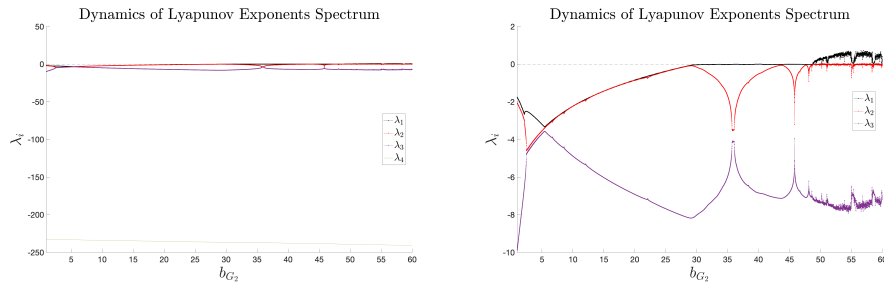
כאן v_j הנה העמודה ה- j יית של A^k לאחר תהליך גרהם-שמידט, $N \in \mathbb{N}$, $h_{norm} = Nh$ ו- h הוא צעד האינטגרציה. במאמר ובאופן כללי ניתן להשתמש ב- $h_{norm} = 10$ כערך אמפירי שאינו משנה משמעותית את תוצאות החישוב. יישום שיטה זו העלה תוצאות אשר עמדו בהתאמה לערכים בהם התקיים כאוס לפי המבחן בסעיף 5, כאשר ידועה הקורלציה בין התנהגות כאוטית לסימני אוסף¹⁰ מערכי ליאפונוב, והיא:

1. יציבות: $(-, \dots, -)$
2. מעגלי-גבולי: $(0, -, \dots, -)$
3. כאוס: $(+, 0, -, \dots, -)$

¹⁰קיימים אוספים נוספים לאפיון מצבים נוספים, בהם טורוס והיפר-כאוס

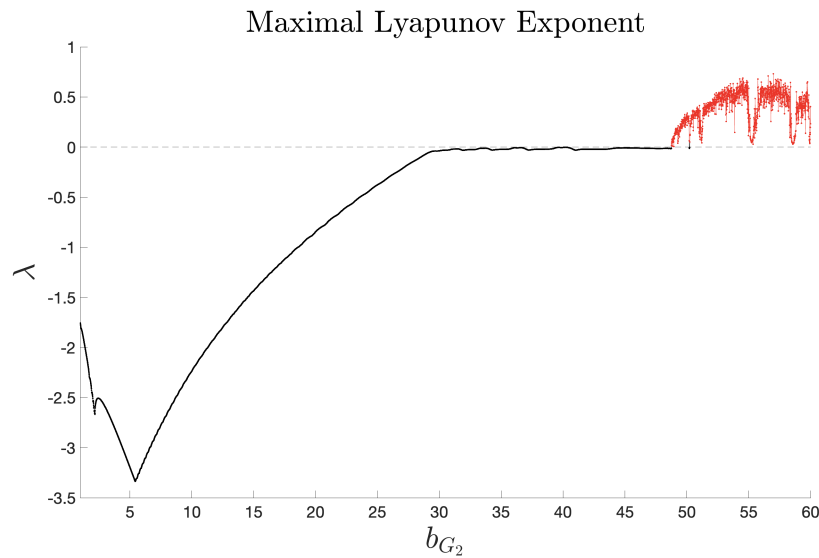
7.1.2 תוצאות נומריות

באיור 10 ניתן לראות את מקשטת מעריכי ליאפנוב¹¹, אשר התקבלה לפי המתואר בסעיף הקודם ולפי צעד של $h = 0.01$:



איור 10: מקשטת מעריכי ליאפנוב

באיור 11 ניתן לראות כיצד מעריך ליאפנוב המקסימלי (MLE) משתנה כתלות בערכי b_{G_2} . ערכו של המעריך המקסימלי, המתאפיין בערכים שליליים (חיוביים) עבור יציבות (התנהגות כאוטית). הפלט מתאים לנקודות בהן המערכת משנה את מצבה ומתרחשת הסתעפות (שם המעריך המקסימלי מתאפס), לפי סעיף 4.3.



איור 11: תרשים ערכי MLE כתלות ב- b_{G_2}

¹¹באיור הימני הושמט ערך λ_4 , כיוון שערכו השלילי השפיע על תצוגת הערכים האחרים

7.2 שיעור קפלן-יורק

שיעור קפלן-יורק הנה דרך לחישוב ממד המושך בצורה מקורבת באמצעות מעריכי ליאפונוב. החישוב מחולק לשלבים הבאים:

1. סידור המעריכים בסדר לא עולה:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

2. סכימת הערכים כל עוד הסכום אי-שלילי ומציאת האינדקס j המתאים:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

3. חישוב ממד לפי נוסחת קפלן יורק:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

בהרצת האלגוריתם מסעיף 7.1.1 עם $b_{G_2} = 56, h = 0.001$ יתקבלו הערכים:

$$\lambda_1 = 0.354, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -7.089, \lambda_4 = -95.295$$

מכאן ש- $j = 2$, ו- $D_{KY} = 2 + \frac{0.354+0}{|-7.089|} = 2.05$ ממד פרקטלי, האופייני למערכות כאוטיות.

חלק IV אחרית דבר

סיכום ומסקנות

עבודה זו התבססה על מאמרם של *Werner, et al. 2022* בדבר התנהגות כמות הפריטים באוכלוסיות הנמצאות תחת תנאים מיטביים. בשונה מנסיונות עבר, בהם הוצגו מערכות בדידות, עבודתם הציגה מערכת רציפה בזמן. תגליתם החדשה הראתה כי קיימים מצבים בהם מגמת השתנות כמות הפריטים תשתנה בקיצוניות לכאן או לכאן, ללא אפשרות חיזוי.

נקודת המוצא במאמר הייתה כי התנהגות כאוטית מופיעה לפי מאפיינים הטבועים בסוג התא, כגון משך הזמן בכל שלב במחזור החיים של התא, או כמות המזון הנצרך. ניתן לראות כי גם עבור קבועים אחרים במודל, כדוגמת קצב דילול מיכל הכימוסטאט, מתפתח כאוס. הערך הנידון למחקר במאמר, b_{G_2} , קשה לכימות ואפיון. על אף הקושי, מדידת ערכים ביולוגיים מסוג זה, הקשורים לאופי ולמנגנוני התא גדולה בחשיבותה - זאת לצורך חקר מחלות ומיגורן. יישומים אפשריים של מחקר בתחום הם בחקר גידולים ממאירים – הנוגע לחלוקה לא מבוקרת של תאים, וסערת ציטוקינים. התאמת המערכת המוצעת בתחומים אלה יכולה להשפיע רבות על בריאות הציבור.

בעבודה זו הובא הפן המתמטי שבחקר המערכת על ידי הוכחת הכאוטיות המובנית והצגת המאפיינים שלה, כדוגמת ממד והסתעפויות. במהלך הכנתה נחשפתי למאמרים חדשניים ולשיטות מחקר בין-תחומי.

מקורות

- [1] Field, Mike and Golubitsky, Martin. Symmetry in Chaos: A Search for Pattern in Mathematics, Art and Nature. Oxford University Press, .1995
- [2] Gottwald, Georg A. and Melbourne, Ian. The $\mathcal{O}-\lambda$ Test for Chaos: A Review, pages .247–221 Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, .2016
- [3] Grebogi, Celso, Ott, Edward, Pelikan, Steven, and Yorke, James A. Strange attractors that are not chaotic. Physica D: Nonlinear Phenomena, ,268–261:(1)13 .1984
- [4] Li, Hang, Shen, Yongjun, Han, Yanjun, Dong, Jinlu, and Li, Jian. Determining lyapunov exponents of fractional-order systems: A general method based on memory principle. Chaos Solitons and Fractals, .2023
- [5] Strogatz, Steven H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Westview Press, .2000
- [6] Werner, Johannes, Pietsch, Tobias, Hilker, Frank M., and Arndt, Hartmut. Intrinsic nonlinear dynamics drive single-species systems. Proceedings of the National Academy of Sciences, .2022

Algorithm 1 *The Chemostat Model*

```

1 function chemostatModel(t0,tf,bG2)
2 time=[t0 tf]; IC=[1;2;0;0.1];
3 [t,y]=ode45(@odeSys, time, IC, [], bG2); abundance=y(:,1)+y(:,2)+y(:,3);
4 end

1 function dydt = odeSys(t,y,bG2)
2 aG1=12; bG1=30; cG1=1; kG1=2; mG1=2;
3 aG2=17;          cG2=1; kG2=60; mG2=6;
4 d=0.3; z=90; N_in=20;
5 betaG1=(aG1*y(4)^bG1)/(kG1+y(4)^bG1);
6 betaG2=(aG2*y(4)^bG2)/(kG2+y(4)^bG2);
7 muG1=(mG1*y(4))/(cG1+y(4));
8 muG2=(mG2*y(4))/(cG2+y(4));
9 dydt=zeros(4,1);
10 dydt(1)=-betaG1*y(1)+2*z*y(3)-d*y(1);
11 dydt(2)=betaG1*y(1)-betaG2*y(2)-d*y(2);
12 dydt(3)=betaG2*y(2)-z*y(3)-d*y(3);
13 dydt(4)=-muG1*y(1)-muG2*y(2)-d*y(4)+d*N_in;
14 end

```

Algorithm 2 *A Method for 0-1 Test for Chaos*

```

1 function zoTest(data)
2 if size(data,2) == 1; data=data'; end
3 N=length(data); j=1:N; N0=round(N/10); Xi=1:N0;
4 D=zeros(1,N0); K=zeros(100,1); c=pi/5+rand(1,100)*3*pi/5;
5 for i=1:100
6     p=cumsum(data.*cos(j*c(i))); q=cumsum(data.*sin(j*c(i)));
7     for n = 1:N0
8         D(n)=mean((p(n+1:N) - p(1:N-n)).^2 + (q(n+1:N) - q(1:N-n)).^2) - ...
9             mean(x)^2*(1-cos(n*c(i)))/(1-cos(c(i)));
10    end
11    K(i)=corr(Xi',D');
12 end
13 end

```

Algorithm 3 *A Method for Computing System's Bifurcation Diagram*

```
1 function bifuDiag(t0,tf)
2 dots=[]; time=[t0 tf]; IC=[1;2;0;0.1]; bG2=1;
3 for i=1:6000
4     [t,y]=ode45(@odeSys, time, IC, [], bG2); obj=y(:,1)+y(:,2)+y(:,3);
5     for j=round(length(obj)/2):length(obj)-1
6         if((obj(j)>=obj(j-1))&&(obj(j)>=obj(j+1)))...
7             ||((obj(j)<=obj(j-1))&&(obj(j)<=obj(j+1)))
8                 dots=[dots;i obj(j)];
9         end
10    end
11    bG2=bG2+0.01;
12 end
13 end
```

Algorithm 4 *A Method for Calculating Lyapunov Exponents*

```
1 function lyapExp(bG2)
2 aG1=12; bG1=30; cG1=1; kG1=2; mG1=2;
3 aG2=17;          cG2=1; kG2=60; mG2=6;
4 d=0.3; z=90; N_in=20;
5 expo=zeros(1,5); h=1e-3; h_norm=10*h; N=h_norm/h;
6 tn=300-h; t=0:h:tn; n=length(t); T=0:h_norm:tn;
7 Q=1;q1=Q;q2=Q;q3=Q;q4=Q;
8 cp1=1; cp2=1; cp3=1; cp4=1;
9 for j=1:n
10    c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;
11    c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;
12    c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;
13    c4(j)=(1-(1+q4)/j)*cp4;
14    cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j); cp4=c4(j);
15 end
16 x1(1)=1; x2(1)=2; x3(1)=0; x4(1)=0.1; k=1;
17 f11(k)=1; f12(k)=0; f13(k)=0; f14(k)=0;
18 f21(k)=0; f22(k)=1; f23(k)=0; f24(k)=0;
19 f31(k)=0; f32(k)=0; f33(k)=1; f34(k)=0;
20 f41(k)=0; f42(k)=0; f43(k)=0; f44(k)=1;
21 J=[f11(k),f12(k),f13(k),f14(k);...
22     f21(k),f22(k),f23(k),f24(k);...
23     f31(k),f32(k),f33(k),f34(k);...
24     f41(k),f42(k),f43(k),f44(k)];
25 SUM=[0;0;0;0;]; LE=[];
```

```

26 for k=2:n
27     x1(k)=((-aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))*x1(k-1)...
28           +2*z*x3(k-1)-d*x1(k-1))*h^q1-calmem(x1,c1,k);
29     x2(k)=((aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))*x1(k-1)...
30           -(aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))*x2(k-1)...
31           -d*x2(k-1))*h^q2-calmem(x2,c2,k);
32     x3(k)=((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))*x2(k-1)...
33           -z*x3(k-1)-d*x3(k-1))*h^q3-calmem(x3,c3,k);
34     x4(k)=((-mG1*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1))*x1(k-1)...
35           -(mG2*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1))*x2(k-1)...
36           -d*x4(k-1)+d*N_in)*h^q4-calmem(x4,c4,k);
37     f11(k)=((((-aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1)))*f11(k-1))...
38            -(x1(k-1)*f41(k-1)*((aG1*bG1*kG1*x4(k-1)^(bG1-1))...
39            /((kG1+x4(k-1)^bG1)^2)))...
40            +(2*z*f31(k-1)-(d*f11(k-1)))*h^q1-calmem(f11,c1,k);
41     f12(k)=((((-aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1)))*f12(k-1))...
42            -(x1(k-1)*f42(k-1)*((aG1*bG1*kG1*x4(k-1)^(bG1-1))...
43            /((kG1+x4(k-1)^bG1)^2)))...
44            +(2*z*f32(k-1)-(d*f12(k-1)))*h^q1-calmem(f12,c1,k);
45     f13(k)=((((-aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1)))*f13(k-1))...
46            -(x1(k-1)*f43(k-1)*((aG1*bG1*kG1*x4(k-1)^(bG1-1))...
47            /((kG1+x4(k-1)^bG1)^2)))...
48            +(2*z*f33(k-1)-(d*f13(k-1)))*h^q1-calmem(f13,c1,k);
49     f14(k)=((((-aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1)))*f14(k-1))...
50            -(x1(k-1)*f44(k-1)*((aG1*bG1*kG1*x4(k-1)^(bG1-1))...
51            /((kG1+x4(k-1)^bG1)^2)))...
52            +(2*z*f34(k-1)-(d*f14(k-1)))*h^q1-calmem(f14,c1,k);

```

53 $f_{21}(k)=(((aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))) * f_{11}(k-1))...$
54 $+ (x1(k-1) * f_{41}(k-1) * ((aG1 * bG1 * kG1 * x4(k-1)^bG1-1))...$
55 $/(kG1+x4(k-1)^bG1^2))...$
56 $-(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{21}(k-1))...$
57 $- (x2(k-1) * f_{41}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
58 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2))...$
59 $- (d * f_{21}(k-1)) * h^q2 - \text{calmem}(f_{21}, c2, k);$
60 $f_{22}(k)=(((aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))) * f_{12}(k-1))...$
61 $+ (x1(k-1) * f_{42}(k-1) * ((aG1 * bG1 * kG1 * x4(k-1)^bG1-1))...$
62 $/(kG1+x4(k-1)^bG1^2))...$
63 $-(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{22}(k-1))...$
64 $- (x2(k-1) * f_{42}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
65 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2))...$
66 $- (d * f_{22}(k-1)) * h^q2 - \text{calmem}(f_{22}, c2, k);$
67 $f_{23}(k)=(((aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))) * f_{13}(k-1))...$
68 $+ (x1(k-1) * f_{43}(k-1) * ((aG1 * bG1 * kG1 * x4(k-1)^bG1-1))...$
69 $/(kG1+x4(k-1)^bG1^2))...$
70 $-(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{23}(k-1))...$
71 $- (x2(k-1) * f_{43}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
72 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2))...$
73 $- (d * f_{23}(k-1)) * h^q2 - \text{calmem}(f_{23}, c2, k);$
74 $f_{24}(k)=(((aG1*(x4(k-1)^bG1))/(kG1+(x4(k-1)^bG1))) * f_{14}(k-1))...$
75 $+ (x1(k-1) * f_{44}(k-1) * ((aG1 * bG1 * kG1 * x4(k-1)^bG1-1))...$
76 $/(kG1+x4(k-1)^bG1^2))...$
77 $-(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{24}(k-1))...$
78 $- (x2(k-1) * f_{44}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
79 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2))...$
80 $- (d * f_{24}(k-1)) * h^q2 - \text{calmem}(f_{24}, c2, k);$
81 $f_{31}(k)=(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{21}(k-1))...$
82 $+ (x2(k-1) * f_{41}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
83 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2)) - (z * f_{31}(k-1))...$
84 $- (d * f_{31}(k-1)) * h^q3 - \text{calmem}(f_{31}, c3, k);$
85 $f_{32}(k)=(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{22}(k-1))...$
86 $+ (x2(k-1) * f_{42}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
87 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2)) - (z * f_{32}(k-1))...$
88 $- (d * f_{32}(k-1)) * h^q3 - \text{calmem}(f_{32}, c3, k);$
89 $f_{33}(k)=(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{23}(k-1))...$
90 $+ (x2(k-1) * f_{43}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
91 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2)) - (z * f_{33}(k-1))...$
92 $- (d * f_{33}(k-1)) * h^q3 - \text{calmem}(f_{33}, c3, k);$
93 $f_{34}(k)=(((aG2*(x4(k-1)^bG2))/(kG2+(x4(k-1)^bG2))) * f_{24}(k-1))...$
94 $+ (x2(k-1) * f_{44}(k-1) * ((aG2 * bG2 * kG2 * x4(k-1)^bG2-1))...$
95 $/(kG2+x4(k-1)^bG2^2)) - (z * f_{34}(k-1))...$
96 $- (d * f_{34}(k-1)) * h^q3 - \text{calmem}(f_{34}, c3, k);$

```

97  f41(k)=((( -mG1*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1)))*f11(k-1))...
98      -(x1(k-1)*f41(k-1)*((cG1*mG1)/((cG1+x4(k-1))^2)))...
99      -(((mG2*x4(k-1))/(cG2+x4(k-1)))*f21(k-1))...
100     -(x2(k-1)*f41(k-1)*((cG2*mG2)/((cG2+x4(k-1))^2)))...
101     -(d*f41(k-1))*h^q4-calmem(f41,c4,k);
102  f42(k)=((( -mG1*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1)))*f12(k-1))...
103     -(x1(k-1)*f42(k-1)*((cG1*mG1)/((cG1+x4(k-1))^2)))...
104     -(((mG2*x4(k-1))/(cG2+x4(k-1)))*f22(k-1))...
105     -(x2(k-1)*f42(k-1)*((cG2*mG2)/((cG2+x4(k-1))^2)))...
106     -(d*f42(k-1))*h^q4-calmem(f42,c4,k);
107  f43(k)=((( -mG1*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1)))*f13(k-1))...
108     -(x1(k-1)*f43(k-1)*((cG1*mG1)/((cG1+x4(k-1))^2)))...
109     -(((mG2*x4(k-1))/(cG2+x4(k-1)))*f23(k-1))...
110     -(x2(k-1)*f43(k-1)*((cG2*mG2)/((cG2+x4(k-1))^2)))...
111     -(d*f43(k-1))*h^q4-calmem(f43,c4,k);
112  f44(k)=((( -mG1*x4(k-1))/(cG1+x4(k-1)))*f14(k-1))...
113     -(x1(k-1)*f44(k-1)*((cG1*mG1)/((cG1+x4(k-1))^2)))...
114     -(((mG2*x4(k-1))/(cG2+x4(k-1)))*f24(k-1))...
115     -(x2(k-1)*f44(k-1)*((cG2*mG2)/((cG2+x4(k-1))^2)))...
116     -(d*f44(k-1))*h^q4-calmem(f44,c4,k);
117  J=[f11(k),f12(k),f13(k),f14(k);...
118     f21(k),f22(k),f23(k),f24(k);...
119     f31(k),f32(k),f33(k),f34(k);...
120     f41(k),f42(k),f43(k),f44(k)];
121  if mod(k,N)==0
122     [J,E]=GSR(J);
123     SUM=SUM+log(E);
124     f11(k)=J(1,1); f12(k)=J(1,2); f13(k)=J(1,3); f14(k)=J(1,4);
125     f21(k)=J(2,1); f22(k)=J(2,2); f23(k)=J(2,3); f24(k)=J(2,4);
126     f31(k)=J(3,1); f32(k)=J(3,2); f33(k)=J(3,3); f34(k)=J(3,4);
127     f41(k)=J(4,1); f42(k)=J(4,2); f43(k)=J(4,3); f44(k)=J(4,4);
128     LE=[LE,SUM/(k*h)];
129  end
130 end
131 end

```
